Mercredi 28 Mai 2025: Thermique

- variation de température (Joseph Fourier 1768-1830)
- chaleur spécifique, conductivité thermique et diffusivité thermique
- résistances thermiques et d’interface
- principe du double/triple vitrage
- dilatation thermique et contraintes thermomécaniques

Presque tous les matériaux sont exposés à des **variations de température**, plus ou moins importantes, voire extrêmes.

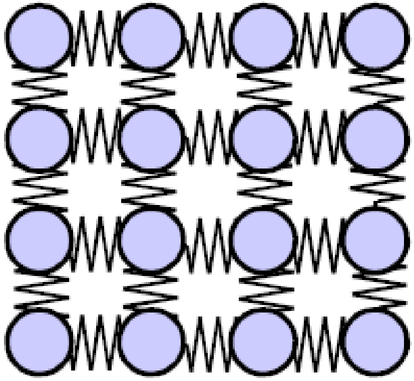
Cours No

Chaleur spécifique

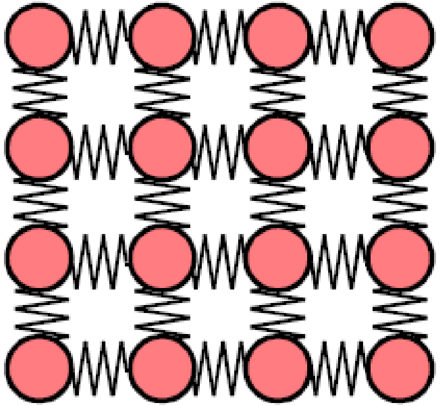
La **chaleur spécifique** (à pression constante) c_p est la quantité d'énergie ΔH qu'il faut apporter à un corps de masse unité pour augmenter sa température de ΔT = 1℃.

$$\boxed{c_p = \frac{1}{m}\frac{dH}{dT} \quad [J\,K^{-1}Kg^{-1}]} \qquad \Delta H = mc_p\Delta T$$

A la température du 0 absolu (0 K ou -273.16℃), les atomes ne vibrent pas.



En fournissant de l'énergie au système, la vibration des atomes augmente, et donc la température.

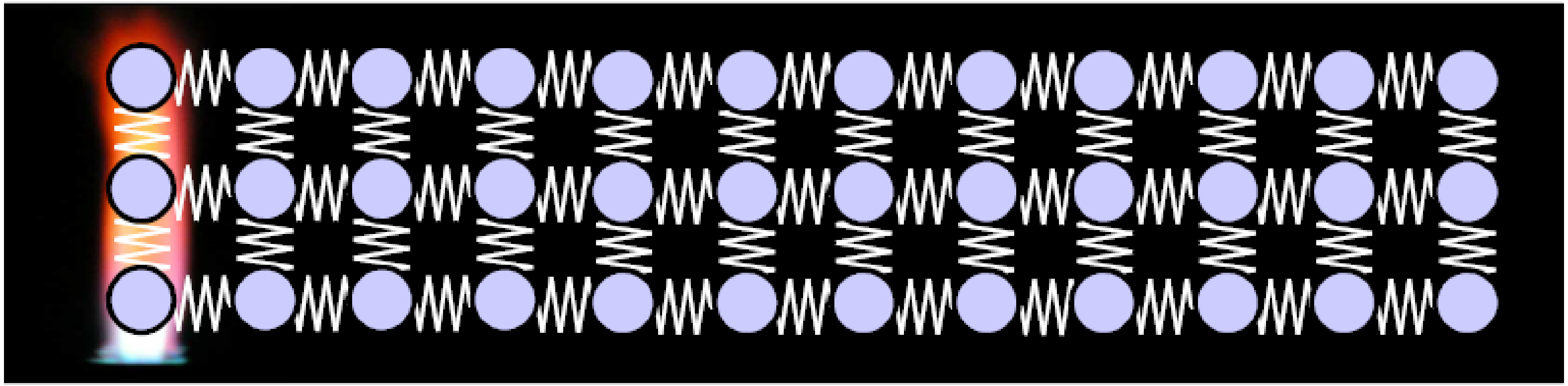


Ex: l'eau Cp =1 cal/g = 4.18 J /g.

On définit aussi la chaleur spécifique volumique Cp = ρc_p en J/Km3

Diffusion de la chaleur: seconde loi de Fourrier

On chauffe un matériau à gauche: que se passe-t-il ?



$\longrightarrow z$

L'excitation des atomes (molécules) est transmise de voisins en voisins: il y a propagation ou **diffusion de la chaleur**. En plus de ce mode de propagation, les métaux transmettent aussi la chaleur grâce aux e^- qui baignent les ions.

Le **flux de chaleur j_T** (ici de gauche à droite) obéit à la relation:

$$\boxed{j_T = -k \frac{dT}{dz} \quad [\mathrm{W\ m^{-2}}]}$$

où k est la **conductibilité thermique** du matériau $[\mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}]$

La diffusion de la chaleur dans les métaux est élevée car la conduction se fait par les électrons et les phonons (vibrations du réseau atomique)

Diffusion de la chaleur: de l'isolant thermique au conducteur thermique

Pourquoi dans un sauna à 90℃ on ne se brûle pas les pi eds, alors qu'une théière en argent à cette température n'est pas touchable?

