Corrigé N° 6 — Semaine du du 14 Octobre 2024

Elasticité/plasticité

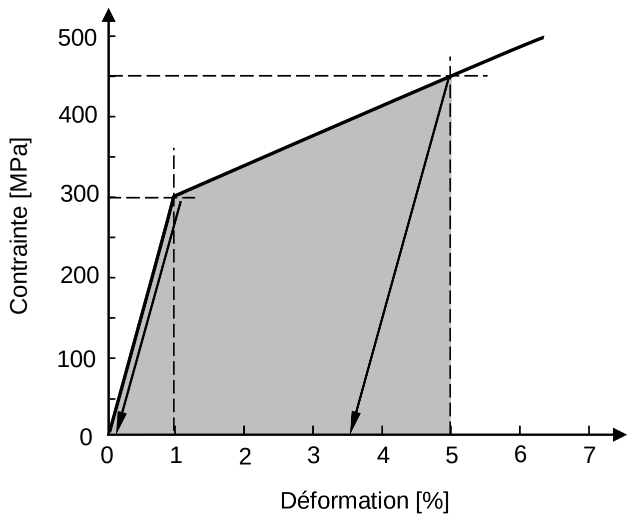
1. Vrai ou faux ?

	Vrai	Faux
a. Plus un matériau est ductile, plus sa déformation résiduelle après la rupture est grande. *Vrai : la ductilité se définit en effet comme la déformation résiduelle après rupture.*	✓	
b. La limite d'élasticité est reliée au mouvement des défauts dans le métal, alors que le module d'Young dépend de la nature des liaisons entre les atomes. *Vrai : c'est un aspect fondamental très important à retenir de l'origine physique des notions de déformations élastiques et plastiques.*	✓	
c. Une fois la limite élastique dépassée, si on relâche une pièce sous contrainte, l'énergie élastique emmagasinée n'est pas restituée. *Faux : l'énergie élastique est toujours restituée car la contrainte appliquée agit sur les dislocations mais aussi sur les atomes en continuant de déformer le matériau élastiquement à mesure que la contrainte augmente. En retirant la contrainte, les atomes retournent à leur position d'équilibre en restituant l'énergie élastique emmagasinée.*		✓
d. La plasticité des polymères juste au dessous de leur transition vitreuse est liée au mouvement des macromolécules et à l'apparition de craquelures. *Vrai : c'est aussi pour cela que le comportement des polymères dépend de leur vitesse de sollicitation.*	✓	
e. Contrairement aux métaux qui sont des matériaux plutôt ductiles, les céramiques sont en général fragiles et cassent avant de se déformer plastiquement. *Vrai : les céramiques ont des limites élastiques très grandes à cause de leurs liaisons ioniques et ne se déforment pas de manière plastique ou très peu, sauf à très haute température. Elles cassent donc de façon fragile avant de se déformer. Les métaux grâce notamment au mouvement des dislocations se déforment en général avant de casser, ils sont donc ductiles (sauf parfois à très basse température).*	✓	

		Vrai	Faux
f.	Pour une dislocation vis, le vecteur de Burgers est orthogonal à la ligne de dislocation.*Faux : c'est pour une dislocation coin.*	☐	✓
g.	Un fakir de 60 kg peut tranquillement s'endormir sur un lit de 1000 clous (de surface de contact 0.3 mm^2 chacun) sans risquer de se percer la peau (résistance maximale de la peau : 2.5 MPa, l'accélération de la gravité g = 10 m.s^{-2}). *Vrai : On doit simplement vérifier que la contrainte sur la peau est inférieure à sa résistance maximale. La surface de contact totale est donnée par* $S = n_{clous}$ *x* S_{clous} = *1000 x* $3{\cdot}10^{-7}$ = $3{\cdot}10^{-4}$ m^2 *(en prenant soin de transformer la surface en mètre carré). La contrainte est donc* $\sigma = mg/S = (60 \times 10)/(310 - 4) = 2\,MPa < 2.5\,MPa$. *Il peut dormir tranquille !*	✓	☐

