PAB

Rappel: propagateurs 2x2

$$H = \hbar\omega_m \cdot \mathbb{1} + \frac{\hbar\Omega}{2} \cdot \left(n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z \right)$$

$$U(t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t} = \underbrace{e^{-i\cdot\omega_m\cdot t}}_{\text{Phase commune}} \cdot \underbrace{\left(\cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right)\cdot \mathbb{1} - i\sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right)\cdot \left(n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z \right) \right)}_{\text{Rotation d'angle } \Omega.t \text{ de la sphère de Bloch autour de l'axe } \vec{n} = \left(n_x \quad n_y \quad n_z \right)}$$

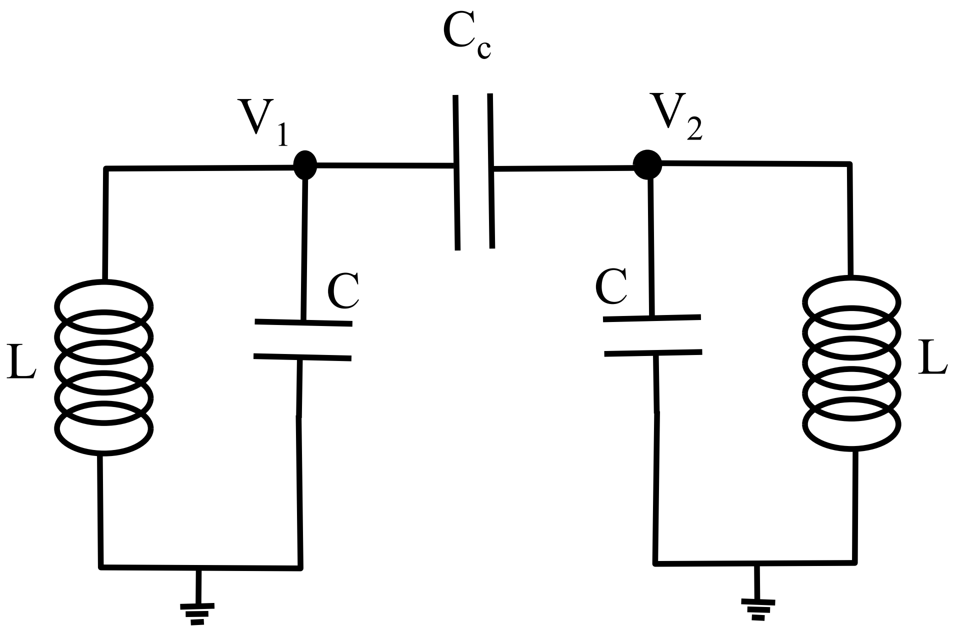
$$X_\varphi \equiv e^{-i\frac{\varphi}{2}\sigma_x} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) & -i\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ -i\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} \qquad Y_\varphi \equiv e^{-i\frac{\varphi}{2}\sigma_Y} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} \qquad Z_\varphi \equiv e^{-i\frac{\varphi}{2}\sigma_Z} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}$$

PAB

Exercice 12.1: Hamiltonien de couplage iSWAP

$$H_c \approx -T \cdot \left(a_{1+} a_{2-} + a_{1-} a_{2+} \right)$$

$$H_c \approx -T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Reprenons l'exercice 9.3:
Considérez seulement deux modes dans chaque résonateur (2 qubits)

$$iSWAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminez le propagateur U(t)

2) Déterminez le temps t_1 pour obtenir la fonction iSWAP

Hamiltonien de couplage

Oscillations de Rabi

Single Qubit:

$$H_c = \begin{pmatrix} 0 & -T \\ -T & 0 \end{pmatrix} = -T \cdot \sigma_X \quad \Rightarrow$$

$$U(t) \equiv e^{-i\frac{H_c}{\hbar}t} = e^{i\frac{T}{\hbar}t \cdot \sigma_x} = \cos\left(\tfrac{T}{\hbar}t\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\sin\left(\tfrac{T}{\hbar}t\right)\sigma_x = \begin{pmatrix} \cos\left(\tfrac{T}{\hbar}t\right) & i\sin\left(\tfrac{T}{\hbar}t\right) \\ i\sin\left(\tfrac{T}{\hbar}t\right) & \cos\left(\tfrac{T}{\hbar}t\right) \end{pmatrix}$$

