EPFL

Energie du vide et seconde quantisation

Oscillateur harmonique
(champ électromagnétique)

$$H(Q,P,t) = \frac{\hbar\omega}{2} \cdot \left(P^2 + Q^2\right)$$

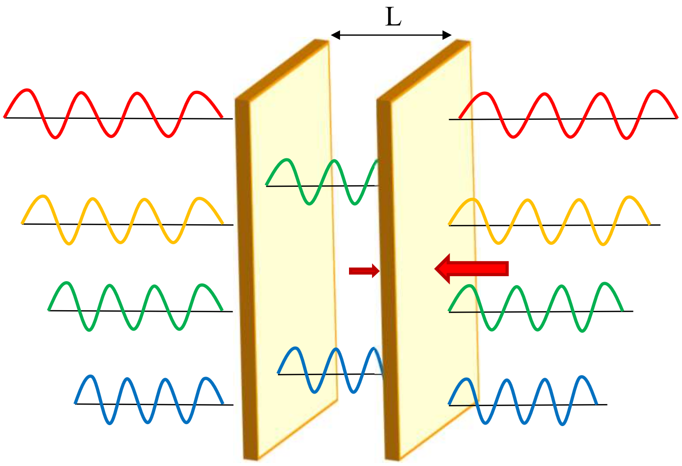
$$\boxed{H = \hbar\omega \cdot \left(a_+ a_- + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\boxed{\left[a_+, a_-\right] = -1}$$

= n = nombre de photons dans le mode

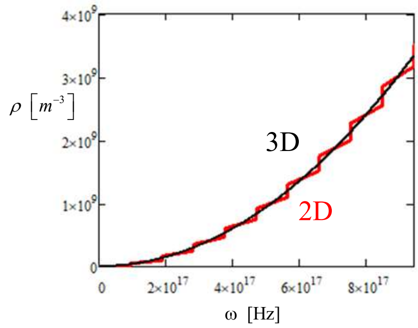
= Energie du vide pour ce mode

Effet Casimir
entre deux plaques métalliques: **Energie du vide**



$$E_{2D} = \sum_n \frac{1}{2}\hbar\omega_n \qquad E_{3D} = \int \frac{1}{2}\hbar\omega\, dn$$

Densité d'états



2D: entre les plaques
3D: à l'extérieur

Pression de Casimir

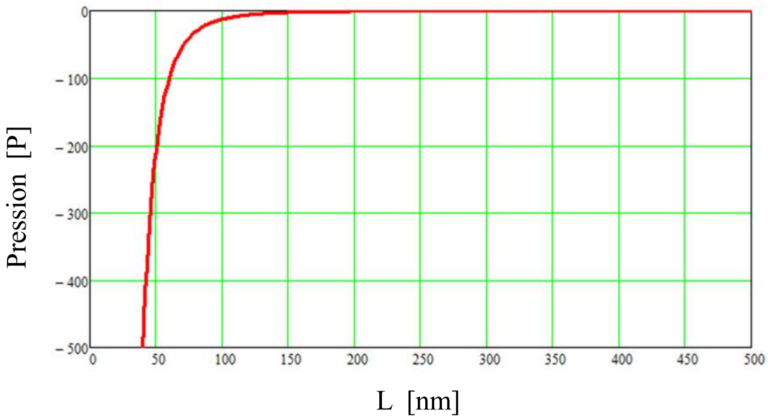
$$\frac{F_C(L)}{A} = -\frac{\hbar c\cdot\pi^2}{240}\cdot\frac{1}{L^4}$$

B. Duplantier, «introduction à l'effet Casimir», séminaire Poincaré 1 (2002), 41-54
http://www.bourbaphy.fr/duplantier.pdf

Effet Casimir
entre deux plaques métalliques

Pression de Casimir

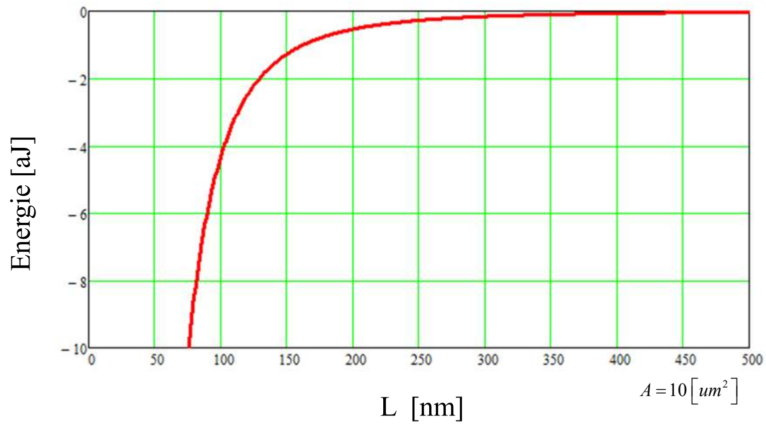
$$\frac{F_C(L)}{A} = -\frac{\hbar c \cdot \pi^2}{240} \cdot \frac{1}{L^4}$$



B. Duplantier, «introduction à l'effet Casimir», séminaire Poincaré 1 (2002), 41-54
http://www.bourbaphy.fr/duplantier.pdf

