V. Michaud
IMX

Corrigé N^o 12 — Semaine du 2 décembre 2024

Thermique/acide-base

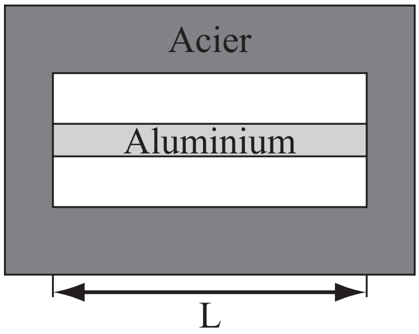
1. **Vrai ou faux ?**

	Vrai	Faux
a. De manière générale, plus un matériau est rigide, plus son expansion thermique est importante. *Faux : C'est plutôt l'inverse, voir sur le diagramme du cours page 7, des matériaux comme les céramiques qui ont un module d'Young grand on un coefficient de dilatation thermique moindre que les polymères par exemple. Ceci peut par ailleurs (pour votre information supplémentaire, ce n'est pas dans le cours) s'expliquer par le fait qu'un module d'élasticité plus grand implique une courbure plus importante du potentiel de Lenard-Jones à la position d'équilibre, potentiel qui est alors un peu plus symétrique en ce point. Cette symétrie tend à limiter la dilatation, et l'expansion thermique du matériau est donc réduite.*	☐	☑
b. Plus un matériau a une grande conductivité thermique, plus il laissera passer un grand flux de chaleur lorsqu'il est soumis à un même gradient de température. *Vrai : c'est bien la définition du flux de chaleur qui est lié de façon linéaire à la conductivité thermique et au gradient de température.*	☑	☐
c. A l'exception de quelques matériaux comme le diamant, les céramiques et les polymères sont en général bien moins bons conducteurs de la chaleur que les métaux. *Vrai : les métaux conduisent la chaleur grâce aux phonons (vibration des liaisons atomiques) mais aussi, et surtout à basse température, par l'intermédiaire des électrons libres en grande concentration. Ceci leur permet d'avoir des conductivités thermiques plus importantes.*	☑	☐
d. Si on colle ensemble à T=20°C une plaque d'Aluminium avec une plaque de verre très fine par rapport à l'épaisseur de l'Alu, on risque de faire casser le verre lorsque l'on chauffe la plaque à 100°C. *Vrai : l'aluminium voudra se dilater plus que le verre (voir valeurs du CTE de l'alu et du verre sur les diagrammes d'Ashby), et comme il est plus massif, il imposera une traction dans le verre, ce qui créée un risque de rupture du verre (il faudrait calculer la contrainte induite et voir si elle est plus grande que la contrainte a rupture du verre...).*	☑	☐

		Vrai	Faux
e.	La diffusivité thermique d'un matériau est le rapport entre sa conductivité thermique et sa chaleur latente. *Faux : voir la définition de la diffusivité thermique.*	☐	✓
f.	Le module d'élasticité et la limite d'élasticité d'un matériau en général augmentent quand on augmente la température. *Faux : c'est le contraire.*	☐	✓
g.	Une base de Bronsted est susceptible de céder un ou plusieurs protons.*Faux : Par définition, une base Brønsted est susceptible d'accepter un ou plusieurs protons.*	☐	✓
h.	La force d'un acide diminue lorsque le pKa de son couple acide/base conjuguée diminue.*Faux : La force d'un acide augmente lorsque le pKa de son couple diminue.*	☐	✓
i.	Si on ajoute à 1L d'eau, 500mg de KCl, cette solution reste à pH neutre. *(Vrai : La dissolution de KCl dans l'eau donne des ions K^+ etCl^- qui sont des ions indifférents ; ils ne réagissent pas avec l'eau. L'introduction de KCl dans l'eau ne modifie donc pas le pH de la solution, elle est neutre (pH = 7).*	✓	☐
j.	Si on dilue une solution d'acide faible de 0.1mol/L à 0.01 mol/L, le degré de dissociation augmente. *Vrai : L'équilibre de la réaction $HA + H_2O \leftrightharpoons H_3O^+ + A^-$ est déplacé vers la droite (augmentation de concentration de l'eau) correspondant une augmentation de dissociation de l'acide.*	✓	☐