2. **Comportement idéal élastique-plastique**

On considère une éprouvette d'un matériau dont le comportement en traction est schématisé par la courbe ci-dessous. La section vaut $S = 10$ mm^2, la longueur sur laquelle on applique la traction vaut $L = 10$ cm. En vous aidant de cette figure, répondez aux questions suivantes :



a. Quel sont le module d'élasticité et la limite d'élasticité ?
Le module d'élasticité est la pente de la courbe de traction dans la partie linéaire observée pour une faible contrainte/déformation. Dans ce cas, en prenant par exemple le couple de valeurs $\varepsilon = 1\%$, $\sigma = 300$ MPa, on obtient : $E = 30$ GPa. Pour un matériau non-idéalisé, la li-

mite élastique σ_{el} est donnée par l'intersection entre la courbe $\sigma(\varepsilon)$ et la droite de pente E passant par $\varepsilon = 0.2\%$ pour les métaux ($\sigma_{0.2}$), (et souvent par $\varepsilon = 0.5\%$ pour les polymères ($\sigma_{0.5}$)). Pour un comportement mécanique idéalisé, comme ici, c'est simplement la contrainte au point de changement de pente, donc $\sigma_{el} = 300$ MPa. La déformation élastique $\varepsilon_{el} = 1\%$.

b. Quel est le coefficient d'écrouissage ?
Le coefficient d'écrouissage n est donné par la pente de $\sigma(\varepsilon)$ lorsqu'il y a effectivement déformation plastique. On a donc ici : $n = (450 - 300)/(0.05 - 0.01) = 3.75$ GPa.

c. Quelle est la valeur de la déformation élastique quand la contrainte vaut 500 MPa ?
Avec une contrainte de 500 MPa, la déformation élastique est $\varepsilon_{el} = \sigma/E = 500/30000 = 1.7\%$.

d. Le coefficient de Poisson de ce matériau valant 0.3, quelle est la variation de section pendant un chargement élastique jusqu'à 300 MPa ? Prenez l'hypothèse que l'échantillon à une section carrée $S = d * d$.
La déformation des deux dimensions transverses étant donnée par $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu\varepsilon_{xx}$, la section aura pour variation $\frac{\Delta S}{S} = \frac{(d+\Delta d)(d+\Delta d)-d^2}{d^2} = (1+\Delta d/d)(1+\Delta d/d) - 1 = (1+\varepsilon_{yy}) \times (1+\varepsilon_{zz}) - 1 = 2\varepsilon_{yy} = -2\nu\varepsilon_{xx}$, donc $\Delta S = -2 \times 0.3 \times 0.01 \times 10$ mm^2=-0.06 mm^2.

e. Calculez la densité d'énergie de déformation sous ce chargement de 300MPa, ainsi que l'énergie de déformation. La densité d'énergie élastique w est donnée par :

$$w = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2} = \frac{300 \text{ MPa} \cdot 0.01}{2} = 1.5 \text{ MJ/m}^3$$

L'énergie de déformation W est donnée par wV où V est le volume. On a donc :

$$W = 1.5 \text{ MJ/m}^3 \times 0.1 \text{ m} \times 10^{-5}\text{m}^2 = 1.5 \text{ J}$$

Cette énergie est restituée lors de la décharge.

f. On applique une contrainte de 450 MPa. Quelle est la déformation totale sous cette contrainte ? Et l'allongement total ?
Avec une contrainte de 450 MPa, la déformation totale est de 5%. Cela fait donc un allongement de $\Delta L = \varepsilon \times L_0 = 0.05 \times 10$ cm. Cela fait donc 5mm d'allongement.

g. Quelle est la densité d'énergie de déformation, à cette contrainte ?
La densité d'énergie de déformation à cet instant est donnée toujours par l'aire sous la courbe (en gris sur la figure). On peut décomposer

cette aire en un triangle (partie élastique) et un trapèze (au delà de la zone élastique). On aura donc :

$$w = \frac{300 \cdot 0.01}{2} + \frac{450 + 300}{2} \cdot (0.05 - 0.01) = \ 16.5\mathrm{MJ/m^3}$$

h. Quelle sera alors la courbe contrainte-déformation lors de la décharge ? Quelle est la déformation résiduelle (plastique) à charge nulle ?
Lors de la décharge depuis 450 MPa, la courbe $\sigma(\varepsilon)$ a toujours la pente E du module élastique (voir flèche). A charge nulle, la déformation résiduelle est de 3.5%.