Bois

$k = 0.15\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$

$\rho c_p = 0.5\times10^{6}\ \mathrm{Jm^{-3}K^{-1}}$

Argent

$k = 418\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$

$\rho c_p = 2.4\times10^{6}\ \mathrm{Jm^{-3}K^{-1}}$

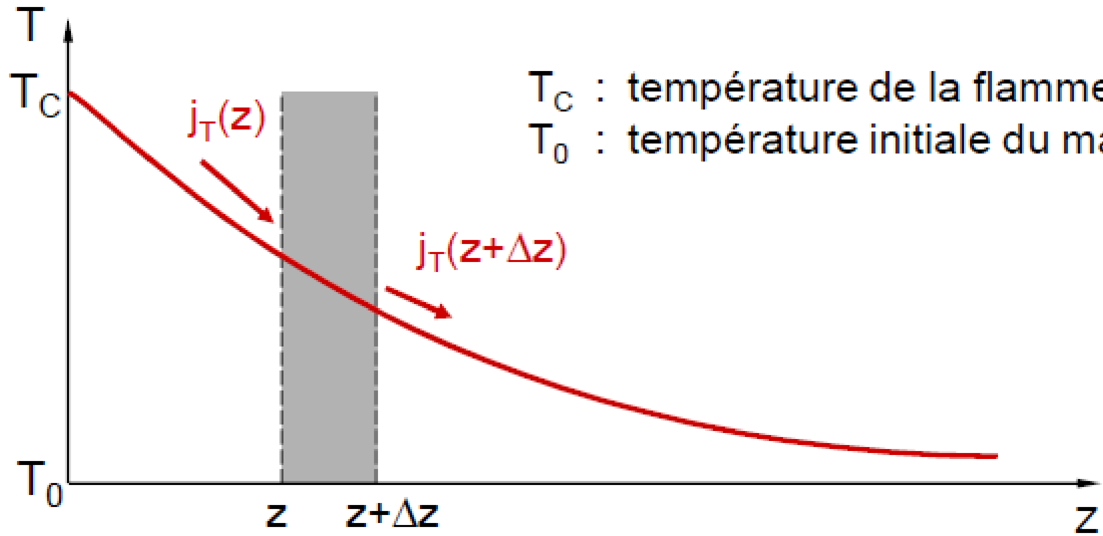
Aérogel

$k = 0.012\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$

$\rho c_p = 1.6\times10^{3}\ \mathrm{Jm^{-3}K^{-1}}$

Diffusion de la chaleur: première loi de Fourrier

Ainsi, le profil de température $T(z)$ à un instant donné a l'allure:



T_C : température de la flamme
T_0 : température initiale du matériau

Pour une section du matériau S, d'épaisseur Δz, la différence entre flux de chaleur entrant et sortant fait varier son énergie (enthalpie) H:

$$-\left(j_T(z+\Delta z) - j_T(z)\right)S = \frac{dH}{dt}$$

avec $H = h\,\rho(S\Delta z)$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_T}{\partial z} = k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}$$

sans transformations de phases

$h = c_p T$: enthalpie par unité de masse en J/kg
c_p : chaleur spécifique en J/KgK

Diffusion de la chaleur: première loi de Fourrier

En divisant par ρc_p, on obtient ainsi **l'équation de la chaleur**:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}$$

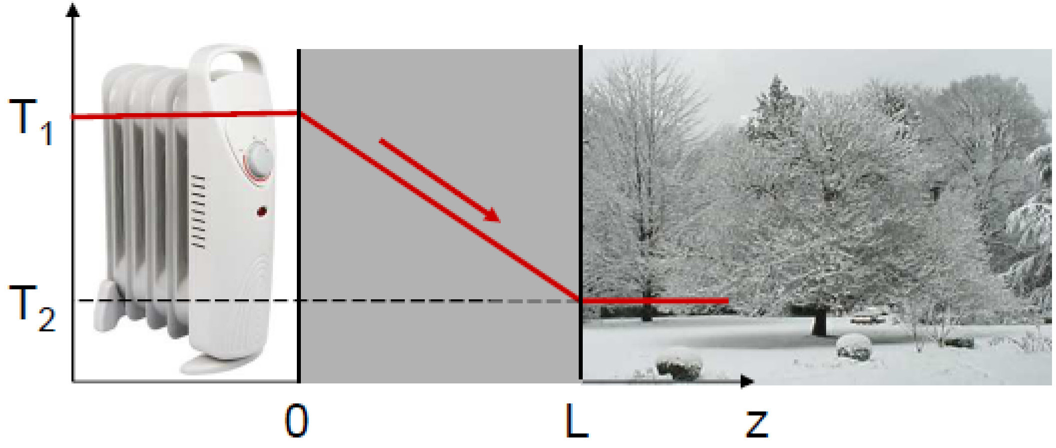
$$T = T(x,y,z,t) = T(M,t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T$$

où $a = \dfrac{k}{\rho c_p}$ est la **diffusivité thermique** du matériau $[m^2 s^{-1}]$

Solution stationnaire: $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0 \longrightarrow \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \longrightarrow T = T_1 + (T_2 - T_1)\,\dfrac{z}{L}$

$$j_T = k\,\frac{T_1 - T_2}{L}$$



1

Conductivité thermique et électrique: loi de Wiedemann-Franz pour les métaux

Material	c_p (J/kg-K)[a]	α_l [(°C)$^{-1}$ × 10^{-6}][b]	k (W/m-K)[c]	L [Ω-W/(K)^2 × 10^{-8}]
		Metals		
Aluminum	900	23.6	247	2.20
Copper	386	17.0	398	2.25
Gold	128	14.2	315	2.50
Iron	448	11.8	80	2.71
Nickel	443	13.3	90	2.08
Silver	235	19.7	428	2.13
Tungsten	138	4.5	178	3.20
1025 Steel	486	12.0	51.9	—
316 Stainless steel	502	16.0	15.9	—
Brass (70Cu-30Zn)	375	20.0	120	—
Kovar (54Fe-29Ni-17Co)	460	5.1	17	2.80
Invar (64Fe-36Ni)	500	1.6	10	2.75
Super Invar (63Fe-32Ni-5Co)	500	0.72	10	2.68

Pour les métaux, la conduction se fait par les électrons libres et le rapport des conductivités thermique k et électrique σ_{el} reste proportionnel à T (en K):

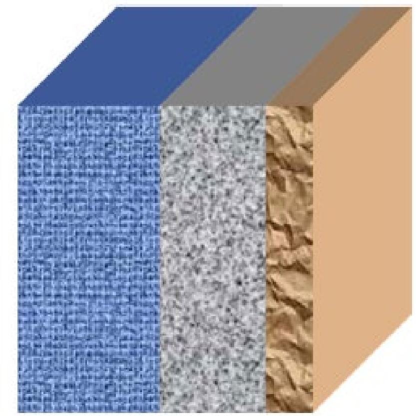
$k/\sigma_{el} = LT$, L = contante de Lorentz en $\frac{W}{mK}\frac{m}{\Omega}\frac{1}{K} = W\Omega K^{-2}$

$L \approx 2.4\ 10^{-8}\ W\Omega K^{-2}$

Résistances thermiques

Le flux de chaleur est constant à travers un ensemble de couches isolantes en régime établi (= permanent = stationnaire donc T(M,t) = T(M)).