2. **Fatigue thermique**

Un dispositif mécanique est conçu pour aller dans l'espace, il s'agit d'une pièce centrale en alliage d'aluminium soudée sur un cadre très rigide en acier. À température ambiante (25°C), le système est libre de contraintes internes. Dans l'espace, ce dispositif est placé à l'extérieur d'un satellite, où il passe alternativement du côté ensoleillé ($T = +120$°C) au côté à l'ombre ($T = -170$°C). On supposera que le cadre en acier est beaucoup plus rigide que la pièce centrale en aluminium, donc c'est ce cadre qui va imposer la déformation à la pièce en Alu. On connait les caractéristiques suivantes de nos matériaux : $\alpha_{acier} = 11 \times 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$; $L = 20\,\mathrm{cm}$
$\alpha_{alu} = 25 \times 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$; $E_{alu} = 70\,\mathrm{GPa}$; $\sigma_{Y,alu} = 250\,\mathrm{MPa}$.



a. Calculez la déformation ε de la pièce centrale d'alu lorsqu'elle est au soleil et à l'ombre, si elle était libre de se déformer, et son allongement dans les deux situations.
L'allongement se calcule à partir du coefficient d'expansion thermique :

$$\epsilon_{th} = \frac{\Delta L}{L} = \alpha_{alu} \Delta T$$

Au soleil :

$$\Delta T = (120 - 25)^\circ\text{C} = 95^\circ\text{C}$$

$$\epsilon_{th} = 25.10^{-6}(95) = 0.0024 = 0.24\%$$

et donc

$$\Delta L = \epsilon_{th}.L = 0.0024 * 0.2m = 0.48mm$$

A l'ombre :

$$\Delta T = (-170 - 25)^\circ\text{C} = -195^\circ\text{C}$$

$$\epsilon_{th} = 25.10^{-6}(-195) = -0.0049 = -0.49\%$$

et donc

$$\Delta L = \epsilon_{th}.L = -0.0049 * 0.2m = -0.98mm$$

b. Calculez l'allongement de la pièce centrale d'alu au soleil et à l'ombre quand elle est fixée dans le cadre qui impose sa propre déformation. Pour cela, en première approximation, ne considérez pas la forme géométrique de la pièce mais estimez simplement l'allongement dû à la thermique pour l'acier sur cette même longueur L dans les deux cas, et prenez l'hypothèse que cet allongement est imposé à la pièce d'alu.
Puisque le cadre en acier (ac) est beaucoup plus rigide que la pièce centrale en aluminium (Al), il impose sa déformation thermique à celle-ci. L'allongement de la pièce quand elle est soudée dans l'alu est donc déterminé par l'allongement de l'acier, donc on doit refaire le calcul, mais cette fois pour l'acier :

$$\begin{aligned} \text{Au soleil :} \quad \Delta L &= 20 \text{ cm} \times 11 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} \times 95^\circ\text{C} = 209 \ \cdot 10^{-6}\text{m} \\ \text{A l'ombre :} \quad \Delta L &= 20 \text{ cm} \times 11 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} \times (-195)^\circ\text{C} = -429 \ \cdot 10^{-6}\text{m} \end{aligned}$$

D'où la déformation totale ε_{Al} de la pièce centrale en aluminium (Al) :

$$\varepsilon_{Al} = \varepsilon_{ac} = \varepsilon_{ac}^{th} = \alpha_{ac} \times \Delta T \tag{1}$$

puisque l'on suppose que la déformation élastique de l'acier est nulle (i.e., indéformable).
Ce qui donne pour les deux situations :

$$\begin{aligned} \text{Au soleil :} \quad \varepsilon_{Al} &= \frac{\Delta L}{L} = 1.045 \ \cdot 10^{-3} \\ \text{A l'ombre :} \quad \varepsilon_{Al} &= \frac{\Delta L}{L} = -2.145 \ \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

et donc la déformation de l'aluminium est la même que celle de l'acier, puisque celui-ci impose sa déformation. On peut le vérifier : au soleil :

$$\Delta L = \epsilon_{th}.L = 0.001045 * 0.2m = 0.209mm$$

à l'ombre :

