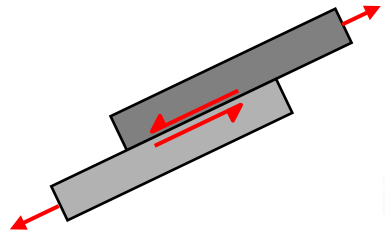
Résistance des matériaux



http://www.ciffreobona.fr/catalogue/details-outillage-cisailles_a_tole_articulee_upper-cut-627.html

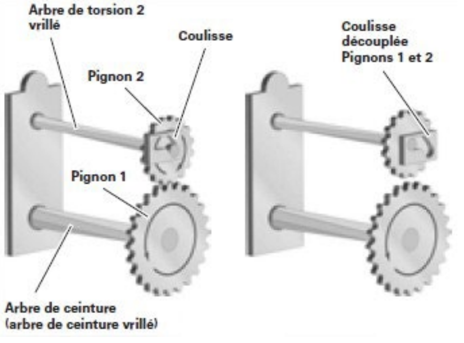
Cisaillement.

Etat de contraintes, énergie de déformation

Torsion circulaire.

Etat de contraintes, isostatiques, énergie de déformation

http://www.yoga-amrita.com/parvritta-pawanmuktasana/



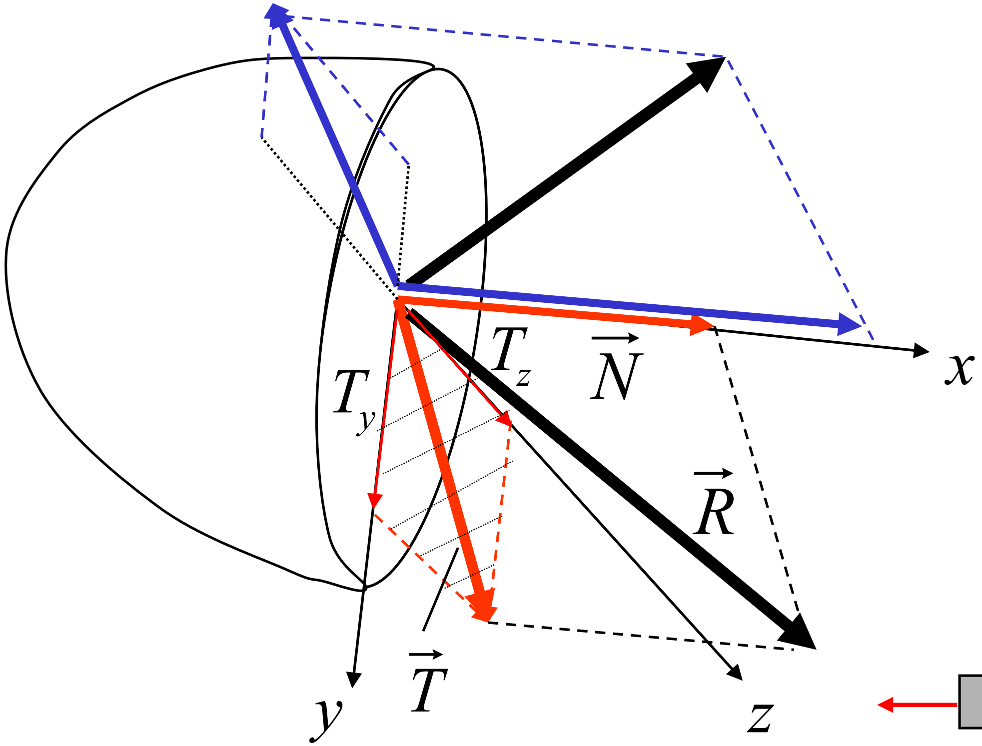
http://www.forum-audi.com/topic-125-audi-a5-protection-des-occupants-systemes-de-securite.html

