Transformations de Phase — Série 10 - Solutions

Exercise 1: Matrices de passage

1. Comme $[\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{B}'] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{a'} & \mathbf{b'} \end{matrix} \end{array}$ → **a’ = a** et **b’ = -b**

La combinaison du Step 1 puis du Step 2 s’écrit de gauche à droite car les matrices sont passives:

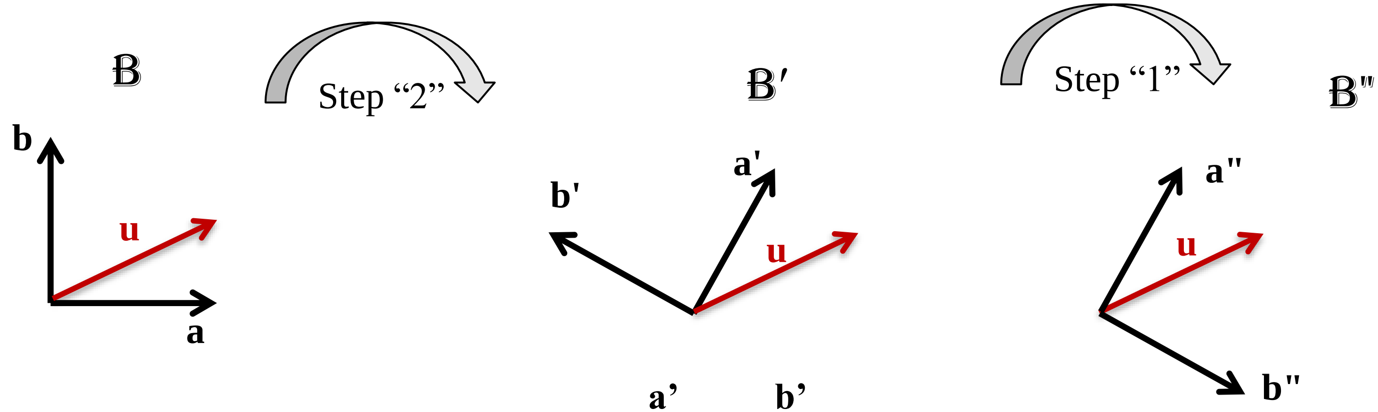
$$[\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{B}''] = [\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{B}'][\mathbb{B}'\rightarrow\mathbb{B}''] = m_x\, r_{\pi/3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \quad\uparrow \\ \mathbf{a''} & \quad\mathbf{b''} \end{matrix} \end{array} \text{ écrits dans } \mathbb{B}$$

2. $\mathbf{u}_{/\mathbb{B}''} = [\mathbb{B}''\rightarrow\mathbb{B}]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ avec $[\mathbb{B}''\rightarrow\mathbb{B}] = [\mathbb{B}\rightarrow\mathbb{B}'']^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{u}_{/\mathbb{B}''} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3}/4 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.066 \\ -1.116 \end{bmatrix}$$

3. On applique ici la matrice du Step « 2 » et ensuite la matrice du Step « 1 »:

$$\mathbf{T}_1 = r_{\pi/3} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_2 = m_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



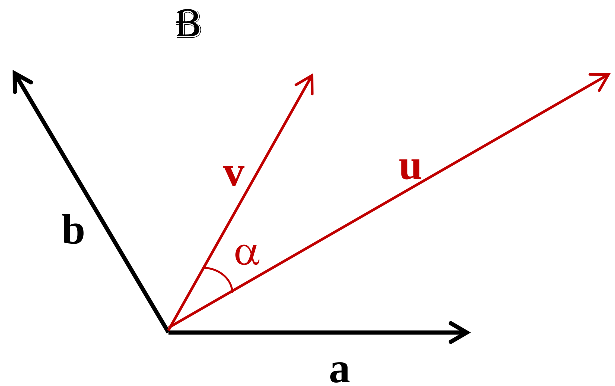
$$[Ƀ\rightarrow Ƀ''] = [Ƀ\rightarrow Ƀ'][Ƀ'\rightarrow Ƀ''] = \quad r_{\pi/3} m_x = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{a'} & \mathbf{b'} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{a''} & \mathbf{b''} \end{array} \end{array} \quad \text{écrit dans } Ƀ$$