$$\Delta L = \epsilon_{th}.L = -0.002145 * 0.2m = -0.429mm$$

c. Calculez les contraintes dans cette pièce d'alu au soleil et à l'ombre. La variation de la contrainte entraine-t-elle de la fatigue oligocyclique ?
La pièce en aluminium voulant se dilater (ou se contracter) plus que l'acier, elle sera en compression au soleil et en traction à l'ombre. On écrit ainsi :

$$\varepsilon_{Al} = \alpha_{ac} \times \Delta T = \varepsilon_{Al}^{el} + \varepsilon_{Al}^{th} \tag{2}$$

D'où la déformation élastique de la pièce en aluminium :

$$\varepsilon_{Al}^{el} = \alpha_{ac} \times \Delta T - \varepsilon_{Al}^{th} = (\alpha_{ac} - \alpha_{Al}) \times \Delta T \tag{3}$$

La contrainte dans la pièce en aluminium sera ensuite simplement déduite de la relation $\sigma = E_{Al}\varepsilon_{Al}^{el}$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \text{Au soleil :} \ \varepsilon_{Al}^{el} &= (11 \cdot 10^{-6} - 25 \cdot 10^{-6})\mathrm{K}^{-1} \times 95°\mathrm{C} = -0.133\% \\ \sigma &= 70 \text{ GPa} \times (-0.133\%) = -93 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{À l'ombre :} \ \varepsilon_{Al}^{el} &= (11 \cdot 10^{-6} - 25 \cdot 10^{-6})\mathrm{K}^{-1} \times (-195°\mathrm{C}) = 0.273\% \\ \sigma &= 70 \text{ GPa} \times 0.273\% = 191 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Les deux valeurs de contrainte se situent en dessous de la limite élastique $\sigma_{Y,Al} = 250$ MPa, il ne s'agit donc pas de fatigue oligocyclique, mais plutôt de fatigue à grand nombre de cycles.

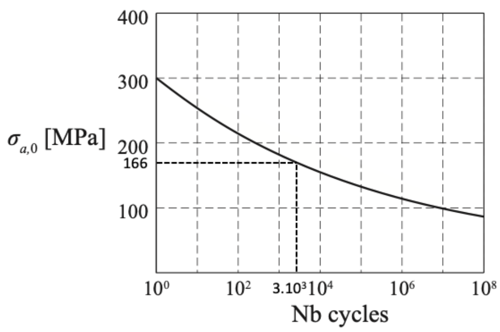
d. Comme vous craignez une rupture en fatigue (et que vous avez eu le cours sur la fatigue il y a quelques semaines..) vous pouvez vite fait estimer si cette pièce pourra survive 10 ans dans l'espace. À l'aide de la courbe de fatigue donnée ci-dessous et de la loi de Goodman, déterminez le nombre de cycles à rupture N_f, et donnez vos conclusions.
Pour une sollicitation en fatigue donnée caractérisée par une amplitude de contrainte σ_a et une contrainte moyenne non-nulle ($\sigma_{moy} \neq 0$), la loi de Goodman permet de calculer une amplitude de contrainte équivalente $\sigma_{a,0}$ correspondant à une sollicitation appliquée autour de $\sigma_{moy} = 0$ (voir schéma plus bas).
σ_{moy} et σ_a se calculent comme :

$$\begin{aligned}\sigma_{moy} &= \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = \frac{191 + (-93)}{2} \text{ MPa} = 49 \text{ MPa} \\ \sigma_a &= \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \text{ MPa} = 142 \text{ MPa}\end{aligned}$$

On peut alors calculer l'amplitude de contrainte équivalente $\sigma_{a,0}$ avec la loi de Goodman (en prenant $\sigma_m = \sigma_a(10^0 \text{ cycle}) = 300$ MPa) :