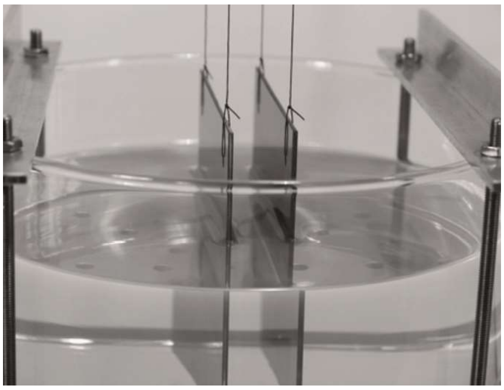
Effet Casimir
entre deux plaques métalliques

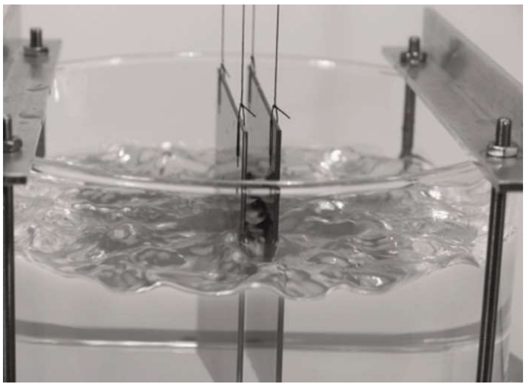
Energie de Casimir $E_C(L) = -\frac{\hbar c \cdot \pi^2}{720} \cdot \frac{A}{L^3}$



B. Duplantier, «introduction à l'effet Casimir», séminaire Poincaré 1 (2002), 41-54
http://www.bourbaphy.fr/duplantier.pdf

Analogie avec des vagues dans l'eau

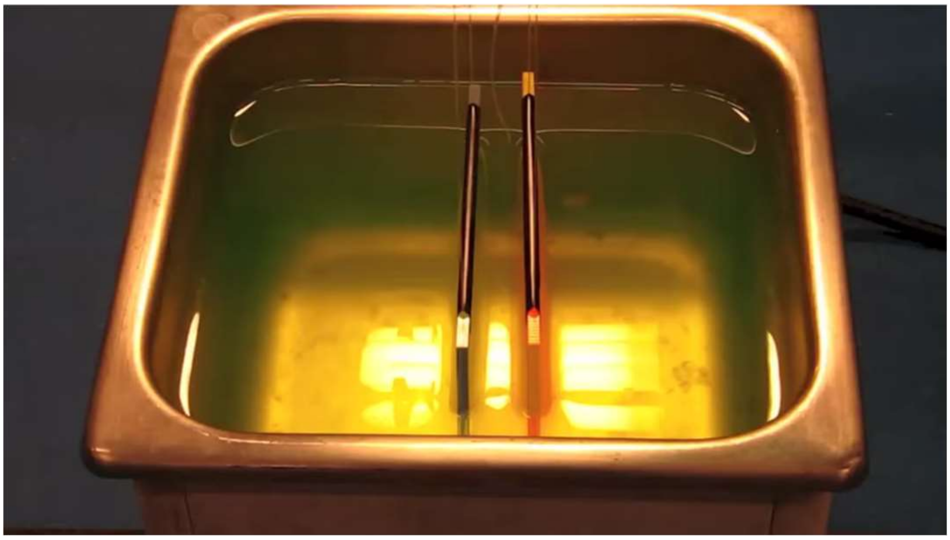




B. C. Denardo, J. J. Puda, and A. Larraza, "A water wave analog of the Casimir effect"
American Journal of Physics, Vol. 77, Iss. 12, pp. 1095 (2009); https://dx.doi.org/10.1119/1.3211416

Analogie avec des vagues dans l'eau

https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File%3AWater_wave_analogue_of_Casimir_effect.ogv



B. C. Denardo, J. J. Puda, and A. Larraza, "A water wave analog of the Casimir effect"
American Journal of Physics, Vol. 77, Iss. 12, pp. 1095 (2009); https://dx.doi.org/10.1119/1.3211416

Calcul complet: 3D

Densité de modes avec un spectre continu (3D): $\rho_{3D}(\omega) = 2 \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi K^2 \cdot dK = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\omega^2 \cdot d\omega}{c^3}$

Limitation des hautes énergies par la fonction: $e^{-\gamma \cdot \omega}$ *avec* $\gamma \to 0_+$

Chaque mode apporte l'énergie du vide $E_{vac} = \frac{1}{2}\hbar\omega$

Densité d'énergie du vide en 3D: $e_{3D} = \int_0^\infty \frac{1}{2}\hbar\omega \cdot \rho_{3D}(\omega) \cdot e^{-\gamma \cdot \omega} \cdot d\omega$

Energie du vide dans le volume A.L:

$$E_{3D} = (AL) \cdot e_{3D} = (AL) \cdot \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \cdot \int_0^\infty \omega^3 \cdot e^{-\gamma \cdot \omega} \cdot d\omega = \frac{3 \cdot \hbar}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{\gamma^4} \cdot (AL)$$