Paire de Qubits en couplage capacitif:

$$H_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T & 0 \\ 0 & -T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$U(t) \equiv e^{-i\frac{H_c}{\hbar}t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{T}{\hbar}t) & i\sin(\frac{T}{\hbar}t) & 0 \\ 0 & i\sin(\frac{T}{\hbar}t) & \cos(\frac{T}{\hbar}t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PAB

Exercice 12.1:
Hamiltonien de couplage: autre solution

Hamiltonien

$$H_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T & 0 \\ 0 & -T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Vecteurs et valeurs propres

$$|\varphi_{00}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\varphi_{sym}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\varphi_{asym}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\varphi_{11}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{00} = 0 \quad \lambda_{sym} = -T \quad \lambda_{asym} = T \quad \lambda_{11} = 0$$

Hamiltonien dans la base des vecteurs propres

$$H_{diag} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice de passage

$$P = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Exercice 12.1:
Hamiltonien de couplage: autre solution

$$H_{diag} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$H_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T & 0 \\ 0 & -T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

Interprétez le résultat

Propagateur dans la base des vecteurs propres

$$U_{diag}(t) = e^{-i\frac{H_{diag}}{\hbar}t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{T}{\hbar}t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{T}{\hbar}t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

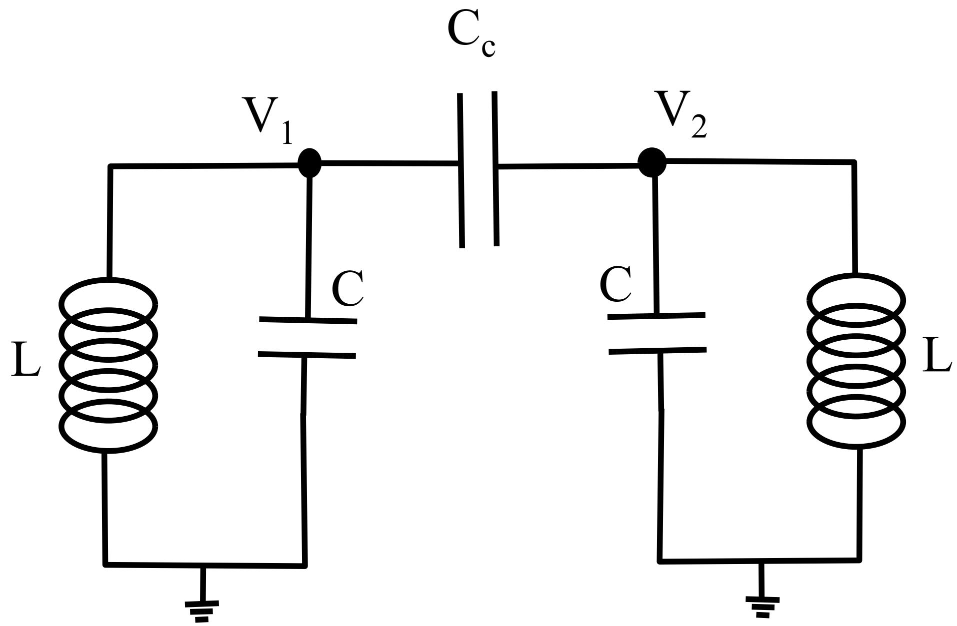
$\Longrightarrow$

Propagateur

$$\boxed{U(t) = P \cdot U_{diag}(t) \cdot P^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{T}{\hbar}t) & i\sin(\frac{T}{\hbar}t) & 0 \\ 0 & i\sin(\frac{T}{\hbar}t) & \cos(\frac{T}{\hbar}t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Hamiltonien de couplage