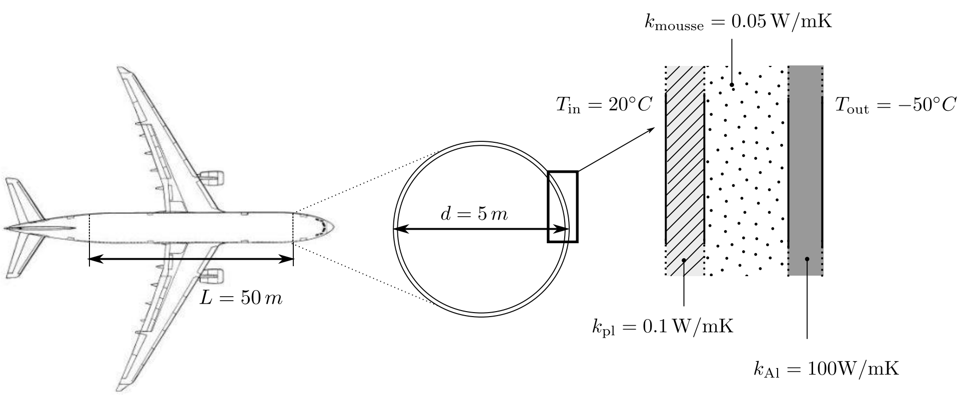
$$\sigma_a = \sigma_{a,0}\left(1 - \frac{\sigma_{moy}}{\sigma_m}\right) = \sigma_{a,0}\left(1 - \frac{49\text{MPa}}{300\text{MPa}}\right) = 142\text{MPa}$$

D'où la valeur $\sigma_{a,0} = 142/(1-49/300) = 166$ MPa que l'on peut utiliser pour déduire le nombre de cycles sur la courbe de Wöhler, ce qui donne environ $3'000$ cycles avant rupture. On ne pourra donc pas tenir 10 ans, puisque 10 ans cela ferait 3650 jours. Cela signifie qu'il faudrait redimensionner le barreau en Alu, ou en trouver une composition plus résistante à la fatigue.



3. Isolation d'une structure- diffusion thermique stationnaire

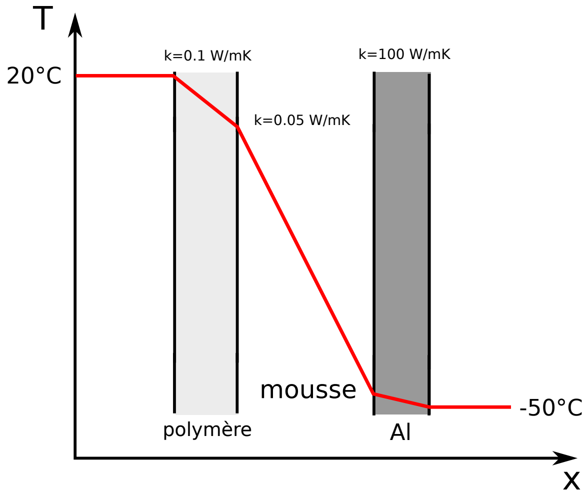
Le fuselage d'un avion commercial Airbus A330 est schématisé dans la figure ci-dessous. Le fuselage, de dimensions indiquées sur la figure, a la fonction de protéger les passagers de l'environnement externe, notamment d'une température à 10000 m d'altitude d'environ -50 °C. Une structure multicouche (et du chauffage dans l'avion) permet de garder la température à l'intérieur de l'avion à 20°C. Nous supposons que les parois sont composées d'une couche en alliage d'aluminium ($k = 100\,\mathrm{W/mK}$) et d'une en matière plastique ($k = 0.1\,\mathrm{W/mK}$) d'épaisseur, respectivement, 5 mm et 10 mm ; les deux sont séparées par une couche en mousse ($k = 0.05\,\mathrm{W/mK}$) d'épaisseur 5 cm.



En supposant une diffusion à l'état stationnaire, donc en régime établi qui ne dépend pas du temps :

a. Schématisez le profil de température à travers le fuselage, c'est à dire à travers une couche formée des 3 matériaux comme indiqué sur la figure. Pas besoin de faire de calcul, juste un dessin mais en réfléchissant à la pente de chaque segment.