Ex. pertes thermiques à travers le mur d'une maison.
3 matériaux i de conductivité thermique ki et d'épaisseur di.



$$\text{flux} = j_T = k\ \text{grad}T\ ;\ j_T = k_i \frac{\Delta T_i}{d_i} \quad \text{pour tout i}$$

$$\Delta T_i = \frac{d_i}{k_i} j_T = R_i\ j_T \quad \text{avec } R_i \text{ en m}^2\text{K/W}$$

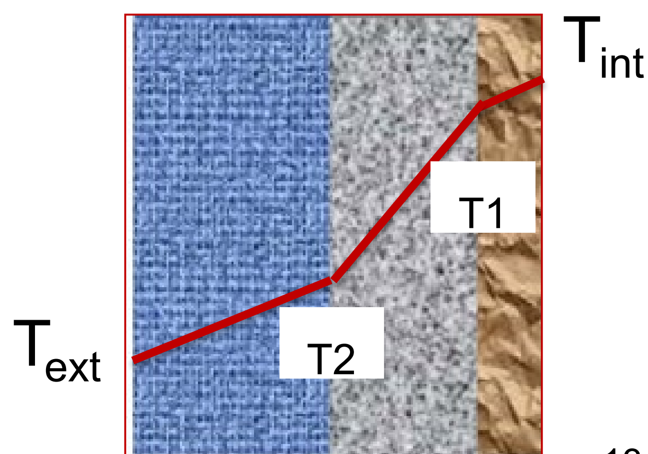
$$\text{Tint-Tex} = (\text{Tint -T1}) + (\text{T1-T2}) + (\text{T2-Text})$$

$$\text{Tint-Tex} = (\text{R1+R2+R3})\, j_T = R_{tot}\, j_T$$

3 résistances thermiques Ri = d_i/k_i en série

Pertes de chaleur à travers une surface S:

$$\text{Pertes} = S j_T = S\frac{\Delta T_i}{R_i} \quad \text{en W=J/s}$$



Résistances thermiques

Exemple d'un produit commercial d'isolation thermique de 120 mm d'épais.

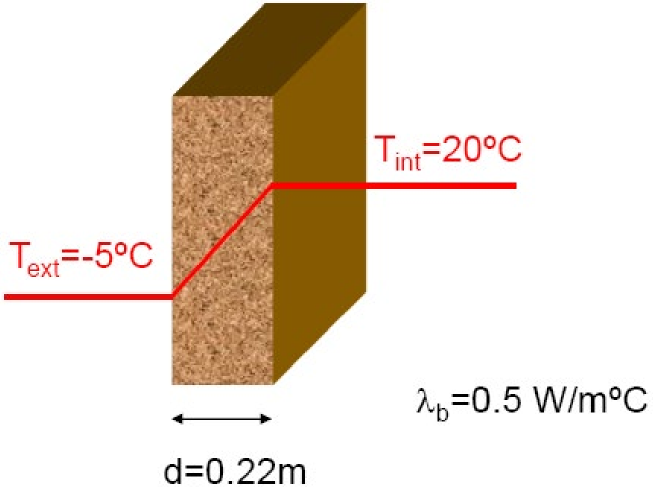
λ_0 = 0.022 W/mK et d = 120 mm

$$R = \frac{d}{\lambda_0} = \frac{0.12}{0.022} = 5.45\ \mathrm{m^2K/W}$$

Résistance thermique d'un mur uniforme (i=1)

flux de chaleur passant à travers un mur de 10 m2 de surface en terre cuite de 22 cm d'épaisseur (k1= 0.5 W/m°C) dans le cas stationnaire connaissant les températures des surfaces extérieures.

$$\text{pertes} = Sj_T = S\frac{\Delta T_1}{R_1} = 10\left(20-(-5)\right)\frac{0.5}{0.22} = 568.2 \text{ W}$$



On remplace le mur par de la laine de verre (k_{la} = 0.05 W/m°C). Quelle épaisseur, d_{la}, donnera les mêmes pertes ?

$$\text{pertes} = 568.2 \text{ W} = S\frac{k_{la}}{d_{la}}\Delta T1$$

$$d_{1a} = S\frac{k_{1a}}{\text{pertes}}\Delta T_1 = 0.022 \text{ m} = 2.2 \text{ cm}$$

RQ: si on ajoute ces 2.2 cm de laine de verre au mur de 22 cm, on diminue de moitié les pertes (somme des 2 résistances thermiques de même valeur).

Résistances thermiques d'interface

Le flux de chaleur est constant à travers un ensemble de couches en régime stationnaire (permanent ou établi):