i. Quelle est la densité d'énergie élastique restituée ?
La densité d'énergie élastique restituée est donnée par l'aire sous le grand triangle, soit :

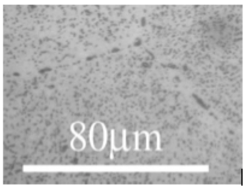
$$w = \frac{450 \cdot (0.015)}{2} = 3.375\ \mathrm{MJ/m^3}$$

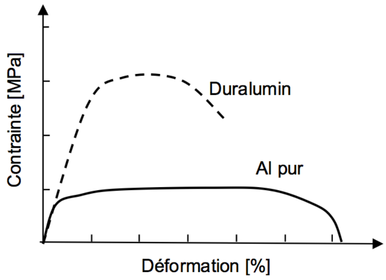
j. Où est passée la différence entre densité d'énergie totale de déformation et densité d'énergie élastique restituée ?
La différence entre 16.5 $\mathrm{MJ/m^3}$ et 3.375 $\mathrm{MJ/m^3}$ est due à différentes raisons. Mises à part des dissipations thermiques (notamment à haute vitesse de déformation), l'essentiel de la différence part dans les défauts. Pour les métaux, cette part est de l'énergie élastique stockée autour des dislocations : pour les dislocations-coins, les zones au-dessus sont en compression, celles en-dessous en traction. Pour les polymères, on crée des microfissures (crazes) et donc de la surface (énergie de surface que l'on reverra plus tard). Pour les céramiques à température ambiante, on verra qu'il y a rupture avant d'aborder le régime plastique.

k. Le volume de la pièce est-il alors changé ?
Le volume de la pièce après déchargement est (à peu près) le même car la déformation plastique se fait essentiellement à volume constant.Il y aura des changements si il y a eu formation de fissures ou porosités (mais en général cela arrive plutôt près de la rupture).

l. Si l'on rechargeait une nouvelle fois cette pièce, quelle serait alors sa limite d'élasticité ?
Si l'on recharge une nouvelle fois cette pièce, la nouvelle limite élastique est donnée par σ_{el} = 450 MPa. Elle est augmentée à cause de l'écrouissage du matériau.

3. **Durcissement de l'aluminium**
On donne ci-dessous 2 courbes obtenues en traction uniaxiale pour de l'aluminium pur et du Duralumin, un alliage d'aluminium contenant environ 4% en masse de cuivre, qui a la microstructure après traitement thermique comme indiquée sur la photo (gris clair : Al, points gris foncés : Al_2Cu).





a. Lequel des 2 alliages a la plus grande ductilité ?
L'aluminium a la plus grande ductilité car il se casse pour une déformation plus grande.

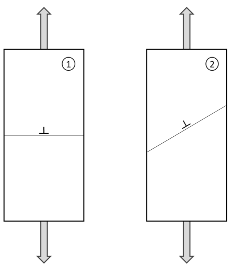
b. Lequel des deux alliages a la limite d'élasticité la plus élevée ?
La limite d'élasticité du Duralumin est plus élevée.

c. Lequel des deux alliages a le plus grand module de Young ?
Pour le module de Young, comme les 2 matériaux ont a peu près la même pente de la courbe contrainte-déformation dans la partie élastique, les deux ont donc a peu près le même module.

d. Citez les 4 mécanismes possibles de durcissement pour l'alliage d'aluminium.
Les 4 mécanismes possibles de durcissement pour l'alliage d'aluminium : par précipitation, par écrouissage, par solution solide, par diminution de la taille des grains. Au vu de la micrographie donnée ici, comme on voit des petits précipités dans l'alliage, on peut conclure qu'il s'agit ici d'un durcissement par précipitation.