On utilise la relation: $\int_0^\infty \omega^3 \cdot e^{-\gamma \cdot \omega} \cdot d\omega = \frac{6}{\gamma^4}$

Calcul complet: 2D

Modes possibles en x: $L = n \cdot \frac{\lambda_n}{2} \Rightarrow K_{n,x} = \frac{\pi}{L} \cdot n \Rightarrow \omega = c \cdot \sqrt{\left(\frac{\pi}{L} n\right)^2 + K_y^2 + K_z^2}$

Densité de modes (2D) pour l'onde n:

$$\rho_{2D,n}(\omega) = 2 \cdot \frac{1}{(2\pi)^2 L} \cdot 2\pi K \cdot dK = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \frac{\omega \cdot d\omega}{c^2} \quad pour \quad \omega \geq \omega_n \equiv \frac{c\pi}{L} n$$

Energie (2D) du vide pour l'onde n dans le volume A.L :

$$E_{2D,n} = (AL) \cdot e_{2D,n} = A \cdot \frac{\hbar}{2\pi c^2} \cdot \int_{\omega_n}^{\infty} \omega^2 \cdot e^{-\gamma \cdot \omega} \cdot d\omega = A \cdot \frac{\hbar}{2\pi c^2} \cdot \left[\frac{\omega_n^2}{\gamma} e^{-\gamma\omega_n} + \frac{2\omega_n}{\gamma^2} e^{-\gamma\omega_n} + \frac{2}{\gamma^3} e^{-\gamma\omega_n} \right]$$

Energie du vide dans le volume A.L:

$$E_{2D} = \frac{E_{2D,0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} E_{2D,n} = A \cdot \frac{\hbar}{2\pi c^2} \cdot \left[\frac{1}{\gamma^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2}{\gamma} e^{-\gamma\omega_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\omega_n}{\gamma^2} e^{-\gamma\omega_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\gamma^3} e^{-\gamma\omega_n} \right]$$

On utilise la relation: $$\int_{\omega_n}^{\infty} \omega^2 \cdot e^{-\gamma \cdot \omega} \cdot d\omega = \frac{\omega_n^2}{\gamma} e^{-\gamma\omega_n} + \frac{2\omega_n}{\gamma^2} e^{-\gamma\omega_n} + \frac{2}{\gamma^3} e^{-\gamma\omega_n}$$

Et il faut également remarquer que le mode n=0 compte pour ½.

Les autres modes comptent en +Kx et en –Kx.

Calcul complet: 2D

Energie du vide dans le volume A.L:

$$E_{2D} = \frac{E_{2D,0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} E_{2D,n} = A \cdot \frac{\hbar}{2\pi c^2} \cdot \left[\frac{1}{\gamma^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2}{\gamma} e^{-\gamma\omega_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\omega_n}{\gamma^2} e^{-\gamma\omega_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\gamma^3} e^{-\gamma\omega_n} \right]$$

$$E_{2D} = \cancel{\frac{A\hbar}{2\pi c^2\gamma^3}} + \left[\frac{AL\hbar}{\pi^2 c^3 \gamma^4} - \cancel{\frac{A\hbar\pi^2 c}{240 L^3}} \right] + \left[\frac{AL\hbar}{\pi^2 c^3 \gamma^4} - \cancel{\frac{A\hbar\pi^2 c}{12 c L \gamma^2}} + \cancel{\frac{A\hbar\pi^2 c}{240 L^3}} \right] + \left[\frac{AL\hbar}{\pi^2 c^3 \gamma^4} - \cancel{\frac{A\hbar}{2\pi c^2\gamma^3}} + \cancel{\frac{A\hbar\pi^2 c}{12 c L \gamma^2}} - \frac{A\hbar\pi^2 c}{720 L^3} \right]$$

$$E_{2D} = \frac{3\cdot\hbar}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{\gamma^4} \cdot (AL) - \frac{\hbar\pi^2 c}{720} \cdot \frac{A}{L^3} = E_{3D} - \frac{\hbar\pi^2 c}{720} \cdot \frac{A}{L^3}$$

Energie de Casimir:

$$\boxed{E_C = E_{2D} - E_{3D} = -\frac{\hbar\pi^2 c}{720} \cdot \frac{A}{L^3}}$$

Force de Casimir:

$$\boxed{F_C = -\frac{\partial E_C}{\partial L} = -\frac{\hbar\pi^2 c}{240} \cdot \frac{A}{L^4}}$$

Indépendant de γ !!

On utilise les relations:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-a\cdot n} = \frac{e^a (e^a + 1)}{\left(e^a - 1\right)^3} \cong \frac{2}{a^3} - \frac{a}{120} \quad si \ \ a \to 0_+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-a\cdot n} = \frac{e^a}{\left(e^a - 1\right)^2} \cong \frac{1}{a^2} - \frac{1}{12} + \frac{a^2}{240} \quad si \ \ a \to 0_+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a\cdot n} = \frac{1}{e^a - 1} \cong \frac{1}{a} - \frac{1}{2} + \frac{a}{12} - \frac{a^3}{720} \quad si \ \ a \to 0_+$$