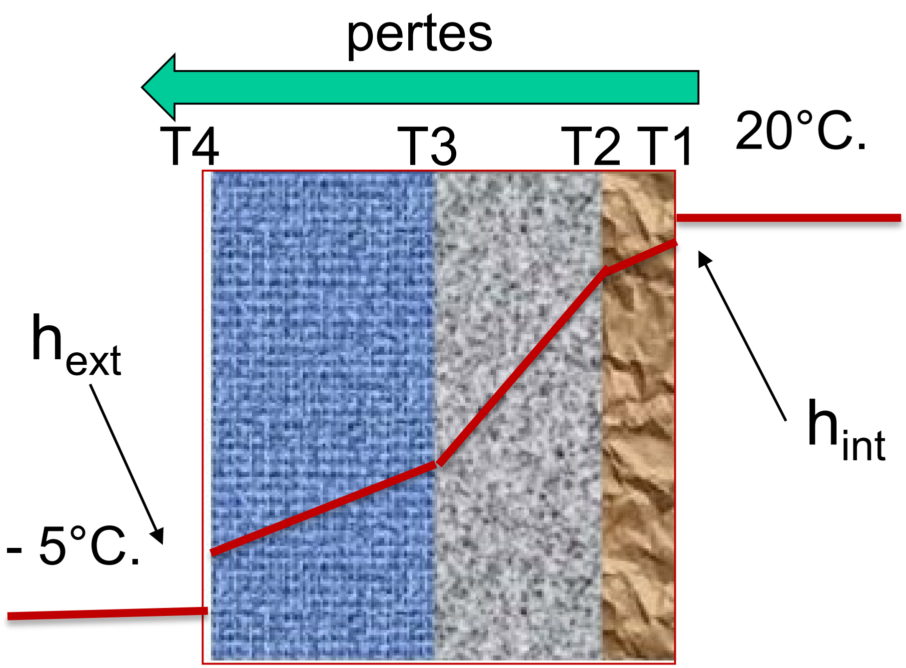
- La température fait des sauts aux surfaces intérieures et extérieures
- La résistance aux surfaces externes vaut 1/hi ou hi est le coefficient d'échange thermique en W/m²K (dû à la convection naturelle le long des parois)
- La résistance thermique globale est la somme des résistances thermiques (couches et interfaces) comme avec des résistances électriques en série.

$$\text{flux} = j_T = k_i \frac{\Delta T_i}{d_i} = h_i \Delta T_i, \ \forall i$$

$$\Delta T_i = \frac{d_i}{k_i} j_T = \frac{j_T}{h_i} \ \text{avec} \ R_i = \frac{d_i}{k_i} = \frac{1}{h_i}$$

$$T_{int} - T_{ext} = R_{tot} j_T$$

$$R_{tot} = \frac{1}{h_{int}} + \sum_{j=1}^{n} R_j + \frac{1}{h_{ext}}$$



Pertes = $j_T S$ en W = J/s

utile pour dimensionner un chauffage domestique.

Double ou triple vitrage

Le flux de chaleur (i.e. les pertes) est diminué en augmentant :

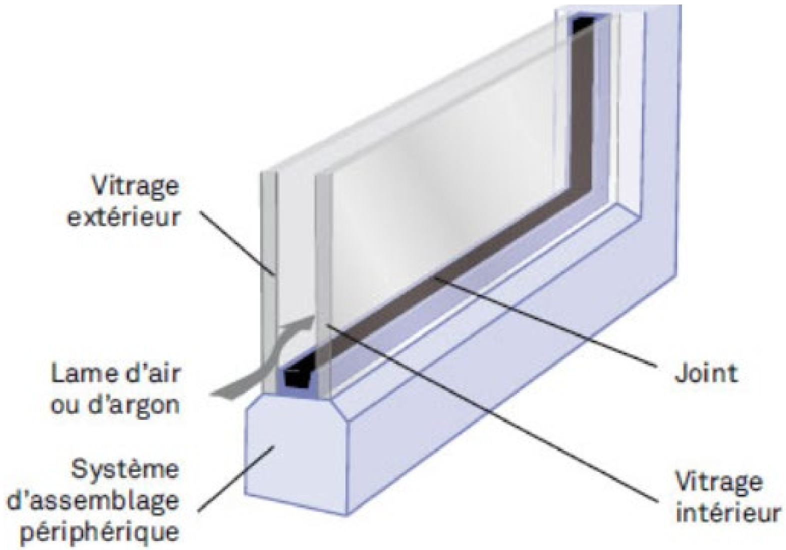
- les résistances thermiques de chaque milieu (air ou Argon avec faible conductivité thermique)
- et les résistances aux interfaces (i.e. diminuer les coefficients d'échange).

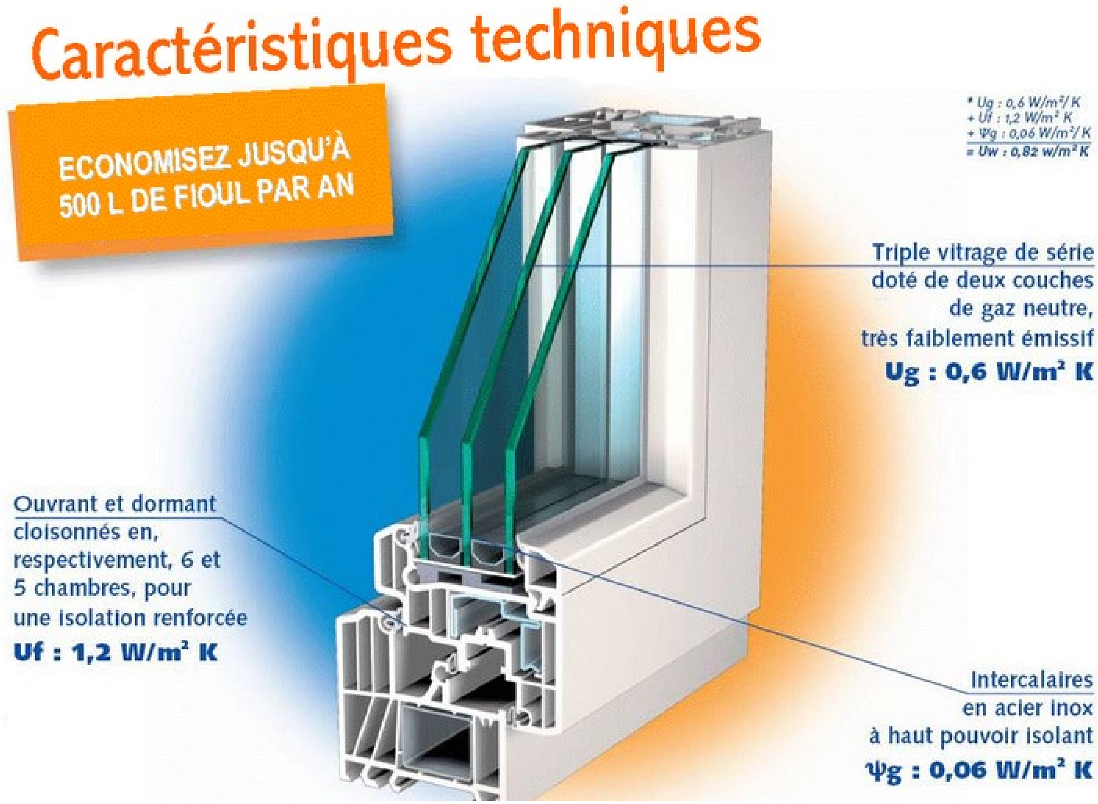
$$R_{tot} = \frac{1}{h_{\text{int}}} + \sum_{j=1}^{n} R_j + \frac{1}{h_{ext}}$$