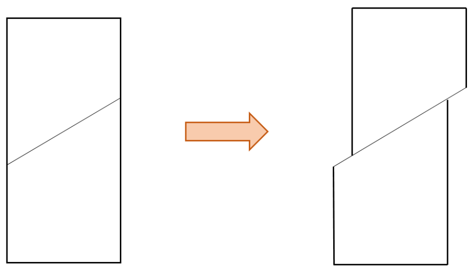
4. Quelques questions sur la plasticité

a. Une pièce métallique est soumise à une contrainte de traction. Ci-dessous, sont représentés deux cas de figure.

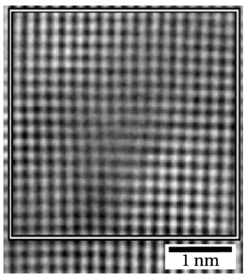


Est-ce que la dislocation coin dans le cas 1 peut se déplacer sous l'action de la contrainte appliquée et, si oui, dans quelle direction ? Même

question pour le cas 2.
Dans le/les cas où la dislocation peut se déplacer, représentez la forme finale schématique de la pièce une fois que la dislocation a émergé par une des faces de la pièce.
Une dislocation coin ne peut bouger que s'il y a une contrainte de cisaillement parallèle au plan de glissement. Dans le cas 1, le plan de glissement de la dislocation est perpendiculaire à la direction de la contrainte de traction appliquée à la pièce. Par conséquent, il n'y a pas de glissement possible.
Dans le cas 2, une contrainte de cisaillement parallèle au plan de glissement de la dislocation apparaît. Cette contrainte de cisaillement correspond à une composante de la contrainte de traction appliquée. Les deux parties de la pièce séparées par le plan de glissement peuvent donc bouger l'une par rapport à l'autre sous l'action de la contrainte appliquée. La déformation plastique de la pièce va donc induire le changement de forme suivant (fortement exagéré pour visualisation) une fois que la dislocation a émergé sur la face droite (prenant l'hypothèse qu'elle était émise de la face gauche) :

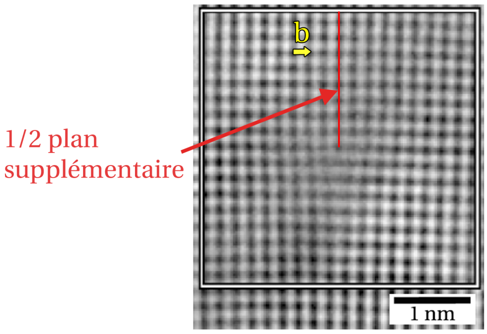


b. L'image suivante montre une micrographie d'un échantillon d'or prise par microscopie électronique en transmission en mode haute résolution. Localisez la dislocation présente dans la zone encadrée. De quel type de dislocation s'agit-il ? Dessinez son vecteur de Burgers.



C.W. Zhao *et al.*, Acta Materialia 56, 2008.

Il s'agit d'une dislocation coin.



c. En repensant à la courbe de traction d'un polymère au dessus de sa transition vitreuse, si je choisis un polymère qui a déjà été étiré au préalable pendant la mise en oeuvre, de façon à aligner les chaînes de macromolécules le long de l'axe de l'échantillon (comme pour des cables de HDPE), est-ce que sa ductilité sera plus grande ou plus petite que celle d'un polymère dont les chaînes sont en pelotes non orientées ?
Si je choisis un polymère qui a déjà été étiré au préalable pendant la mise en oeuvre, de façon à aligner les chaînes de macromolécules le long de l'axe de l'échantillon (comme pour des cables de HDPE), sa ductilité sera plus petite que celle d'un polymère dont les chaînes sont en pelotes non orientées. Ceci est du au fait que les chaines déjà orientées selon la direction de traction ont moins la possibilité de s'étirer.