   Le profil de température pour un problème stationnaire est représenté par une succession continue de segments linéaires. Une conductibilité thermique élevée détermine une faible variation de température à travers le corps (qui permet plus facilement le passage de la chaleur) ; au contraire, un matériau avec une basse conductibilité thermique fonctionne comme barrière à la propagation de la chaleur (voir figure cidessous), et détermine donc une large variation de température.



b. Calculez la perte thermique totale (en W) sur la surface S du fuselage, en prenant l'hypothèse que c'est un cylindre de longueur et de diamètre comme indiqué sur la figure. Pour cela, il faut écrire que les différences de températures dans chaque couche s'ajoutent $\Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3 = \Delta T$, et écrire l'équilibre des flux thermiques au passage de chaque couche. Cette perte thermique est ce qui sera compensé par du chauffage dans l'avion pour garder sa température de cabine constante.

Dans le cas du problème en question, nous avons conservation du flux (regime stationnaire) et donc $j_1 = j_2 = j_3$, avec les indices 1,2,3 indiquant respectivement les couche en plastique, en mousse et en alliage d'aluminium qui composent la paroi du fuselage. Or, le flux stationnaire j_i à travers une couche d'épaisseur δ_i est calculé par :

$$j_i = -\frac{k_i \Delta T_i}{\delta_i}$$

avec ΔT_i la différence de température qui se développe à travers l'épaisseur δ_i et k_i la conductibilité thermique du matériau considéré (i). En plus, la somme des variations de température à travers les couches est égale à la variation de température totale ΔT :

$$\Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3 = \Delta T$$

et encore, de l'expression du flux par unité de surface (densité de flux thermique) :

$$\Delta T = -j \cdot \left(\frac{\delta_1}{k_1} + \frac{\delta_2}{k_2} + \frac{\delta_3}{k_3}\right)$$

on définit un coefficient de transfert de chaleur équivalent h_{eq} par la relation :

$$j = -h_{eq} \cdot \Delta T$$

et donc dans ce cas de matériaux en série :

$$\frac{1}{h_{eq}} = \left(\frac{\delta_1}{k_1} + \frac{\delta_2}{k_2} + \frac{\delta_3}{k_3}\right)$$

La différence de température interne-externe valant $T_{\text{out}} - T_{\text{in}} = -20 - (50) = -70\,\text{K}$, on obtient le flux total :

$$j = -\Delta T \cdot h_{eq} = 70\,\text{K} \cdot \left(\frac{10^{-2}\,\text{m}}{0.1\,\text{W/mK}} + \frac{5 \cdot 10^{-2}\,\text{m}}{0.05\,\text{W/mK}} + \frac{5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{100\,\text{W/mK}}\right)^{-1} = 63.6\,\text{W/m}^2$$

La perte sur la surface du fuselage $S = \pi \cdot d \cdot L$ vaudra par conséquent :

$$P = j \cdot S = 63.6\text{W/m}^2 \cdot 785\,\text{m}^2 \simeq 50\,\text{kW}$$

.

Note : une façon assez simple de résoudre ce problème est de considérer une analogie avec les résistances électriques : La résistance thermique est définie comme $R_i = \frac{\delta_i}{k_i}$ pour chaque couche. Et comme pour des résistances électriques, quand elles sont en série les résistances s'ajoutent et donc on à que la résistance de l'ensemble est donnée comme :

$$R_{tot} = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{1}{h_{eq}} = \left(\frac{\delta_1}{k_1} + \frac{\delta_2}{k_2} + \frac{\delta_3}{k_3}\right)$$

Et la densité de flux thermique est donnée par $j = -\Delta T / R_{tot}$, et voilà !

4. **Effusivité au sauna -diffusion thermique transitoire et analyse par la température d'interface**

Pour le confort des pieds d'un individu, il vaut mieux faire un sauna avec des planches en bois plutôt qu'avec des plaques d'aluminium. Pour démontrer cela, nous demandons de calculer la température d'interface T^* entre deux corps (sol-pied) mis en contact parfait. Ces deux "matériaux" ont respectivement une température initiale T_1 et T_2, une chaleur spécifique volumique $(\rho c_p)_1$ et $(\rho c_p)_2$ et une conductivité thermique k_1 et k_2. On utilisera pour cela le fait que :