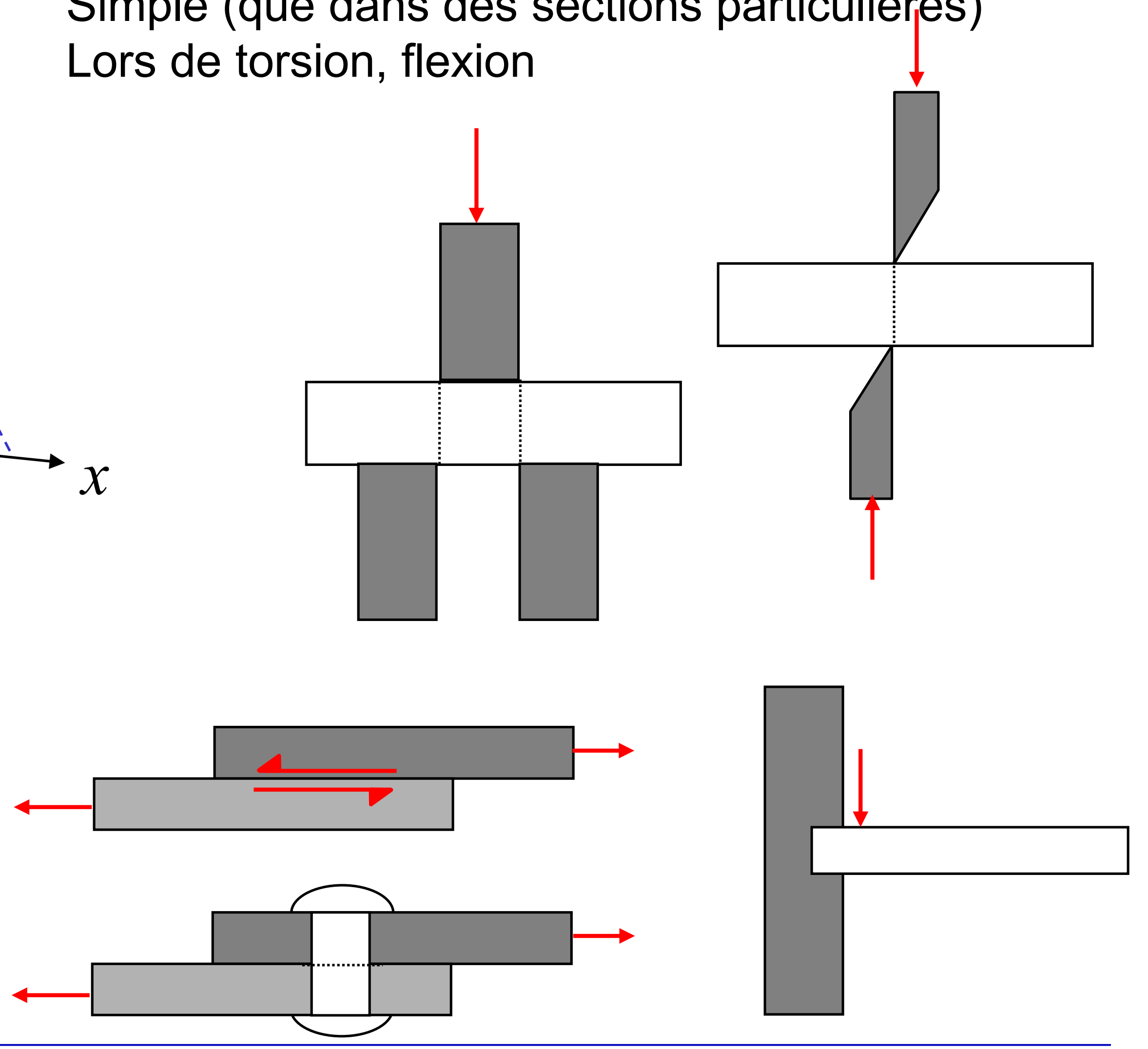
pierre-etienne.bourban@epfl.ch

Cisaillement simple

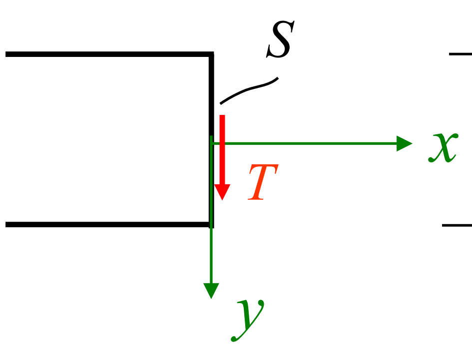
Torseur se réduit à $\vec{T}$

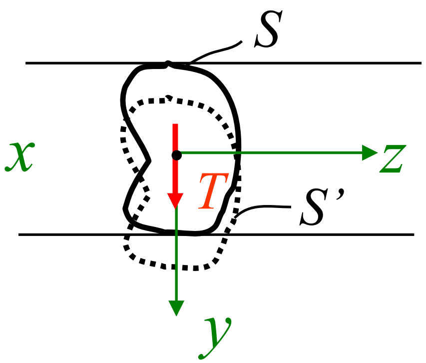
- Simple (que dans des sections particulières)
- Lors de torsion, flexion





Déformation

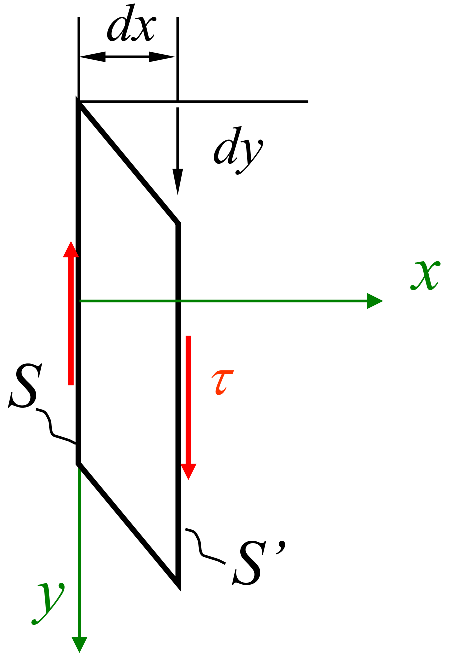




H *S' se déduit de S par translation dans la direction de* $\vec{T}$

$\Rightarrow$ *pas de rôle des axes principaux*

$\Rightarrow$ *choisir* G_y *tel que* $\vec{T} = T_y = T \quad , \quad T_z = 0$



$$T_y = \int \tau_y dS \qquad \text{autres} = 0$$

$$\tau_y = \frac{T}{S}$$

$$\frac{dy}{dx} = \gamma \text{ angle de glissement}$$

$$dy = \frac{1}{G} dx \cdot \tau$$

$G =$ module de glissement, de cisaillement

Energie de déformation en cisaillement

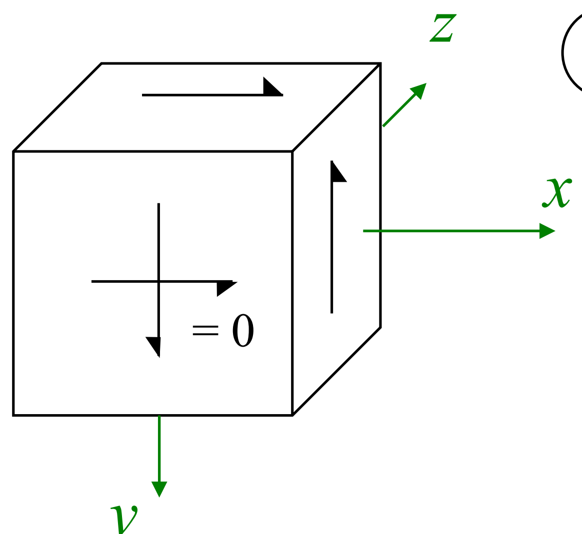
$$dU = \frac{1}{2}\, force \times déplacement$$

$$\frac{dU}{dV} = u$$

$$u = \frac{1}{2} G \gamma^2 = \frac{\tau \cdot \gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G}$$

pierre-etienne.bourban@epfl.ch

Etat de contraintes



(H) $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$ et $\tau = 0$ sur les faces $\perp$ à z

$\Rightarrow$ Mo_z est un axe principal

$\Rightarrow$ état bidimensionnel = une contrainte principale est nulle

$\Rightarrow$ $\tau_x = \tau$

$\Rightarrow$ $\tau_y = -\tau$

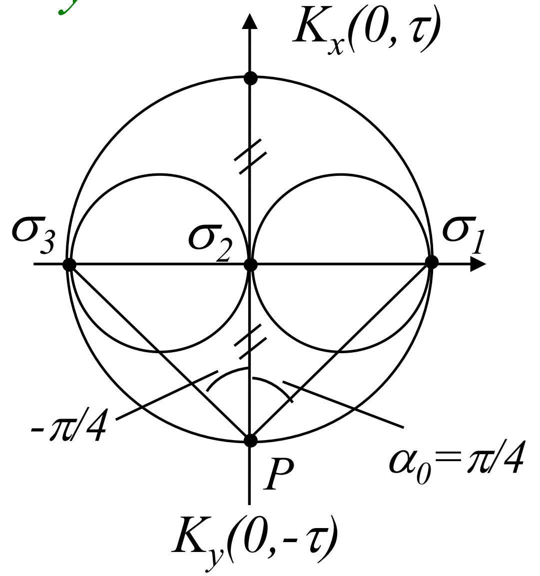
Cercle de Mohr fondamental donné par $K_x(0,\tau)$, $K_y(0,-\tau)$