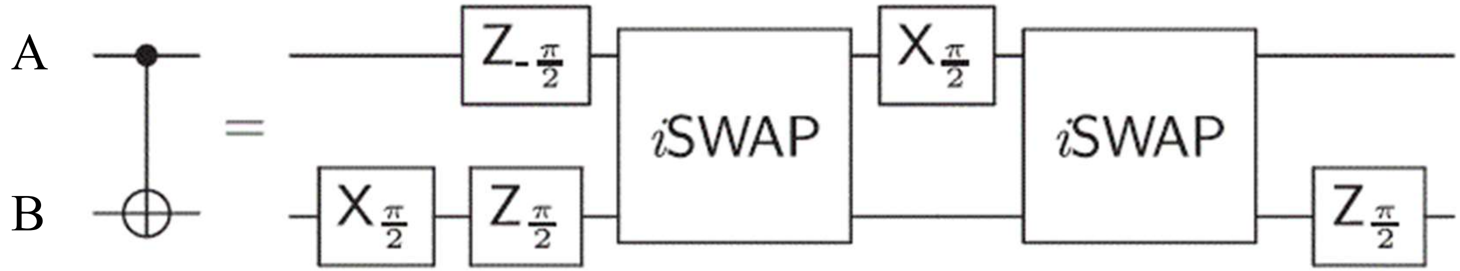
$$U(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\left(\frac{T}{\hbar}t\right) & i\sin\left(\frac{T}{\hbar}t\right) & 0\\ 0 & i\sin\left(\frac{T}{\hbar}t\right) & \cos\left(\frac{T}{\hbar}t\right) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$



$$\boxed{U\left(t_1=\frac{\pi\hbar}{2T}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & i & 0\\ 0 & i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=iSWAP}$$

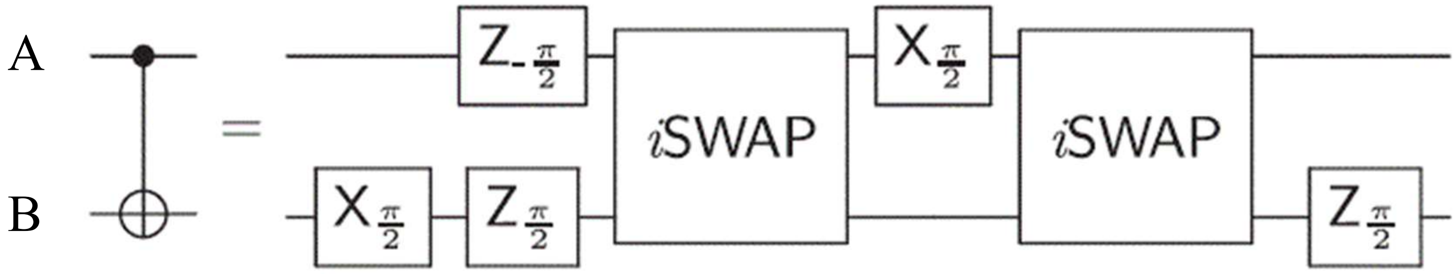
iSWAP to CNOT

Montrez qu'un CNOT peut être obtenu à partir de deux iSWAP



$$X_\varphi \equiv e^{-i\frac{\varphi}{2}\sigma_x} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) & -i\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ -i\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} \qquad Y_\varphi \equiv e^{-i\frac{\varphi}{2}\sigma_Y} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} \qquad Z_\varphi \equiv e^{-i\frac{\varphi}{2}\sigma_Z} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}$$

iSWAP to CNOT



$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1-i&0&0&0\\0&1+i&0&0\\0&0&1-i&0\\0&0&0&1+i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&i&0\\0&i&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&-i&0\\0&1&0&-i\\-i&0&1&0\\0&-i&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&i&0\\0&i&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1+i&0&0&0\\0&1+i&0&0\\0&0&1-i&0\\0&0&0&1-i\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1-i&0&0&0\\0&1+i&0&0\\0&0&1-i&0\\0&0&0&1+i\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-i&0&0\\-i&1&0&0\\0&0&1&-i\\0&0&-i&1\end{pmatrix}=e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$1\otimes Z_{\frac{\pi}{2}} \qquad iSWAP \qquad X_{\frac{\pi}{2}}\otimes 1 \qquad iSWAP \qquad Z_{-\frac{\pi}{2}}\otimes 1 \qquad 1\otimes Z_{\frac{\pi}{2}} \qquad 1\otimes X_{\frac{\pi}{2}} \quad = \quad CNOT$$