- les flux de chaleur dans les deux corps à l'interface sont égaux ;
- dans chacun des matériaux, les couches limites thermiques à un instant t ont une épaisseur L_c qui est telle que :

$$Fo = \frac{at}{L_c^2} \approx 1$$

où Fo est le nombre adimensionnel appelé nombre de Fourier. On vous donne les valeurs suivantes pour le bois, l'aluminium, et finalement le corps humain

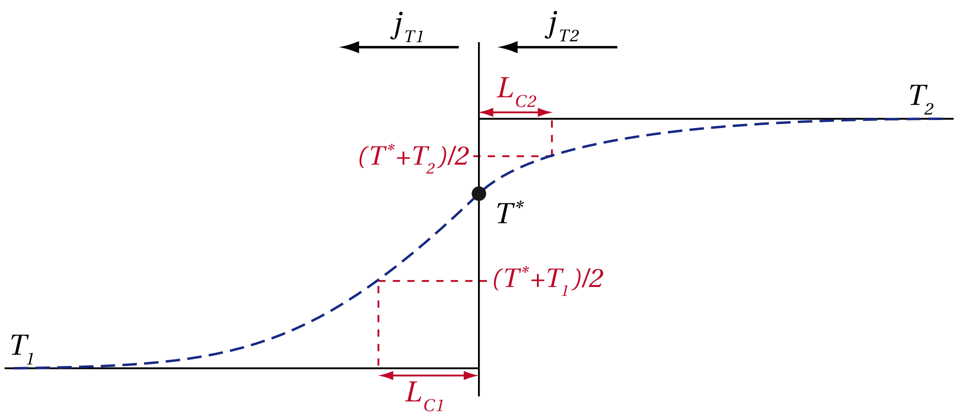
qui est ici assimilé à de l'eau :
$k_{bois} = 0.15\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$, $(\rho c_p)_{bois} = 0.5 \times 10^6\,\mathrm{J\,m^{-3}\,K^{-1}}$
$k_{alu} = 237\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$, $(\rho c_p)_{alu} = 2.42 \times 10^6\,\mathrm{J\,m^{-3}\,K^{-1}}$
$k_{eau} = 0.56\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$, $(\rho c_p)_{eau} = 4.18 \times 10^6\,\mathrm{J\,m^{-3}\,K^{-1}}$

a. Calculez les coefficients de diffusion thermique du bois, alu et de l'eau. $a = \frac{k}{\rho c_p}$, donc on trouve $a_{bois} = 0.3 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$, $a_{alu} = 97 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$, $a_{eau} = 0.13 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$,

b. Calculez la taille des couches limites de diffusion thermique après 1 seconde, dans chacun de ces éléments. $l_{ci} = \sqrt{a_i t}$, on a donc $l_{cbois} = 0.54mm$, $l_{calu} = 9.89mm$, $l_{ceau} = 0.36mm$. On voit tout de suite que la chaleur diffuse bien plus vite dans l'alu que dans le bois.

c. Calculez la température d'interface T^* entre deux corps mis en contact parfait, en posant les hypothèses indiquées ci-dessus, et en vous reportant à la slide du cours, qui indique que la valeur de température dans le matériau à une distance L_c de l'interface est la moyenne de la température d'interface T^* et de la température au loin du coté considéré, pour chaque coté. Ce calcul fait apparaître ce que l'on appelle l'*effusivité* d'un matériau, donnée par $(k_i \rho_i c_{pi})^{0.5}$. Faites ensuite l'application numérique avec les propriétés du bois et de l'aluminium, en assimilant les propriétés du corps humain à celles de l'eau. Prenez comme températures initiales 30 pour le pied et 80 pour le sol.

   Le schéma ci-dessous représente la situation pour laquelle on cherche à calculer T^*.