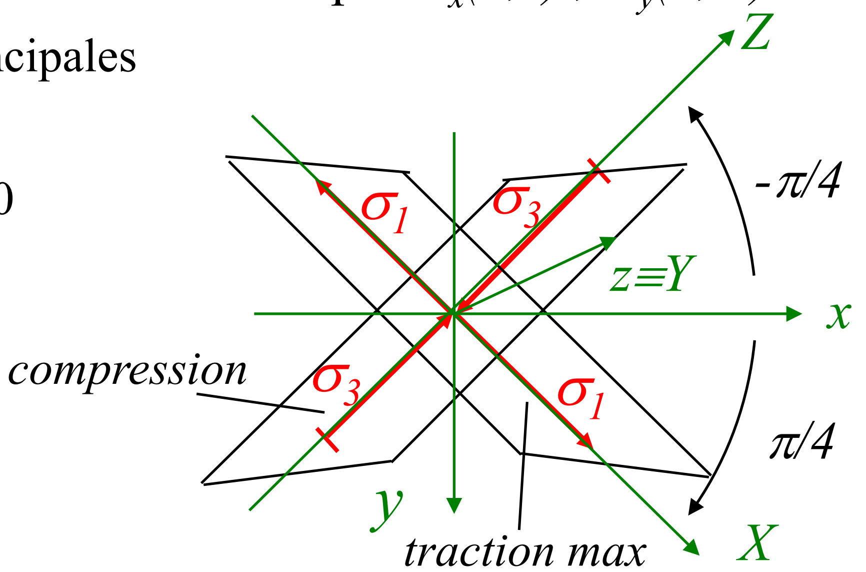
$\Rightarrow$ Contraintes principales

$$\sigma_1 = +\tau$$

$$\sigma_2 = \sigma_z = 0$$

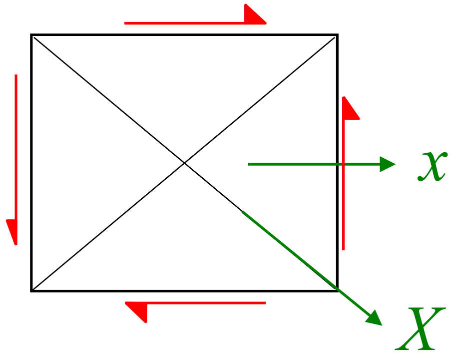
$$\sigma_3 = -\tau$$





pierre-etienne.bourban@epfl.ch

G = E/2(1+ν)



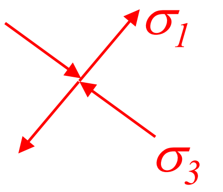
- $u = \dfrac{\tau^2}{2G}$ (1)
- Axes principaux X, Y

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1\sigma_1 + \varepsilon_3\sigma_3\right) \qquad \sigma_1 = \tau, \quad \sigma_3 = -\tau$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \nu\sigma_3\right) = \frac{\tau}{E}(1+\nu)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \nu\sigma_1\right) = -\frac{\tau}{E}(1+\nu)$$

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{\tau^2}{E}(1+\nu) + \frac{\tau^2}{E}(1+\nu)\right) \qquad (2)$$



- (1) et (2)

$$\frac{\tau^2}{2G} = \frac{\tau^2}{E}(1+\nu)$$

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

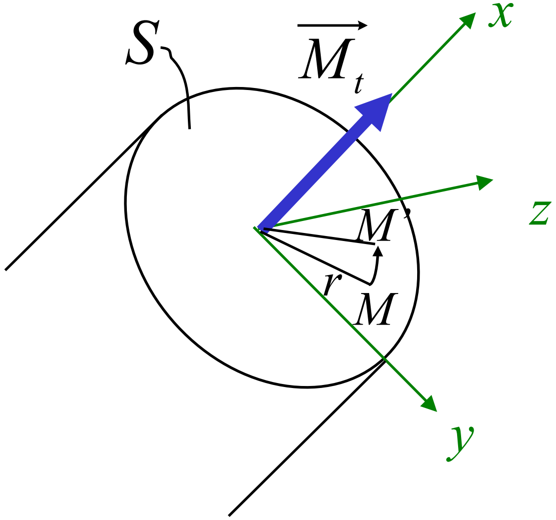
Torsion circulaire

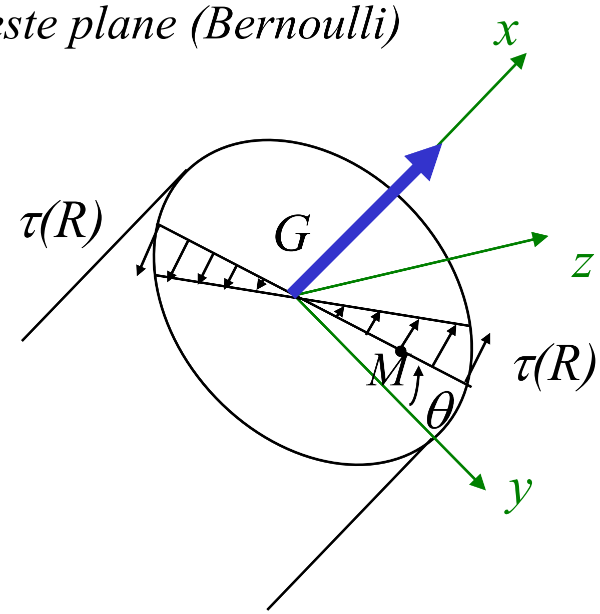
Le torseur se réduit à $M_t \perp$ à S

Calcul facile que si S est circulaire

H

- *S' de S par rotation (≠ section rectangulaire)*
- *S' reste plane (Bernoulli)*