Exercice12.2 : Hamiltonien de couplage $\sqrt{SWAP}$

Reprenons l'exercice 9.4

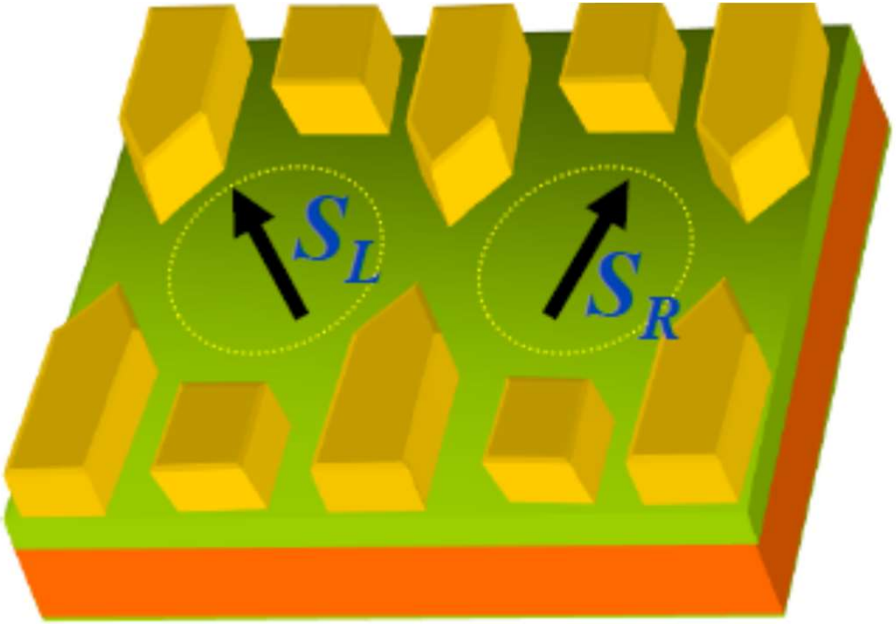
$$H_c = -T \cdot \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

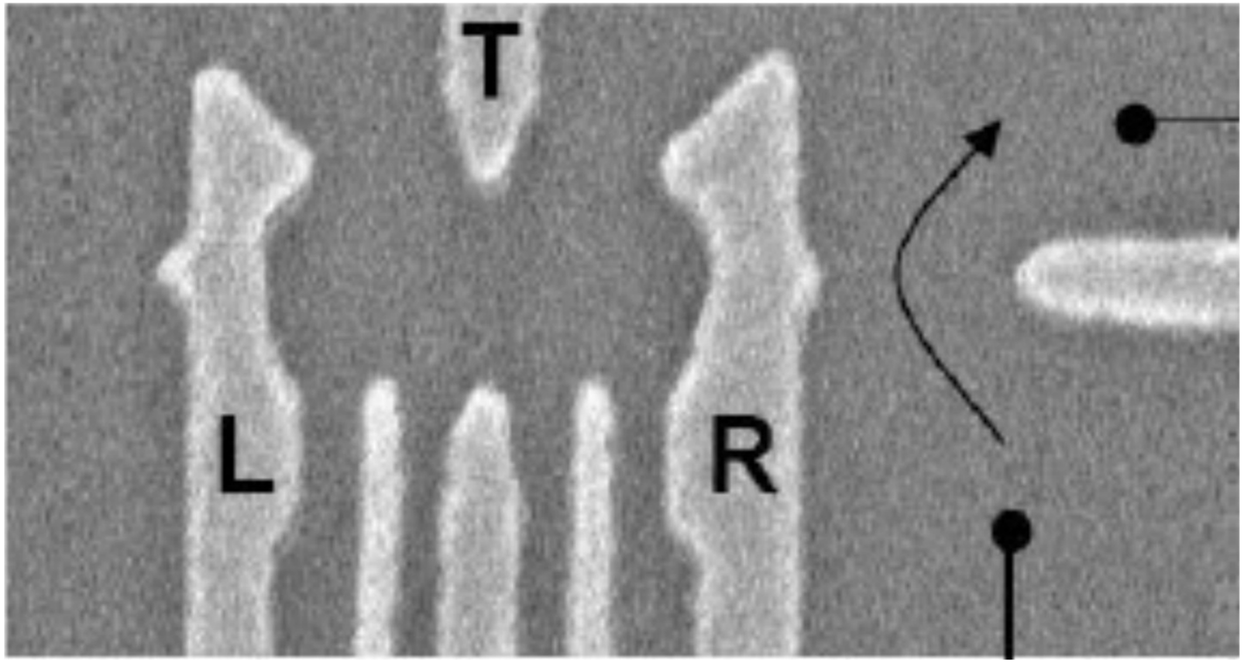
- **Ecrivez l'Hamiltonien dans sa base de vecteurs propres**
- **Exprimez le propagateur dans la base des vecteurs propres**
- **Exprimez ce propagateur dans la base standard**
- **Quel temps t_1 permet d'obtenir la fonction $\sqrt{SWAP}$?**