d. La limite d'élasticité du cuivre, comme pour la plupart des métaux cfc, est basse. Si l'on ajoute 10%at. de nickel en solution solide, la résistance augmente de 80 MPa. De combien pourrait-on augmenter cette résistance si la quantité de nickel en solution est de 20%at. ?
Le durcissement du matériau par solution solide est donné par :

$$\Delta\sigma_Y^{SS} = K_{SS} G \delta \sqrt{X}$$

avec X la composition du soluté en solution, et K_{SS}, une constante, G le module de cisaillement, et δ la différence de rayons atomiques entre l'atome en solution et les atomes de base du matériau. Vu qu'elle varie comme $\sqrt{X}$, il suffit de trouver la nouvelle résistance par :

$$\frac{\sqrt{.1}}{80\text{MPa}} = \frac{\sqrt{.2}}{\Delta\sigma_{20\%Ni}}$$

qui donne une augmentation de résistance de $\Delta\sigma_{20\%Ni} = 113\,\text{MPa}$.

e. Après laminage (déformation plastique) à froid, un morceau d'aluminium pur contient environ 1×10^{15} mètres de dislocations par mètre cube de matériau. Combien y a-t-il de mètres de dislocations dans un cube d'aluminium de 1 cm de coté ? Sachant que la circonférence de la terre est 40 075 km à l'équateur, combien de fois pourrait on faire le

tour de la terre si on pouvait dérouler et mettre bout à bout les dislocations présentes dans ce petit cube ? Quelle est la distance moyenne entre 2 dislocations, si elles sont réparties de manière homogène ?
Dans un cube d'aluminium de 1 cm de coté, donc de volume V= $1cm^3$, il y a donc L=$\rho_d \cdot$ V $= 1 \times 10^9$ mètres de dislocations. Sachant que la circonférence de la terre est 40 075 km à l'équateur, cela fait donc N=$1 \times 10^9/40\,075 \times 10^3 = 25$ fois le tour de la terre ! La distance moyenne entre deux dislocations est obtenue en considérant un cube de 1 m de coté, et en imaginant que chaque dislocation fait 1m de long, et est alignée selon un axe du cube. Dans ce cas, sur une surface du cube orthogonale à cet axe, il y a exactement ρ_d dislocations. On considère alors combien de lignes on doit couper si on prend une droite dans cette surface, parallèle à un des cotés du carré : cela sera $\sqrt{\rho_d}$, et donc la distance moyenne sur une droite de 1m de long, cela sera $1/\sqrt{\rho_d} = 31$ nanomètres. On imagine bien qu'avec tant de dislocations, elles interagissent entre elles et empêchent la déformation de se faire.

f. Calculez la nouvelle limite d'élasticité du métal écroui mentionné à la question précédente, sachant que celle de l'aluminium non déformé est de 30 MPa et que le durcissement est donné par

$$\Delta\sigma_Y^{ec} = K_e G b \sqrt{\rho_d}$$

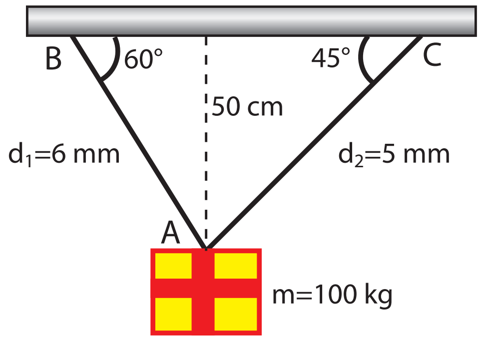
où $K_e = 1.25$ est un coefficient de proportionnalité, $G = 26\,\mathrm{GPa}$ est le module de cisaillement de l'Aluminium, $b = 2.86\,\text{Å}$ la norme du vecteur de Burgers et ρ_d la densité de dislocations, c'est-à-dire la longueur totale de dislocations par unité de volume.
L'augmentation de la limite d'élasticité conséquente à l'écrouissage est donnée par

$$\Delta\sigma_Y^{ec} = K_e G b \sqrt{\rho_d} = 1.25 \cdot 26\,\mathrm{GPa} \cdot 2.86\,\text{Å} \cdot \sqrt{1 \times 10^{15}\,\mathrm{m}^{-2}} = 294\,\mathrm{MPa}$$