$$\text{perte} = j_T S = \frac{\Delta T}{R_{tot}} S \quad \text{en W}$$

$K_{air} = 0.025$ W/mK

R et 1/h sont en m^2K/W



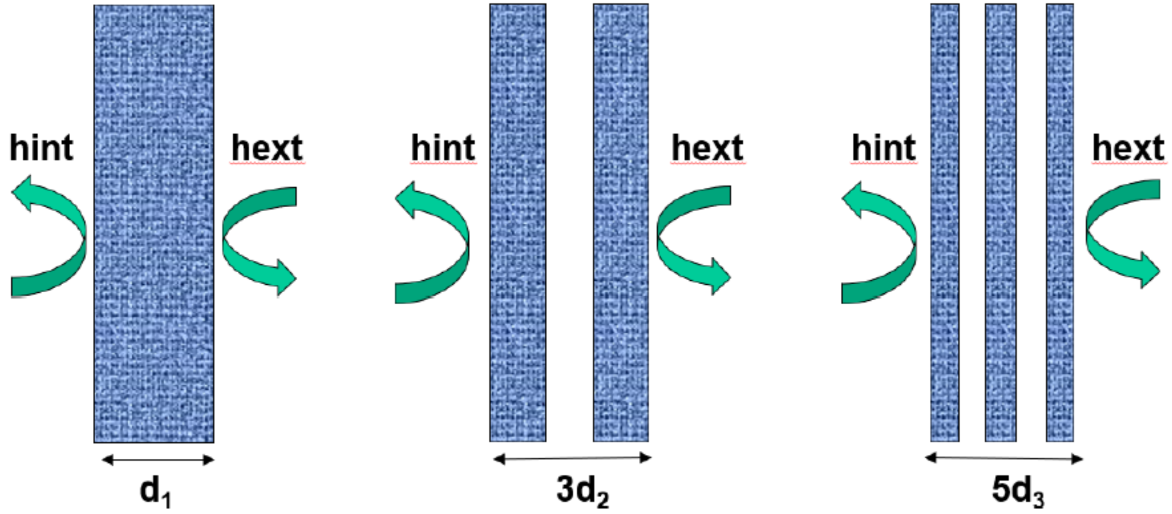


Simple, double ou triple vitrage

$$R_{tot} = \frac{1}{h_{\text{int}}} + \sum_{j=1}^{n} R_j + \frac{1}{h_{ext}}$$

On va maintenant utiliser ce résultat pour calculer la résistance thermique obtenue avec un simple, double et triple vitrage de fenêtre utilisant la même quantité de verre et dans le même environnement. On note k la conductivité du verre et ak la conductivité de l'air avec a < 1. Le double vitrage est fait de 2 épaisseurs de verre et d'une lame d'air toutes trois de même épaisseur, d2. Le triple vitrage est fait de 5 épaisseurs identiques notées d3, trois épaisseurs de verre et deux épaisseurs d'air. De chaque côté des fenêtres, les coefficients d'échange convectif de chaleur en W/m^2K sont notés hint du côté logement et hext du côté extérieur. On rappelle que la résistance thermique de surface vaut 1/h pour une surface avec un coefficient d'échange h.

Simple vitrage d'épaisseur d1, double vitrage d'épaisseur totale 3d2, droite : triple vitrage d'épaisseur totale 5d3.



Simple, double ou triple vitrage

6- Remplir le tableau des résistances thermiques globales des 3 vitrages (formule littérale)

Vitrage	simple	double	triple
Résistance thermique	R1=	R2 =	R3 =

7- Exprimez d2 et d3 en fonction de d1 si on utilise la même quantité de verre dans chaque vitrage.

-
-
-

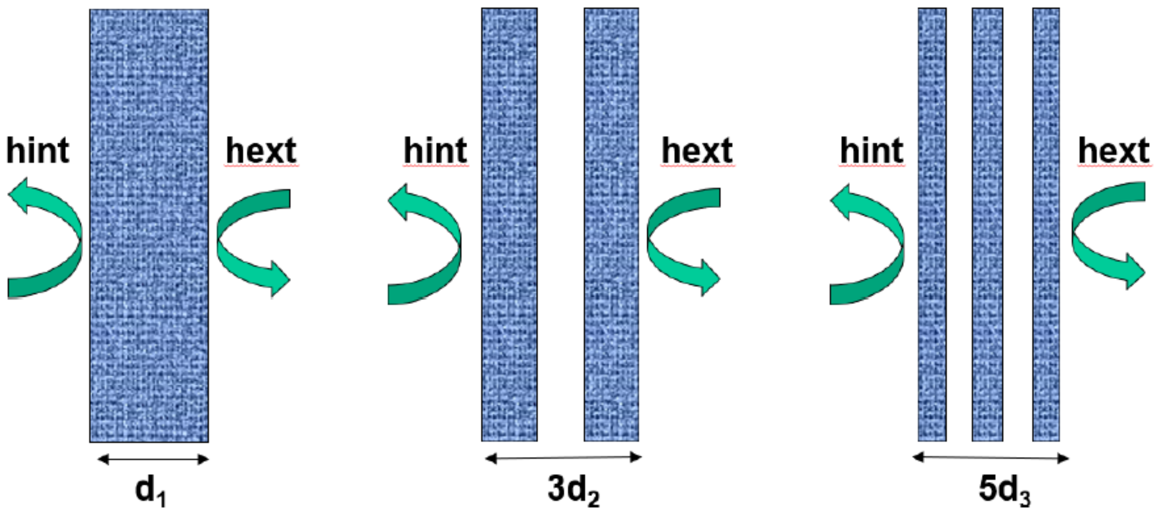
8- Montrer que (R2 - R1) et (R3 - R2) sont bien positifs (gain en résistance thermique donc en performance d'isolation) et donner un minorant de ces deux quantités ($a < 1$).