- *S' reste dans le plan de S ⇒ σ = 0*
- *M se déplace en M' cercle r :*

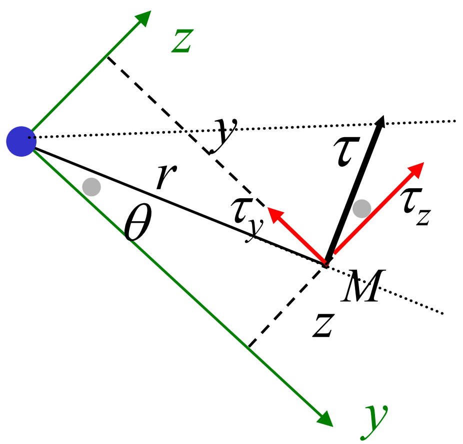
$\rightarrow \tau \propto r$ et $\perp GM$

$\rightarrow \tau = K\,r$

$$M_t = \int_S \left(\tau_z y - \tau_y z\right) dS$$

pierre-etienne.bourban@epfl.ch

Torsion circulaire



$$M_t = \int_S \left(\tau_z y - \tau_y z\right) dS$$

Coordonées polaires $y = r\ \cos\theta$

$z = r\ \sin\theta$

$$\tau_y = -\tau \sin\theta = -K\, r \sin\theta$$
$$\tau_z = \quad \tau \cos\theta = K\, r \cos\theta$$
$$dS = r\, d\theta\, dr$$

$$M_t = K \int_S \left(r\cos\theta \cdot r\cos\theta + r\sin\theta \cdot r\sin\theta\right) dS$$

$$= K \int_S r^2 \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) dS = K \underbrace{\int_S r^2 dS}_{=I_P} = K \cdot I_P \Rightarrow K = \frac{M_t}{I_P}$$

$$\boxed{\tau = \frac{M_t}{I_P} \cdot r}$$

pierre-etienne.bourban@epfl.ch

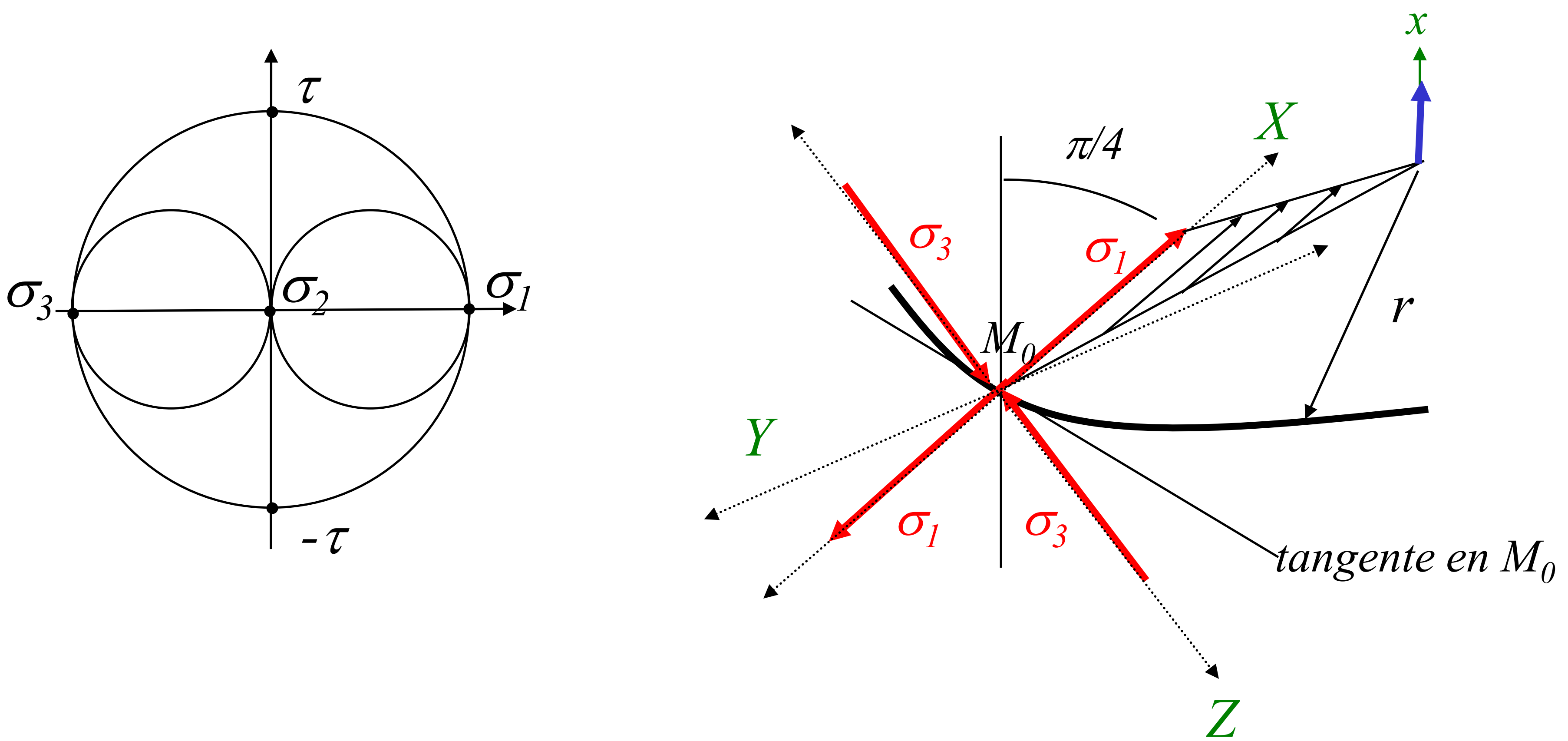
L'état de contrainte de la torsion est le cisaillement, $\tau = f(r)$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_P} \cdot R_{\max}$$

S circulaire $\Rightarrow$ $$I_P = I_x + I_y = \frac{\pi D^4}{64} + \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi R^4}{2}$$

pierre-etienne.bourban@epfl.ch

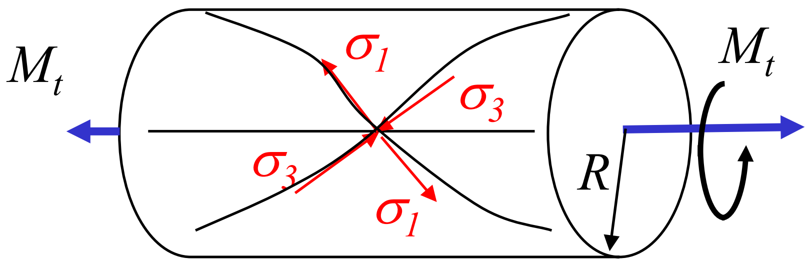
Etat de contraintes



pierre-etienne.bourban@epfl.ch

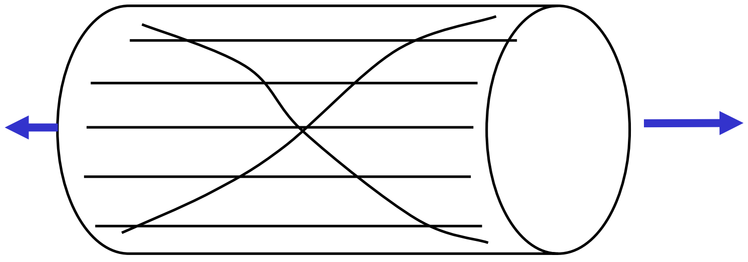
Les isostatiques

les trajectoires des contraintes principales,
les lignes tangentes aux contraintes principales