$$\sqrt{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 \mp i) & \frac{1}{2}(1 \pm i) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 \pm i) & \frac{1}{2}(1 \mp i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Couplage de spin qubits

$$H_c = -T \cdot \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$





Exercice 12.2: Hamiltonien de couplage $\sqrt{SWAP}$

$$H_c = -T \cdot \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \quad \Rightarrow \quad H_c = -T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Singulet:

$$|\varphi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_s = 3T$$

Triplet:

$$|\varphi_{t1}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\varphi_{t2}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad |\varphi_{t3}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_t = -T$$

Etats de Bell, intrication maximale

Calcul dans la base des modes propres

Avec la matrice de passage:

$$H_{diag} = -T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$H_c = P \cdot H_{diag} \cdot P^{\dagger} = -T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul dans la base des modes propres

Propagateur dans la base des modes propres:

$$U_{diag}\left(t\right) = e^{-i\frac{H_{diag}}{\hbar}\cdot t}$$

$$U_{diag}(t) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{T}{\hbar}t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{T}{\hbar}t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3i\frac{T}{\hbar}t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\frac{T}{\hbar}t} \end{pmatrix}$$

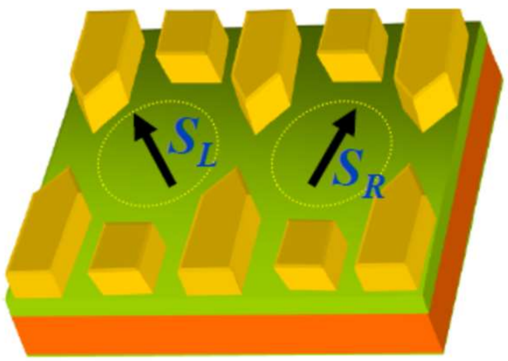
Propagateur dans la base standard:

$$U(t) = P \cdot U_{diag}(t) \cdot P^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-3i\frac{T}{\hbar}t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{T}{\hbar}t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{T}{\hbar}t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\frac{T}{\hbar}t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

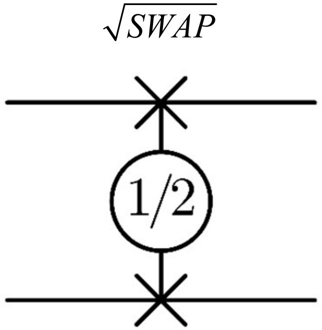
Calcul dans la base standard

$$H_c = -T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad U(t) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{T}{\hbar}t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{e^{-i\frac{T}{\hbar}t} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2T}{\hbar}t\right) & i\cdot\sin\left(\frac{2T}{\hbar}t\right) \\ i\cdot\sin\left(\frac{2T}{\hbar}t\right) & \cos\left(\frac{2T}{\hbar}t\right) \end{pmatrix}} & 0 \\ 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\frac{T}{\hbar}t} \end{pmatrix}$$

Interprétez le résultat !