-
-
-
-
-

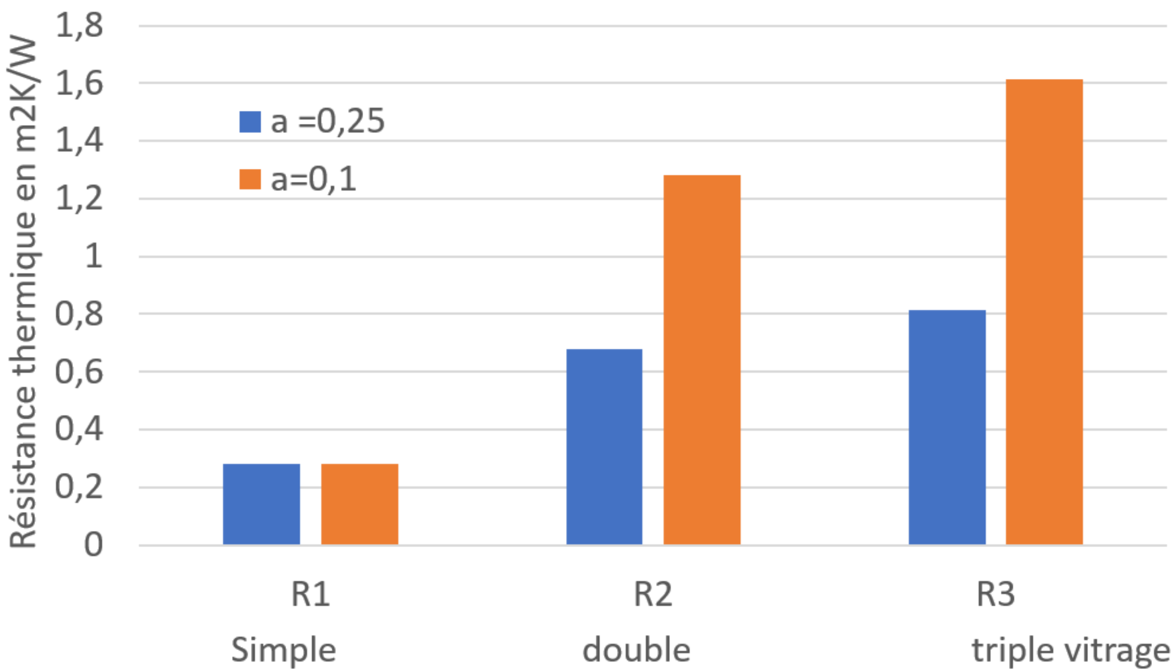
9- Application numérique : Calculer (R3 - R2) avec $d1 = 2$ cm, $k = 0.1$ W/mK et $a = 0.25$

-

Simple, double ou triple vitrage



	a =0,25	a=0,1
R1	0,28	0,28
R2	0,68	1,28
R3	0,813333	1,6133333



Triple vitrage

Dans le système triple vitrage, 3 verres d'épaisseur 1 cm et de conductivité thermique 0.1 W/mK sont utilisés pour emprisonner 2 lames de gaz neutre de coefficient thermique (rapport conductivité sur épaisseur) 0.6 W/m2K comme indiqué dans le descriptif publicitaire.

Conductivité thermique du gaz neutre sachant que l'épaisseur de chaque lame de gaz est de 2.5 cm :

$$h = 0.6\ \mathrm{W/m2K} = \frac{k}{d} \text{ avec } d = 0.025\mathrm{m}$$

$$k = 0.6 \text{ x } 0.025\ \mathrm{W/mK} = 0.015\ \mathrm{W/mK}$$

Résistance thermique globale du triple vitrage notée R :

$$R = \frac{2}{0.6} + 3\frac{0.01}{0.1} = \frac{1}{0.3} + 0.3 = 3.63\ \mathrm{m^2K/W}$$

Pertes en W/m2 de ce vitrage quand il fait 0°C dehors et 20°C à l'intérieur :

$$\mathrm{flux} = j_T = \frac{\Delta T}{R} = \frac{20}{3.63}\ \mathrm{W/m2} = 5.51\ \mathrm{W/m2}$$

Que deviennent ces pertes si on remplace le gaz neutre par de l'air dont la conductivité thermique vaut 0.025 W/mK ?

$$R = 2\frac{0.025}{0.025} + 3\frac{0.01}{0.1} = 2 + 0.3 = 2.3\ \mathrm{m^2K/W}$$

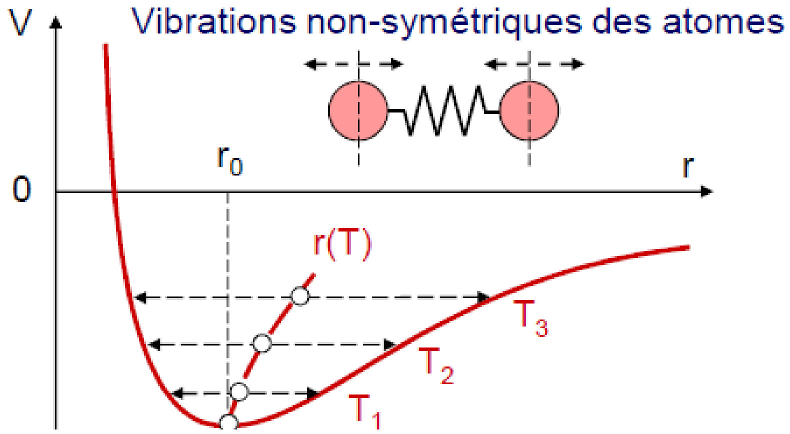
$$\mathrm{flux} = j_T = \frac{\Delta T}{R} = \frac{20}{2.3}\ \mathrm{W/m2} = 8.7\ \mathrm{W/m2}$$

Dilatation thermique

Sous l'effet d'une augmentation de la température, presque tous les matériaux se **dilatent**. Ce phénomène est dû à **l'asymétrie** (anharmonicité) du potentiel d'interaction entre atomes.