En torsion ≡ hélices à 45°

La déformation allonge les hélices selon σ_1 (traction) et les raccourcit selon σ_3 (compression)



En traction

Isostatiques ≡ génératrices du cylindre et les trajectoires des τ sont les lignes de Lueder à 45°

Déformation

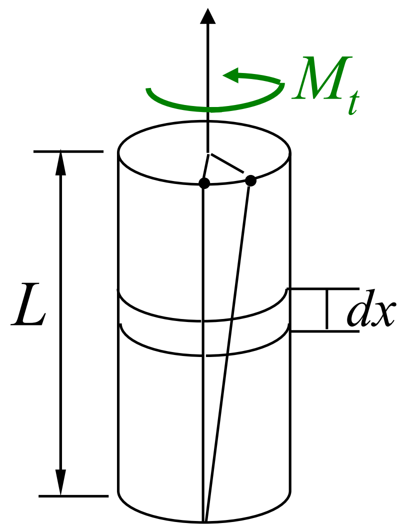
$$BB' = r d\theta \quad et \quad BB' = \gamma dx$$

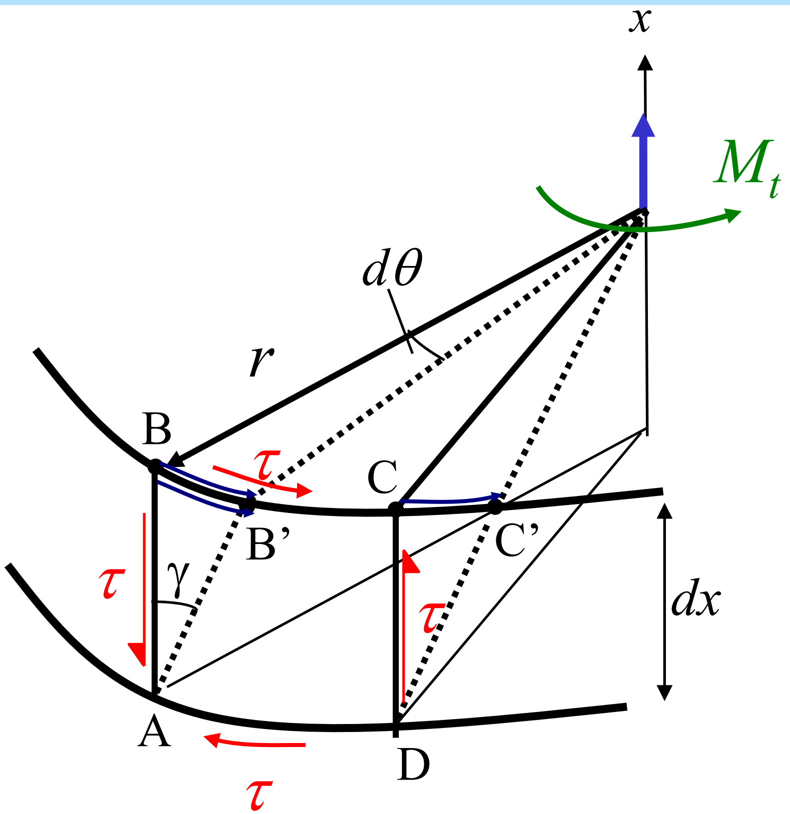
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\gamma}{r}$$

comme $\gamma = \frac{\tau}{G}$

et $\tau = \frac{M_t}{I_P} r$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{M_t}{G \cdot I_P}$$





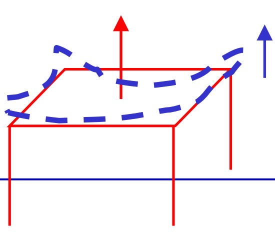
si M_t est constant sur L

si la section est constante sur L

$$\theta = \int_0^L \frac{M_t}{G \cdot I_P} dx = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_P}$$