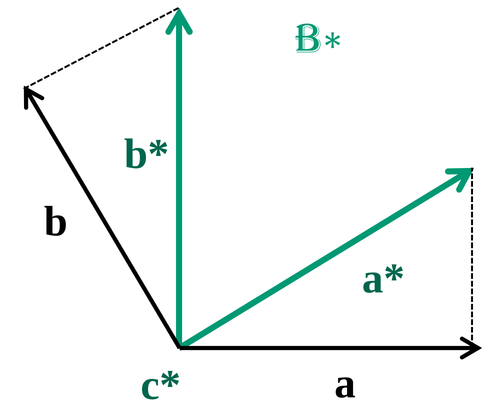
$$\mathbf{u}_{/B''} = [Ƀ''\rightarrow Ƀ] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \text{avec } [Ƀ''\rightarrow Ƀ] = [Ƀ\rightarrow Ƀ'']^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{/B''} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \sqrt{3}/4 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9393 \\ 0.6160 \end{bmatrix}$$

<u>Exercise 2</u>: Plans et indices de Miller

1. Base réciproque:
   $\mathbf{a}^*$ et $\mathbf{b}^*$ en vert





2a. Tenseur métrique

$$\mathbf{G} = [\mathbb{B}^*\rightarrow\mathbb{B}] = \begin{bmatrix} 1 & cos\,\gamma \\ cos\,\gamma & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtenu par la formule du cours. Peut être aussi trouvé en écrivant **a** et **b** dans la base ($\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$)

2b. Les vecteurs $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont en rouge sur la figure. Leur produit scalaire est

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = \mathbf{u}^t\,\mathbf{G}\,\mathbf{v} = 3\,(1 + \cos\gamma\,) = 3/2$$

Comme $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\alpha$ avec $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}^t\,\mathbf{G}\,\mathbf{u} = 3$ et $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}^t\,\mathbf{G}\,\mathbf{v} = 1$

$$\Rightarrow \alpha = arcos\left(\frac{3/2}{\sqrt{3}}\right) = 30°$$

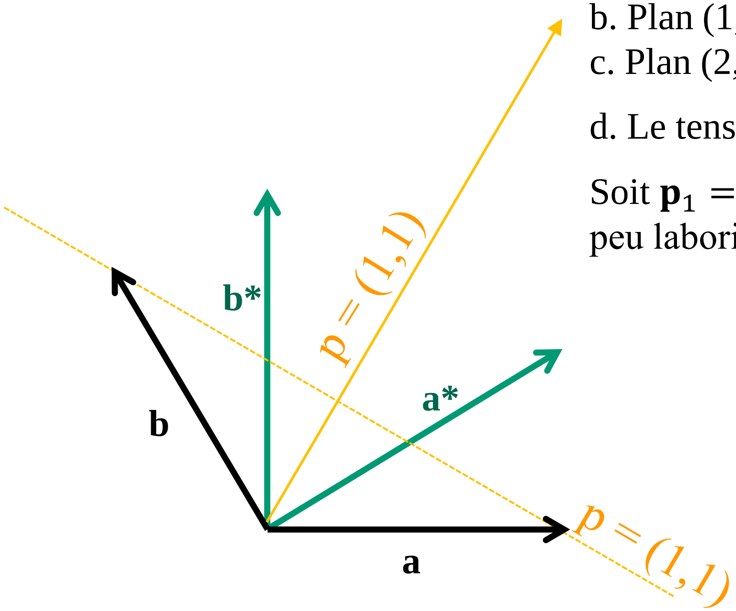
a. Plan (1,1) en jaune pointillé. (1,1) Vecteur (1,1) = a*+ b* en jaune.

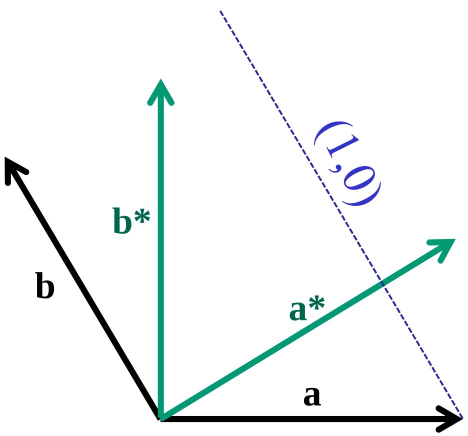
b. Plan (1,0) en bleu pointillé. Vecteur (1,0) = a*.