Le **coefficient d'expansion thermique linéaire α** est défini comme:

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{L}\frac{dL}{dT}} \qquad \Delta L = L_0 \alpha \Delta T$$

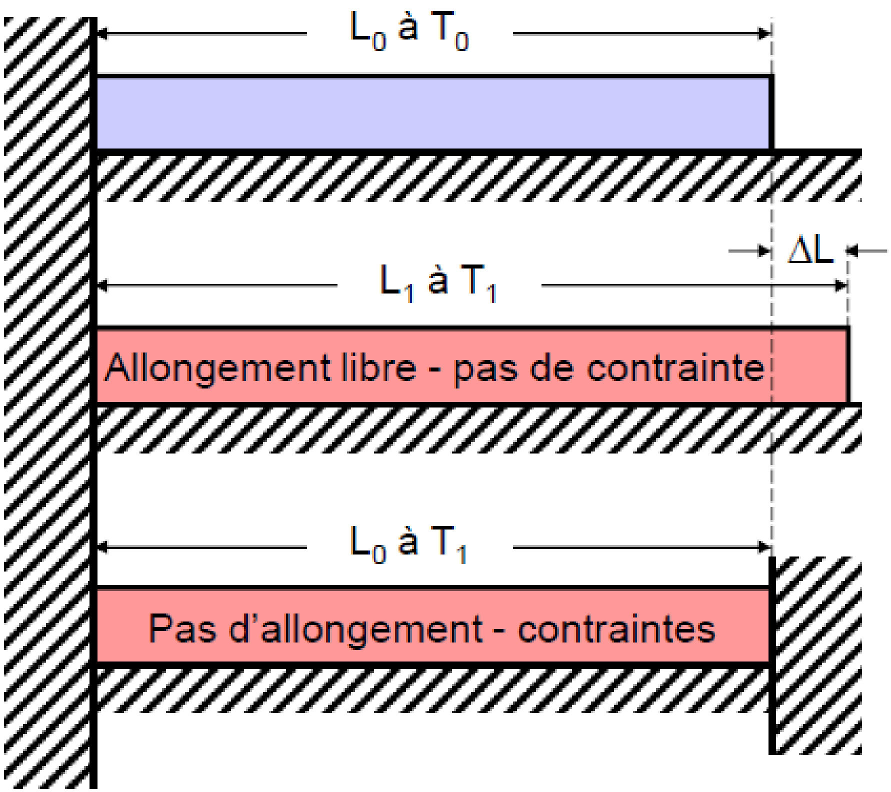


Tenseur des déformations thermiques: $\alpha_{\text{métaux}}$ entre 5 et 25.10^{-6}/K

$$\varepsilon_{th} = (\alpha\Delta T) I_3 = \begin{pmatrix} \alpha\Delta T & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\Delta T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\Delta T \end{pmatrix} \text{ et tr } \varepsilon_{th} = 3\alpha\Delta T = \frac{\Delta V}{V}$$

Contraintes thermomécaniques: ex du frettage

L'expansion thermique engendre des **déformations** et des **contraintes thermo-mécaniques** dans les solides. Considérons un cas à une seule dimension.



Une barre libre de s'allonger a une longueur initiale L_0 à T_0. A T_1, elle a donc la longueur L_1:

$$L_1 = L_0 + \Delta L = L_0\left[1 + \alpha\,(T_1 - T_0)\right]$$

$$\varepsilon_{xx}^{th} = \frac{\Delta L}{L_0} = \alpha\,(T_1 - T_0)$$

Si on empêche la barre de s'allonger pendant le chauffage, $\Delta L = 0$, ce qui signifie:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^{th} + \varepsilon_{xx}^{el} = 0$$

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}^{el} = -E\alpha\,(T_1 - T_0) < 0$$

7

Cours No 9

en 3D: $\varepsilon = \varepsilon_{th} + \varepsilon_{el}$ avec $\sigma = 2\mu\varepsilon_{el} + \lambda \mathrm{tr}\varepsilon_{el} I$ et $\varepsilon_{th} = \alpha \Delta T I$

frettage des rails de chemin de fer

Rails de chemin de fer à 25 °C en profilé d'acier de 40 m de long. Coefficient de dilatation linéaire de l'acier α = 11 10^{-6} /K. E = 210 GPa et ν = 0.3
Espace minimal requis entre les extrémités des rails si on s'attend à des températures minimales et maximales de -25 °C et + 75 °C et que l'on fixe le centre de chaque rail.
Le centre de chaque rail étant fixe, on a 20 m de rail de chaque côté à 25°C donc :

$l_0 = 20$ m et $\Delta T = \pm 50°C$

$\Delta l = \alpha \Delta T l_0 = \pm 50*20*11.10^{-6}$ m $= \pm 1.1$ cm

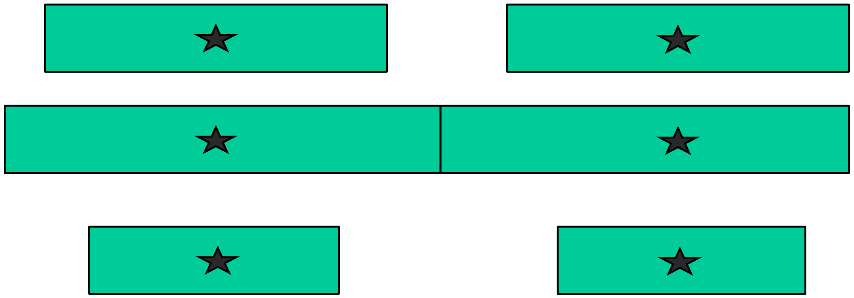
espace minimum entre les rails à 25°C : 2.2 cm pour que les rails se touchent à +50°C.

espace maximum: 4.4 cm quand il fait -25°C.