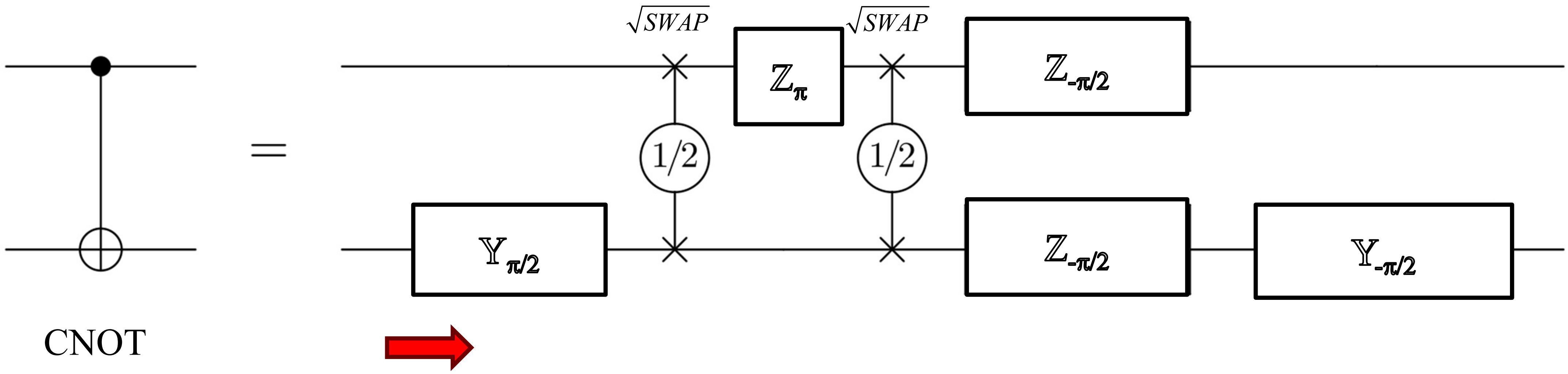


$$U\left(t_1 = \frac{\pi\hbar}{8T}\right) = e^{i\frac{\pi}{8}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1+i) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1-i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{i\frac{\pi}{8}} \cdot \sqrt{SWAP}$$

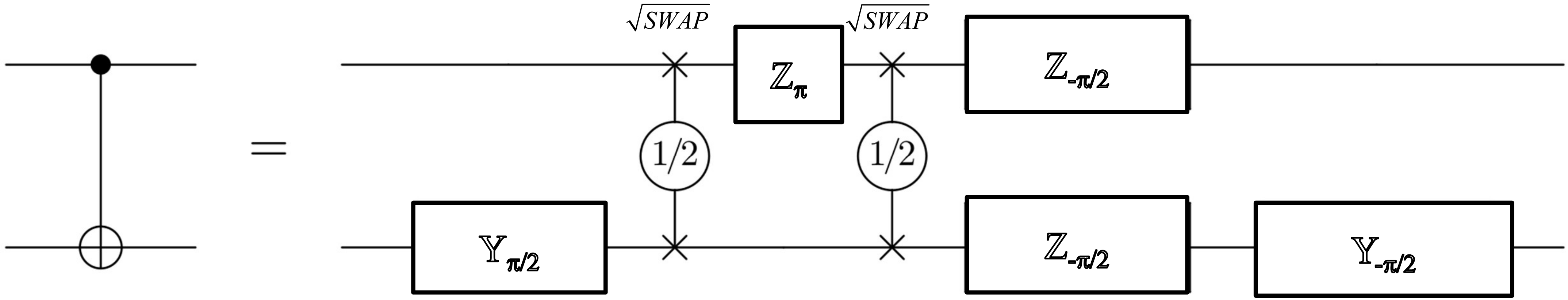


Génération d'un CNOT à partir de deux $\sqrt{SWAP}$

Montrez qu'un CNOT peut être obtenu à partir de deux $\sqrt{SWAP}$



Génération d'un CNOT à partir de deux $\sqrt{SWAP}$



CNOT

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1+i&0&0&0\\0&1-i&0&0\\0&0&1+i&0\\0&0&0&1-i\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1+i&0&0&0\\0&1+i&0&0\\0&0&1-i&0\\0&0&0&1-i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1+i}{2}&\frac{1-i}{2}&0\\0&\frac{1-i}{2}&\frac{1+i}{2}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-i&0&0&0\\0&-i&0&0\\0&0&i&0\\0&0&0&i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1+i}{2}&\frac{1-i}{2}&0\\0&\frac{1-i}{2}&\frac{1+i}{2}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$1\otimes Y_{-\frac{\pi}{2}} \qquad 1\otimes Z_{-\frac{\pi}{2}} \qquad Z_{-\frac{\pi}{2}}\otimes 1 \qquad \sqrt{SWAP} \qquad Z_{\pi}\otimes 1 \qquad \sqrt{SWAP} \qquad 1\otimes Y_{\frac{\pi}{2}} \qquad = CNOT$$