pour calculer θ mais aussi pour déterminer le module G

! *ssi torsion circulaire, sinon*



pierre-etienne.bourban@epfl.ch

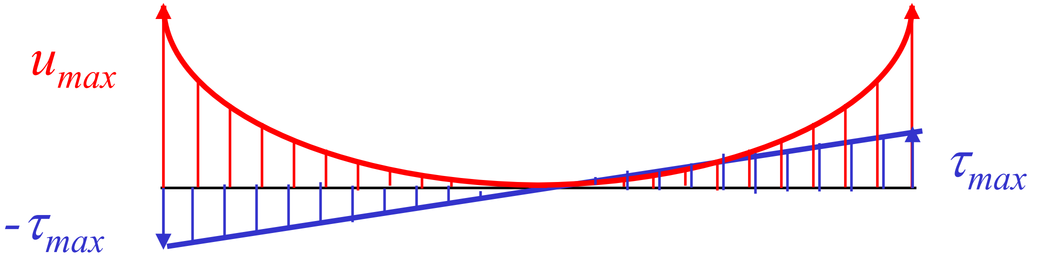
Energie de déformation

- $$dU = \frac{1}{2} M_t \cdot \theta$$

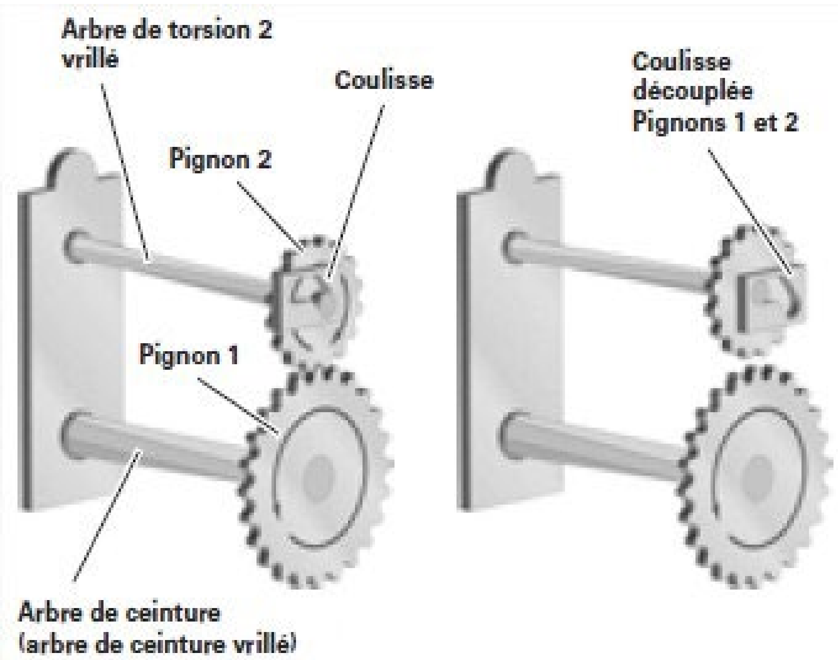
$$dU = \frac{M_t^{\,2}}{2 \cdot G \cdot I_P} dx$$

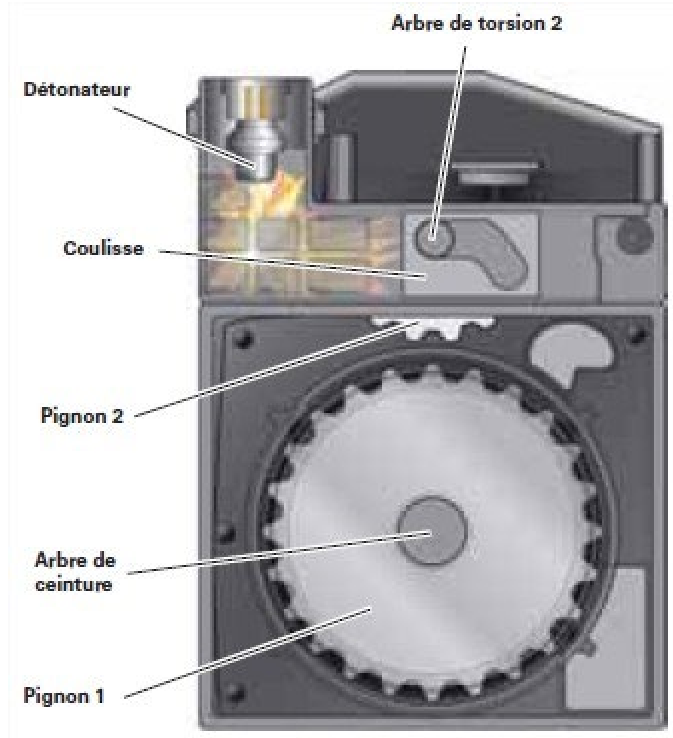
$$\text{intégrer} \quad \text{sur} \quad L \quad \rightarrow \quad U = \frac{M_t^{\,2} L}{2 \cdot G \cdot I_P}$$

- $$u = \frac{1}{2} \tau \, \gamma = \frac{\tau^2}{2G} = \left(\frac{\tau}{\tau_{\max}} \right)^2 \cdot \frac{\tau_{\max}^{\;\;2}}{2G} = \left(\frac{r}{R} \right)^2 \cdot u_{\max}$$



Energie de déformation





pierre-etienne.bourban@epfl.ch

Exo: Ressorts hélicoïdaux à fil rond

L'exemple d'un ressort de compression est traité ici. Le même raisonnement peut être fait pour un ressort d'extension.

- D: diamètre d'enroulement de l'hélice moyenne
- d: diamètre du fil
- n: nombre de spires utiles capables de se déformer
- h_0: hauteur utile à vide