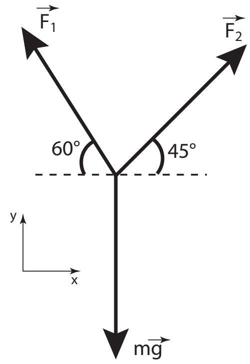
Donc, la nouvelle limite d'élasticité est :

$$\sigma_Y^{ec} = \sigma_Y^{nonec} + \Delta\sigma_Y^{ec} = 30 + 294 = 324MPa.$$

5. **Paquet suspendu par deux fils** Deux fils de nylon AB et AC, respectivement de diamètre d_1 et d_2, soutiennent une masse m (voir dessin).



a. Calculez la contrainte normale qui s'exerce dans chacun des fils (on négligera leurs poids). Un simple équilibre des forces au point A permet de déterminer les forces s'appliquant le long des deux fils. En projetant sur Ox et Oy respectivement, on trouve :



$$\begin{aligned} -F_1\ \cos(60) + F_2\ \cos(45) &= 0 \\ F_1\ \sin(60) + F_2\ \sin(45) &= mg \end{aligned}$$

En substituant F_2 dans la deuxième équation, on obtient :

$$\begin{aligned} F_1\ \sin(60) + F_1\ \cos(60) &= mg \\ F_1 &= \frac{mg}{\sin(60)+\cos(60)} \\ &= 718.1\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Et donc :

$$F_2 = F_1 \frac{\cos(60)}{\cos(45)} = 507.8\,\mathrm{N}$$

La contrainte se calcule en divisant la force exercée par la surface :

$$\sigma_{AB} = \frac{F_1}{\pi r_1^2} = \frac{718.1\,\mathrm{N}}{\pi \cdot 9\,\mathrm{mm}^2} = 25.4\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{AC} = \frac{F_2}{\pi r_2^2} = \frac{507.8\,\mathrm{N}}{\pi \cdot 6.25\,\mathrm{mm}^2} = 25.9\,\mathrm{MPa}$$

b. Quel est l'allongement mesuré dans chaque fil ($E = 3\,\mathrm{GPa}, \nu = 0.35$). La déformation élastique, et donc l'allongement, est reliée à la contrainte par la loi de Hooke (ici, le coefficient de Poisson ne sert pas, il permettrait de calculer de combien le fil change de section lorsqu'il est chargé) :

$$\sigma_n = E\varepsilon_n = E\frac{\Delta L}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta L = \frac{\sigma_n L}{E}$$

Soit :

$$\Delta L_{AB} = \frac{\sigma_{AB}\ L_{AB}}{E} = \frac{25.4\,\mathrm{MPa}}{3\,\mathrm{GPa}} \cdot \frac{50\,\mathrm{cm}}{\sin(60)} = 0.49\,\mathrm{cm}$$

$$\Delta L_{AC} = \frac{\sigma_{AC}\ L_{AC}}{E} = \frac{25.9\,\mathrm{MPa}}{3\,\mathrm{GPa}} \cdot \frac{50\,\mathrm{cm}}{\sin(45)} = 0.61\,\mathrm{cm}$$

c. Sachant que la limite d'élasticité du nylon est de 45 MPa, déterminez la masse maximale que ces fils peuvent soutenir sans subir de déformation plastique. La force maximale applicable sans déformation plastique est donnée par :

$$F^{max} = \sigma_y S$$

Ce qui correspond à des masses de :

$$F_1^{max} = \frac{m_1^{max} g}{\sin(60) + \cos(60)} = \sigma_y \pi r_1^2$$

$$m_1^{max} = \frac{\sigma_y \pi r_1^2 (\sin(60) + \cos(60))}{g} = 177.2\,\mathrm{kg}$$

et

$$F_2^{max} = \frac{m_2^{max} g}{\sin(60) + \cos(60)} \frac{\cos(60)}{\cos(45)} = \sigma_y \pi r_0^2$$

$$m_2^{max} = \frac{\sigma_y \pi r_2^2 (\sin(60) + \cos(60))}{g} \frac{\cos(45)}{\cos(60)} = 174.0\,\mathrm{kg}$$

Cette dernière est donc la masse maximale.