   On sait que le flux de chaleur doit être le même des deux côtés de l'interface :

$$j_{T1} = j_{T2}$$

$$-k_1 \left(\frac{dT}{dz}\right)_1 = -k_2 \left(\frac{dT}{dz}\right)_2$$

Sachant que les couches limites thermiques L_c sont données par $Fo = 1$, on peut écrire que :

$$-k_1 \frac{T^* - (T_1 + T^*)/2}{L_{c1}} = -k_2 \frac{-T^* + (T_2 + T^*)/2}{L_{c2}}$$

$$-k_1 \frac{T^* - T_1}{2L_{c1}} = -k_2 \frac{T_2 - T^*}{2L_{c2}}$$

$$-k_1 \frac{T^* - T_1}{\sqrt{a_1 t}} = -k_2 \frac{T_2 - T^*}{\sqrt{a_2 t}}$$

Si on résout cette équation pour un temps t quelconque, et en utilisant la relation $a = \frac{k}{\rho c_p}$, on obtient :

$$-(\sqrt{k\rho c_p})_1 (T^* - T_1) = -(\sqrt{k\rho c_p})_2 (T_2 - T^*)$$

On a ainsi fait apparaître l'effusivité ($e = \sqrt{k\rho c_p}$) propre à chaque matériau. En réarrangeant les termes on trouve finalement :

$$T^* = \frac{e_1 T_1 + e_2 T_2}{e_1 + e_2}$$

En prenant maintenant les valeurs données pour le bois, l'aluminium et l'eau et avec des températures de 80 °C et 30 °C pour le sauna et le pied respectivement, on trouve :

$$e_{bois} = \sqrt{0.15\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}} \cdot 0.5 \times 10^6\,\mathrm{J\,m^{-3}\,K^{-1}}} = 274\,\mathrm{Jm^{-2}K^{-1}s^{-0.5}}$$
$$e_{alu} = \sqrt{237\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}} \cdot 2.42 \times 10^6\,\mathrm{J\,m^{-3}\,K^{-1}}} = 23\,949\,\mathrm{Jm^{-2}K^{-1}s^{-0.5}}$$
$$e_{eau} = \sqrt{0.56\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}} \cdot 4.18 \times 10^6\,\mathrm{J\,m^{-3}\,K^{-1}}} = 1530\,\mathrm{Jm^{-2}K^{-1}s^{-0.5}}$$

$T^*_{bois-eau} = 37.6\,°\mathrm{C}$
$T^*_{alu-eau} = 77\,°\mathrm{C}$

Si la première température est largement supportable par la peau, la deuxième par contre entraînera de graves brûlures.

5. **Le grand nettoyage**
Avant de partir en vacances, vos colocataires vous imposent de nettoyer un peu la salle de bains.

☞ Vous décidez de préparer une solution d'ammoniac NH_3 à 0.1M, pour récurer la baignoire. On voudrait quand même vérifier quel est son pH pour savoir si vous devriez porter des gants. Vous trouvez dans une table que $K_b = 1.66.10^{-5}$, donc $pK_b = 4.78$.

a. Cette solution est elle à priori basique ou acide (a regarder dans le formulaire ?)
On sait que l'ammoniac est une base faible, qui sera partiellement dissociée dans l'eau donc la quantité d'ions OH^- ne sera pas égale à la concentration initiale d'ammoniac dans la solution.

b. Ecrivez l'équation chimique et calculez la concentration en ions OH^- dans la solution a l'équilibre. Calculez ensuite le pH (si pas encore vu, le pH, on écrit $pH = 14 - pOH = 14 + Log[OH^-]$ pour trouver). Du coup, est-ce à priori ok (donc pas trop loin du pH neutre ?)
On aura donc :

$$NH_3 + H_2O \leftrightharpoons OH^- + NH_4^+$$

, avec $K_b = \frac{[OH^-][NH_4^+]}{[NH_3]}$. A l'équilibre, si initialement j'ai mis 0.1 mol/L de NH_3, on aura (0.1-x) mol/L de NH_3, x mol/L de NH_4^+ et x mol/L de OH^-, donc $K_b = \frac{x^2}{0.1-x} = 1.66.10^{-5}$. On résout cette équation pour trouver x : $x^2 + 1.66.10^{-5}.x - 1.66.10^{-6} = 0$, la solution est :

$$x = \frac{(-1.66.10^{-5}) \pm \sqrt{(1.66.10^{-5})^2 + 4(1.66.10^{-6})}}{2} =$$

$$x = -\frac{1.66.10^{-5} \pm 2.58.10^{-3}}{2}$$

On choisit la racine positive, et on trouve $x = 1.28.10^{-3} mol/L$. Donc $pOH = -log(1.28.10^{-3}) = 2.89$, $pH = 14 - pOH = 11.11$. Comme le pH est très élevé, on en conclut que la solution est très caustique et qu'il vaut mieux en effet se protéger avec des gants (et aérer pour ne pas trop respirer les vapeurs d'ammoniaque).