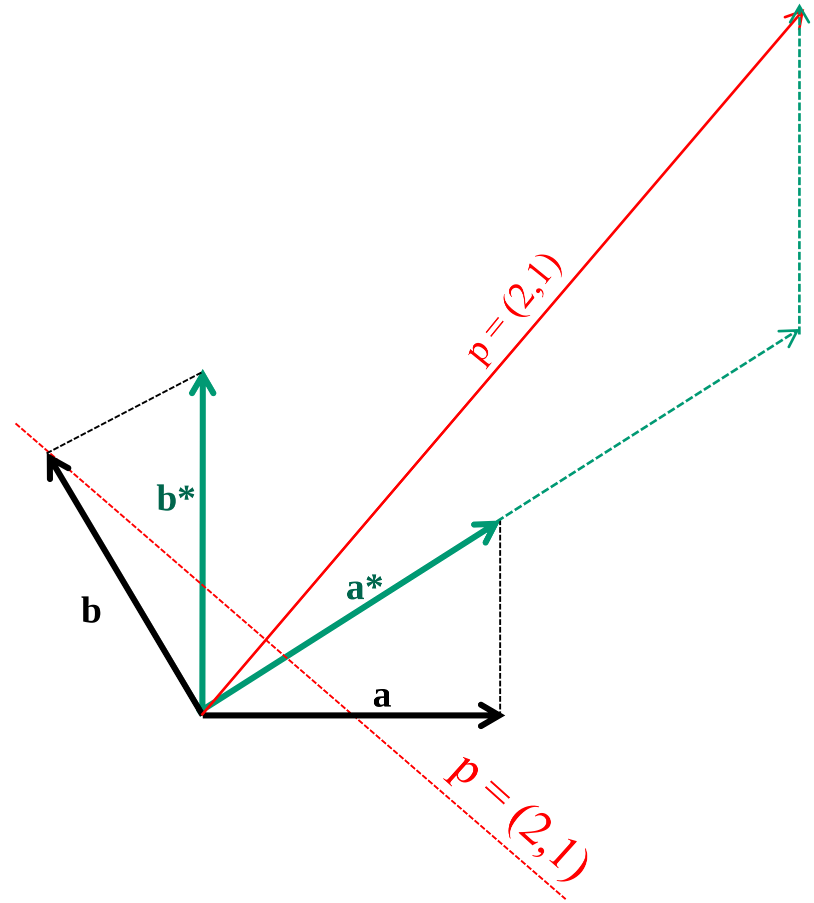
c. Plan (2,1) en rouge pointillé. Vecteur (2,1) = 2a*+ b* en rouge.

d. Le tenseur métrique pour les plans est $\mathbf{G}^{*} = \mathbf{G}^{-1} = \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

Soit $\mathbf{p}_1 = (1,1)$ et $\mathbf{p}_2 = (2,1)$. Les calculs ne sont pas difficiles mais peut-être un peu laborieux, alors j'ai utilisé Mathematica (voir slide suivante)







```
In[76]:= G = {{1, -1/2}, {-1/2, 1}};
GE = Inverse[G];
Print[" le tenseur métrique pour les plans est : ", TableForm[GE]]
p1 = {1, 1};
p2 = {2, 1};
Print [" la norme au carré de p1 est : ", p1.GE.p1]
Print[" la norme au carré de p2 est : ", p2.GE.p2]
sc = p1.GE.p2 / (Sqrt[p1.GE.p1] Sqrt[p2.GE.p2]);
Print[" le produit scalaire de p1 par p2 avec les vecteurs normalisés est : ", sc]
Print[" l'angle en degrés est : ", N[ArcCos[sc] / Degree]]
```

le tenseur métrique pour les plans est : $\begin{matrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{matrix}$

la norme au carré de p1 est : 4

la norme au carré de p2 est : $\frac{28}{3}$

le produit scalaire de p1 par p2 avec les vecteurs normalisés est : $\frac{3\sqrt{\frac{3}{7}}}{2}$

l'angle en degrés est : 10.8934