Habituellement $D \approx 6d$

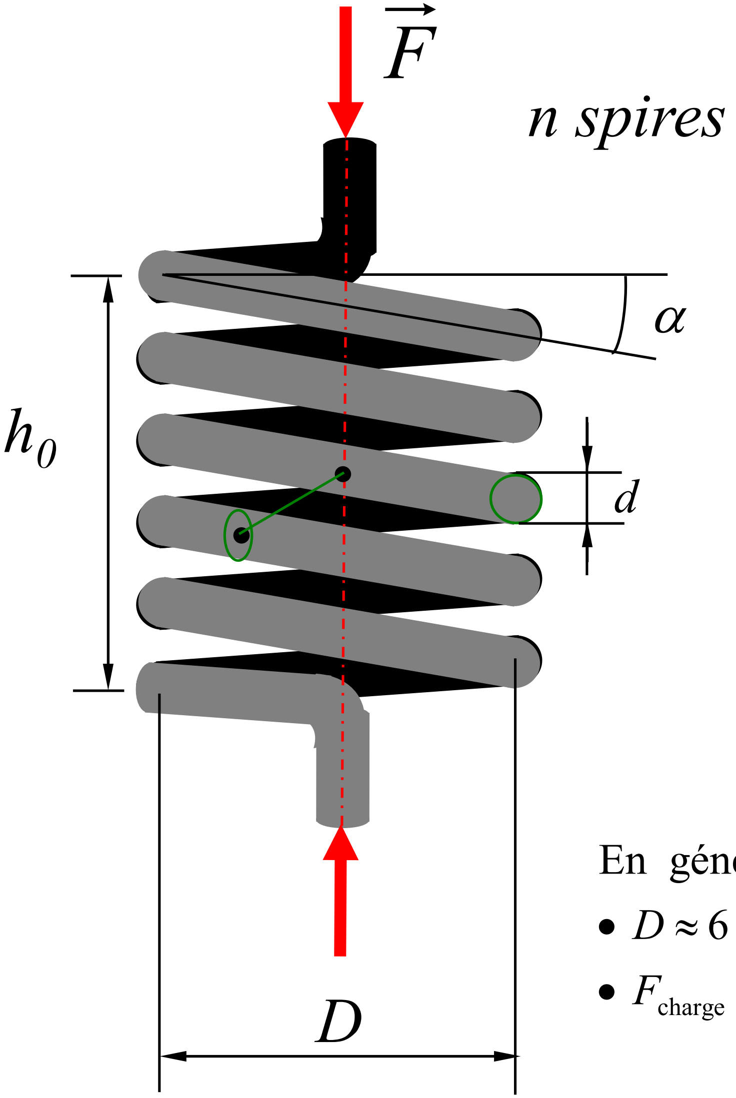
$$F_{charge\ axiale} = k \bullet f$$

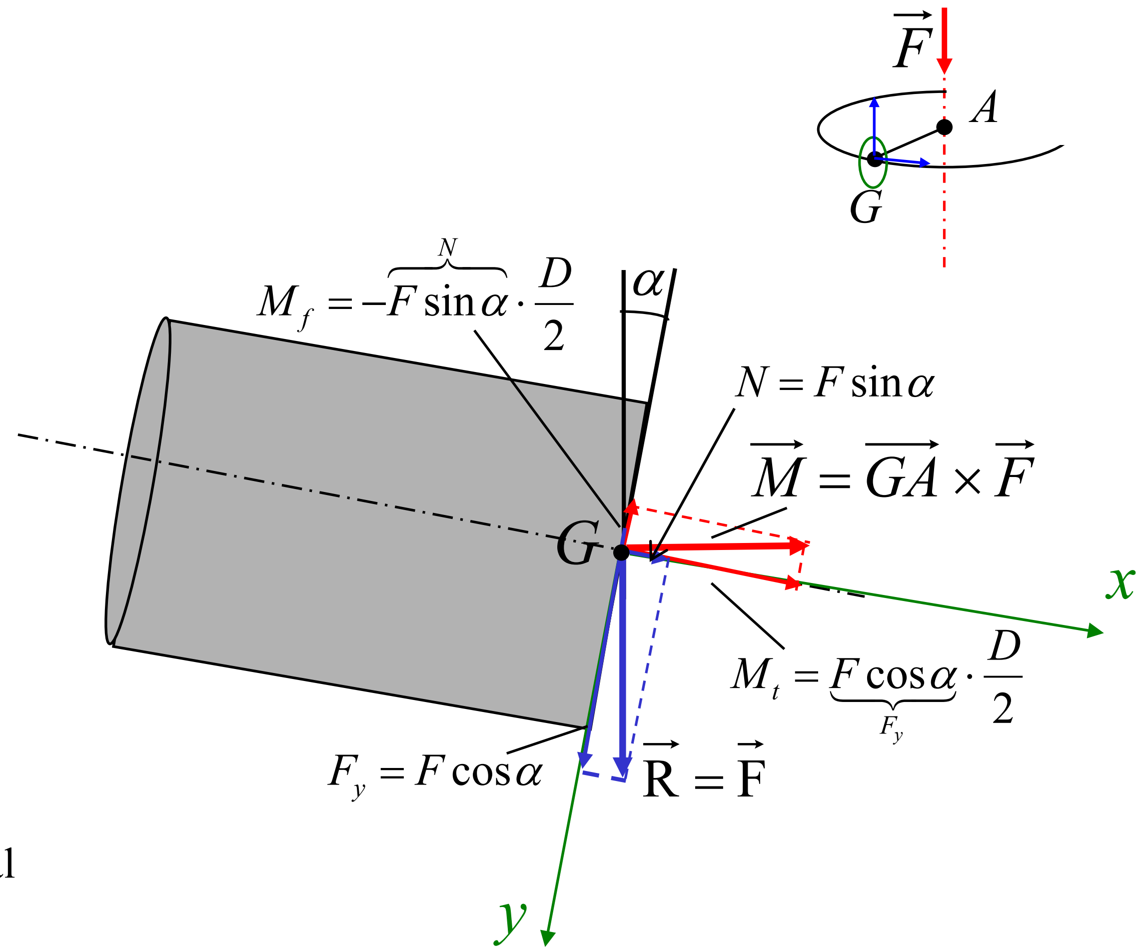
k: rigidité du ressort en $[N/mm]$

f: flèche h_0-h (h, hauteur sous charge)

pierre-etienne.bourban@epfl.ch

Ressorts hélicoïdaux à fil rond





En général

- $D \approx 6 \cdot d$
- $F_{\text{charge axiale}} \approx \underbrace{k}_{\substack{\text{rigidité} \\ \text{du ressort}}} \cdot \underbrace{f}_{=(h_o - h)}$

Normal $\Rightarrow$ $N = F\sin\alpha \qquad \approx 0$

Tangent $\Rightarrow$ $F_y = F\cos\alpha \qquad \approx F$

$$M_t = F\cos\alpha\cdot\frac{D}{2} \qquad \approx M_t \approx F\frac{D}{2}$$

$$M_f = -F\sin\alpha\cdot\frac{D}{2} \qquad \approx 0$$

On néglige N et M_f devant F_y et M_t

En général α est faible , *6* à *8* ^{o}

$$\Rightarrow \sin\alpha \approx 0$$

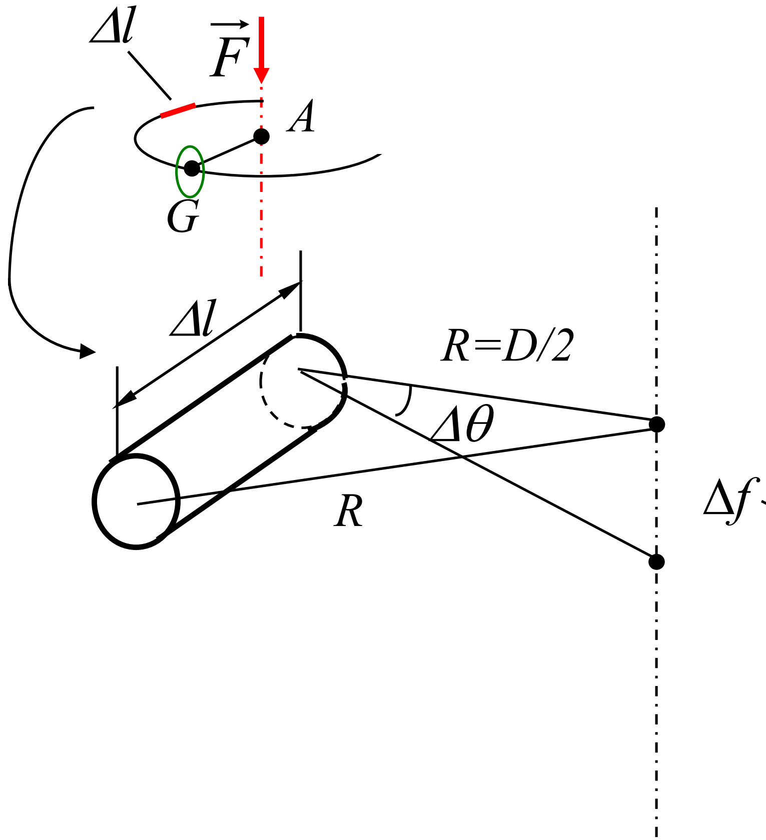
$$\Rightarrow \cos\alpha \approx 1$$

Contraintes tangentielles

- Effort tranchant $\tau_1 = \dfrac{F_y}{S} = \dfrac{4\cdot F}{\pi\cdot d^2}$
- $M_t \rightarrow \tau_2 = \dfrac{M_t\cdot r}{I_P} = \dfrac{8\cdot F\cdot D}{\pi\cdot d^3}$