☞ Pour continuer sur la lancée, vous décidez aussi de détartrer les pommeaux de douche qui sont couverts d'une couche de calcaire, $CaCO_3$. Pour cela, vous prenez du vinaigre de ménage, donc une solution de CH_3COOH, et vous voulez tremper le pommeau de douche dans la solution.

a. On observe un dégagement gazeux lorsque l'acide entre en contact avec le calcaire. Que se passe-t-il ? Est ce que ce gaz est nocif ? Pour cela, essayez d'imaginer la réaction qui peut avoir lieu.

$$CaCO_3(s)+2CH_3COOH(l) \leftrightharpoons 2CH_3COO^-(l)+Ca^{2+}(l)+H_2O(l)+CO_2(g)$$

Les ions Calcium vont se solubiliser dans l'eau. C'est donc du dioxyde de carbone qui s'échappe et ce n'est pas nocif tant qu'il n'y en a pas trop bien sûr (et donc ventilez !).

6. **Exercice bonus et seulement pour info - Nombre de Fourier**
Pour ceux qui se demandent d'où on sort ces distances et temps caractéristiques, et qui ont vu les dérivées partielles et les changements de variable, sinon à revoir à l'occasion quand vous aurez vu cela en maths.

a. On considère l'équation de diffusion de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

où a est la diffusivité thermique. Transformez cette équation dans des variables de temps et d'espace adimensionnelles (sans dimension) τ et ζ en faisant le changement de variables suivant :

$$t = t_c\tau \qquad \text{et} \qquad z = L_c\zeta$$

avec t_c et L_c respectivement les temps et longueur caractéristiques du problème.
On a les nouvelles variables :

$$\tau = t/t_c \qquad \text{et} \qquad \zeta = z/L_c$$

Sachant que t_c et L_c sont des constantes, les dérivées partielles de la température s'écrivent :

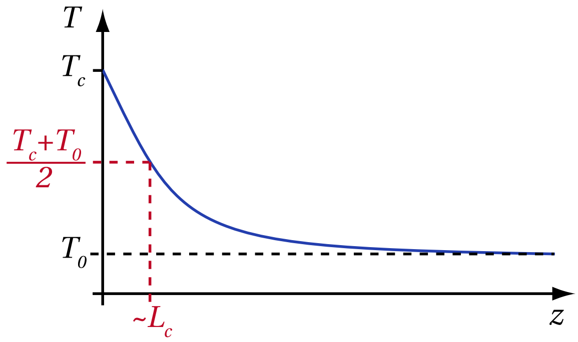
$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial T}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \tau}\cdot\frac{1}{t_c}\\
\frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{\partial T}{\partial \zeta}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial \zeta}\cdot\frac{1}{L_c}\\
\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial \zeta}\cdot\frac{1}{L_c}\right) = \frac{1}{L_c}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial z\partial \zeta} = \frac{1}{L_c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) = \frac{1}{L_c^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2}
\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation de diffusion de la chaleur, il s'ensuit :

$$\frac{\partial T}{t_c \partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{L_c^2 \partial \zeta^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \underbrace{\frac{a t_c}{L_c^2}}_{Fo} \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2}$$

Après un temps t_c, le profil de température à la surface du matériau aura l'allure :



Pour info, vous verrez dans les cours de l'année prochaine que la solution analytique de ce problème est donnée par :

$$T(z,t) = T_C + (T_0 - T_C)\,\mathrm{erf}(u)$$

$$\text{avec} \qquad u = \frac{z}{2\sqrt{a t_c}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \mathrm{e}^{-v^2} \mathrm{d}v$$

Pour $Fo = 1$, après un temps caractéristique t_c, la distance de diffusion caractéristique sera $L_c = \sqrt{a t_c}$. En $z = L_c$, on a alors $u = 0.5$, $\mathrm{erf}(u) \approx 0.5$, et donc $T \approx (T_c + T_0)/2$.