à +25°C:

à +75°C:

à -25°C:



Pb: vibrations à chaque passage de train ...

frettage des rails de chemin de fer

On **évite les espaces en soudant les rails entre eux et en les fixant fortement sur les traverses en béton.** La dilatation thermique axiale se transforme alors en déformation élastique axiale donc en contrainte axiale:

$$\varepsilon_{xx} = 0 = \varepsilon_{xx}^{th} + \varepsilon_{xx}^{el} = \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha\Delta T$$

$$\text{soit } \sigma_{xx} = -\alpha E \Delta T = -\,115.5 \text{ MPa}$$

Comme l'expansion thermique est empêchée, le rail se met en compression. Il y a transfert de la déformation thermique vers la déformation élastique. Il faut cependant veiller à ce que la contrainte ne dépasse pas la limite élastique de l'acier.

NB: les déformations thermiques et élastiques transverses sont très faibles pour un rail de l'ordre de 6 cm.
Et les contraintes transverses sont nulles.

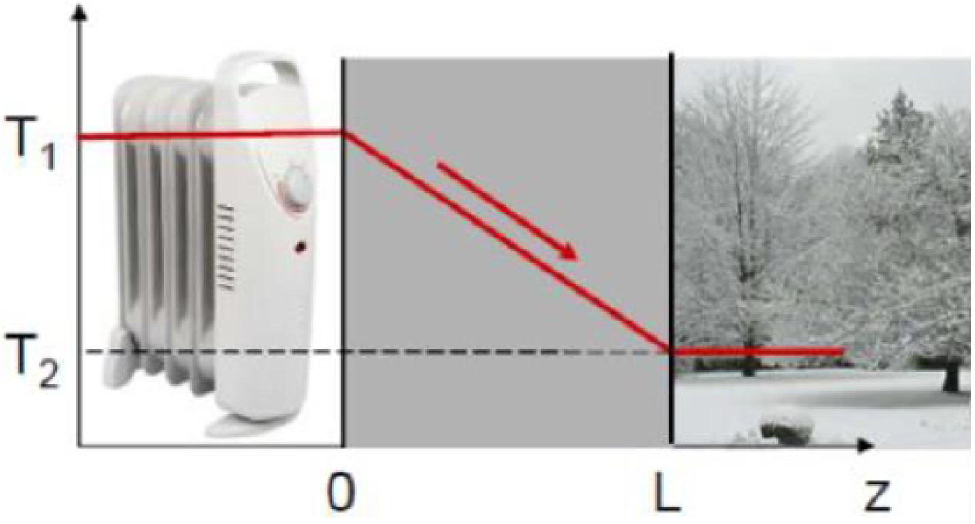
Exercice 3 Isolation thermique d'une maison

La loi de Fourrier décrivant la diffusion de chaleur sans convection s'écrit : $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ où T(t,z) est la température dépendant du temps t et de la dimension d'espace z (cf. figure ci-dessous) et α est la diffusivité thermique du milieu en m2/s. On considère l'intérieur d'une maison que l'on souhaite maintenir à une température T1 de 20°C alors que la température extérieure est T2 = 0°C. Ecrire l'équation de Fourrier dans le cas d'un régime stationnaire, i.e. permanent :

-
-

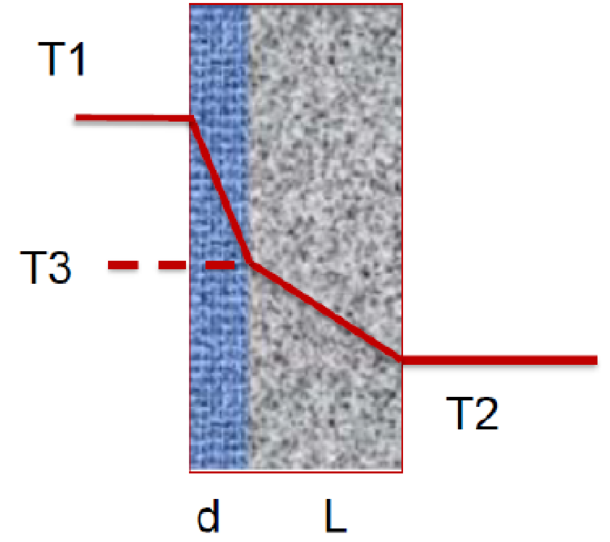
Résoudre cette équation dans notre cas pour trouver le profil de température dans le mur d'épaisseur L :

-
-
-
-
-
-
-



Que vaut le flux de chaleur traversant le mur de conductivité thermique k ? Précisez l'unité.
-
-
Que vaut la perte de chaleur pour une surface S de mur ? Précisez l'unité.
-
-
Pour diminuer de moitié la quantité d'énergie nécessaire pour maintenir les 20°C dans la maison, on isole le mur par une couche de laine de verre de conductivité thermique λ et d'épaisseur d. L'isolation se fait sur le côté intérieur du mur et on note T3 la température à l'interface entre le mur et la couche de laine de verre.

Ecrire que le flux de chaleur à travers le mur vaut maintenant la moitié de celui déterminé précédemment et en déduire T3 :
-
-
-
-
-



Ecrire l'égalité des flux de chaleur à travers le mur et la laine de verre pour calculer d en fonction de L et des conductivités thermiques λ et k :
-
-
-

Bonnes révisions.

Examen le 24 juin 2025: 9h15 à 12h15 en CE 16

partie métaux: seule un calculette est autorisée.
2 feuilles recto-verso à rendre

Enseignement: Boehm Courjault Emmanuelle, Drezet Jean-Marie,

Examen: Mardi 24.06.2025 de 09h15 à 12h15 (CE 1 6)

77/77	Nom Prénom	Sciper	Genre	Section	Courriel	Semestre de l'inscription	Fin d'i
1	Abaroa Del Toro Paula	377165	Féminin	GC		Bachelor semestre 2	
2	Abdelmalek Emna	393684	Féminin	GC		Bachelor semestre 2	
3	Acquaviva Loïc Pierre Georges	397254	Masculin	GC		Bachelor semestre 2	