Si $D \approx 6d$ on voit que $\tau_1 \approx \dfrac{\tau_2}{12}$

on calcule un ressort EN TORSION $\Rightarrow \tau_t = \dfrac{8\cdot F\cdot D}{\pi\cdot d^3}$



H

Δl petit donc supposé droit

Déformé par M_t

$$\Delta\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_P} \cdot \Delta l$$

$$\Delta\theta = \frac{F \cdot R}{G \cdot I_P} \cdot \Delta l$$

$$\Delta f \approx R \cdot \Delta\theta$$

$$= \frac{F \cdot R^2}{G \cdot I_P} \Delta l$$

$$= \frac{F \cdot D^2 \cdot 32}{4 \cdot G \cdot \pi \cdot d^4} \Delta l$$

$$F = k \cdot f$$

$$k = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta f = \dfrac{8 \cdot F \cdot D^2}{\pi \cdot G \cdot d^4} \Delta l \\ \int \quad \text{sur} \quad n \cdot \pi \cdot D \end{array}\right\}$$

$$f = n \frac{8\, F\, D^3}{G\, d^4}$$

$$G\uparrow, d\uparrow \Rightarrow k\uparrow$$

$$D\downarrow \qquad \Rightarrow k\uparrow$$

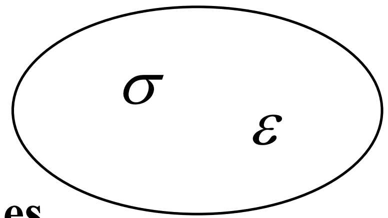
pierre-etienne.bourban@epfl.ch

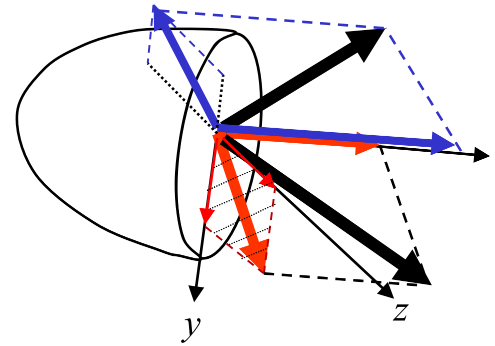
Résistance des matériaux

pierre-etienne.bourban@epfl.ch

Introduction

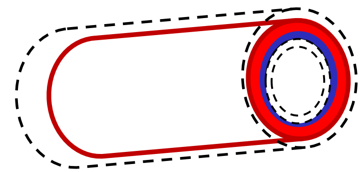
Définitions, hypothèses
Torseurs des efforts intérieurs
Principe d'équivalence
Moments d'une aire, moments statiques, moments d'inertie

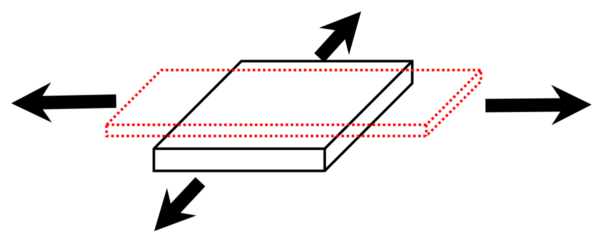




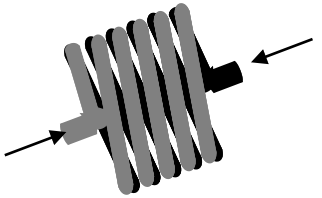
Traction et Compression

Bernoulli, St-Venant
Variation de températures
Pression interne
Force centrifuge
Influence du poids propre
Etat de contraintes
Cercle de Mohr
Energie de déformation
Etat bidimensionnel des contraintes
Axes et cercles de Mohr principaux





Résistance des matériaux



Cisaillement

Etat de contraintes, énergie de déformation

Torsion circulaire

Etat de contraintes, isostatiques, énergie de déformation

Flexion

Rappels de statique, hyperstatique

Flexion simple, états de contraintes, déformations

Méthode des équations différentielles, déformées

Flexion combinée

Energies de déformation élastique

Critères de performance

Concentrations de contraintes

Les limites de l'élasticité

Etudes de cas :

Rails, sertissage à chaud, corde d'escalade, réservoirs sous pression, goupilles, chaine, vis arbres creux, ressorts hélicoïdaux, poutres, ponts, flambage, etc….

pierre-etienne.bourban@epfl.ch

Agenda

2025
MSE 205 Résistance des Matériaux
pierre-etienne.bourban@epfl.ch

jours	mois		
17	février	Intro , moments d'inertie	exo1: Statique
24	février	Traction, Hyperstatique	exo2: Moments géométriques
3	mars	Sertissagge… Bidim	exo3: Cordes, réservoirs pressurisés
10	mars	Cisaillement et torsion	exo4: Goupilles, joints, agrafes
17	mars	Torsion et Ressorts	exo5: Arbres creux , Révision et questions
24	mars	Examen A (1/3)	
31	mars	Flexion, NTM	Correction Exa, exo6: courbures, potence
7	avril	Cisaillement, Déformée,Superposition, Hyperstatique	exo7: Moments max/min
14	avril	P. non prismatique, Energie, Castigliano	exo 8.1: Flêches
21	Pâques		
28	avril	Révision Flexion, exo 8.2	exo9 Superposition
5	mai	Concentration, Flambage,Rupture	exo10 : Flambages
12	mai	Questions ouvertes et prépa examen	
19	mai	Examen B (2/3)	
26	mai	Feedbacks	

Lundi 15h15 cours et exo
Documents sur Moodle
Examens écrits A et B

24 mars Examen écrit A, 15h15-17h en CO3

Examen sans document avec une calculatrice.