# Conversion Électromécanique I

Corrigé: **Système électrodynamique**

## Champ magnétique de l'aimant

En premier, il faut calculer l'induction dans l'entrefer $B$ générée par l'aimant seul. On pose le système:

$$B_\delta = \mu_0 H_\delta \tag{1}$$

$$B_a = B_0 + \mu_{dr}\mu_0 H_a \tag{2}$$

$$H_a l_a + H_\delta \delta = 0 \tag{3}$$

$$B_a S_a = B_\delta S_\delta \tag{4}$$

et, comme $S_a = S_\delta$, (4) donne $B_a = B_\delta = B$.

La solution du système (1)-(4) est:

$$B = \frac{B_0}{1 + \frac{\delta}{l_a}\mu_{dr}} = \frac{1.1}{1 + \frac{5}{5}1.05} = 0.5366 \text{ T} \tag{5}$$

## Flux de la bobine Ψ créé par l'aimant

Pour poser les équations de la force et de la tension, il faut déterminer le flux de la bobine créé par l'aimant Ψ (Fig. 1).

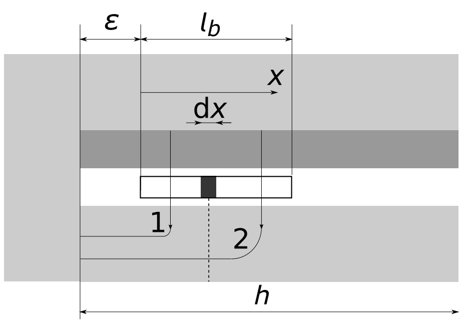


Figure 1: Le flux de la bobine

Toutes les spires de la bobine ne sont pas traversées par le même flux. L'élément d$x$ de la bobine est traversé par le flux correspondant aux lignes du flux 2. Ce flux Φ est donné par:

$$\Phi = BS = B(h - \varepsilon - x)L \tag{6}$$

où $B$ est donné par (5), et $L$ est la profondeur du système. Les lignes du flux 1 ne traversent pas l'élément d$x$.

Cela signifie que l'élément d$x$, qui contient:

$$\mathrm{d}N = N\frac{\mathrm{d}x}{l_b} \tag{7}$$

spires, capte le flux totalisé de:

$$\mathrm{d}\Psi = 2\Phi\,\mathrm{d}N = 2NBL\frac{1}{l_b}(h-\varepsilon-x)\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

Le facteur 2 est introduit à cause de la symétrie.

L'intégration donne le flux:

$$\Psi = 2NBL\frac{1}{l_b}\int_0^{l_b}(h-\varepsilon-x)\,\mathrm{d}x = 2NBL(h-\varepsilon-\frac{l_b}{2}) \tag{9}$$

Sa dérivée par rapport à $\varepsilon$ est:

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\varepsilon} = K = -2NBL \tag{10}$$

La constante $K$ peut être appelée la constante de la force ou la constante de la tension induite, comme il sera démontré par la suite. Sa valeur absolue de 25.756 peut être donné soit en N/A soit en V/(m/s).

### Equation de la force $f$

La force agissant sur la bobine est:

$$f = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\Lambda_a}{\mathrm{d}\varepsilon}\Theta_a^2 \;+\; \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}L_b}{\mathrm{d}\varepsilon}i^2 \;+\; \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\varepsilon}i \tag{11}$$

Dans un système électrodynamique (un aimant fixe et une bobine mobile), l'absence de circuit ferromagnétique associé à la bobine entraîne la suppression du couple réluctant dû à l'aimant seul. Cela signifie que le premier terme en (11) est égal à zéro.

Le deuxième terme en (11) est égal à zéro, conformément à la donnée $L_b = const$. Finalement, en utilisant (10), la force est donnée par:

$$f = Ki = -2NBLi \tag{12}$$

La force est proportionnelle au courant avec la constante $K$.

Il est important de noter que le même résultat peut être obtenu par la force de Laplace par laquelle le champ magnétique de l'aimant agit sur la bobine.

Pour avoir une force qui tend à éjecter la bobine ($f > 0$), il faut que le courant $i$ soit négatif. Pour le courant statique de $i = I = -1$ A (cas 1), la force est de $f = 25.756$ N.

### Equation de la tension $u$

L'équation de la tension de la bobine est:

$$u = Ri + L_b \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} \tag{13}$$

Le troisième terme, la tension induite $e$ créée par l'aimant dans la bobine, peut être transformé comme suit:

$$e = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = Kv \tag{14}$$

La tension induite créée par l'aimant est proportionnelle à la vitesse avec la constante $K$. Ainsi:

$$\frac{f}{i} = \frac{e}{v} \tag{15}$$

La puissance électromagnétique $p$ est donnée par:

$$p = fv = ei \tag{16}$$

### Equation de mouvement

L'équation de mouvement (loi de Newton) est:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f \tag{17}$$

Ainsi, le système de 2 équations différentielles à résoudre est donné par:

$$U = Ri + L_b \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Kv \tag{18}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Ki \tag{19}$$

Après élimination de $i$, on obtient l'équation du deuxième ordre:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L_b}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{K^2}{mL_b}v = \frac{KU}{mL_b} \tag{20}$$

### Résolution de l'équation de mouvement

L'équation caractéristique correspondante à (20) est:

$$r^2 + \frac{R}{L_b}r + \frac{K^2}{mL_b} = 0 \tag{21}$$

Sa solution est:

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L_b} \pm \jmath\sqrt{\frac{K^2}{mL_b} - \frac{R^2}{4L_b^2}} = a \pm \jmath b \tag{22}$$

Valeurs numériques sont $a = -218.18$ et $b = 270.20$.

La solution particulière de (20) est $v = U/K$, et cela donne la solution finale:

$$v = \frac{U}{K} + (C_1 \cos bt + C_2 \sin bt)e^{at} \tag{23}$$

En utilisant (19), le courant est:

$$i = \frac{m}{K}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{K}[(aC_1 + bC_2)\cos bt + (aC_2 - bC_1)\sin bt]e^{at} \tag{24}$$

Pour déterminer les constantes $C_1$ et $C_2$, les conditions initiales $v|_{t=0} = 0$ et $i|_{t=0} = 0$ sont combinées avec (23) et (24). La solution pour les constantes est $C_1 = -U/K$ et $C_2 = aU/(bK)$.

Les solution finales pour la vitesse et le courant sont:

$$v = \frac{U}{K} - \frac{U}{K}(\cos bt - \frac{a}{b}\sin bt)e^{at} \tag{25}$$

$$i = \frac{mU(a^2 + b^2)}{bK^2}\sin bt\, e^{at} \tag{26}$$

La position $\varepsilon$ est:

$$\varepsilon = \int v\,\mathrm{d}t = \frac{U}{K}t - \frac{U}{K}\frac{1}{a^2 + b^2}(2a\cos bt + \frac{b^2 - a^2}{b}\sin bt)e^{at} + C_3 \tag{27}$$

Pour déterminer la constante $C_3$, la condition initiale $\varepsilon|_{t=0} = 0$ est appliquée. Cela donne $C_3 = 2aU/(K(a^2+b^2))$, et la solution finale est:

$$\varepsilon = \frac{U}{K}t - \frac{U}{K}\frac{1}{a^2+b^2}(2a\cos bt + \frac{b^2-a^2}{b}\sin bt)e^{at} + \frac{2aU}{K(a^2+b^2)} \tag{28}$$

Les fonctions $e(t)$, $v(t)$, $i(t)$ et $f(t)$ sont présentées à la Fig. 2.

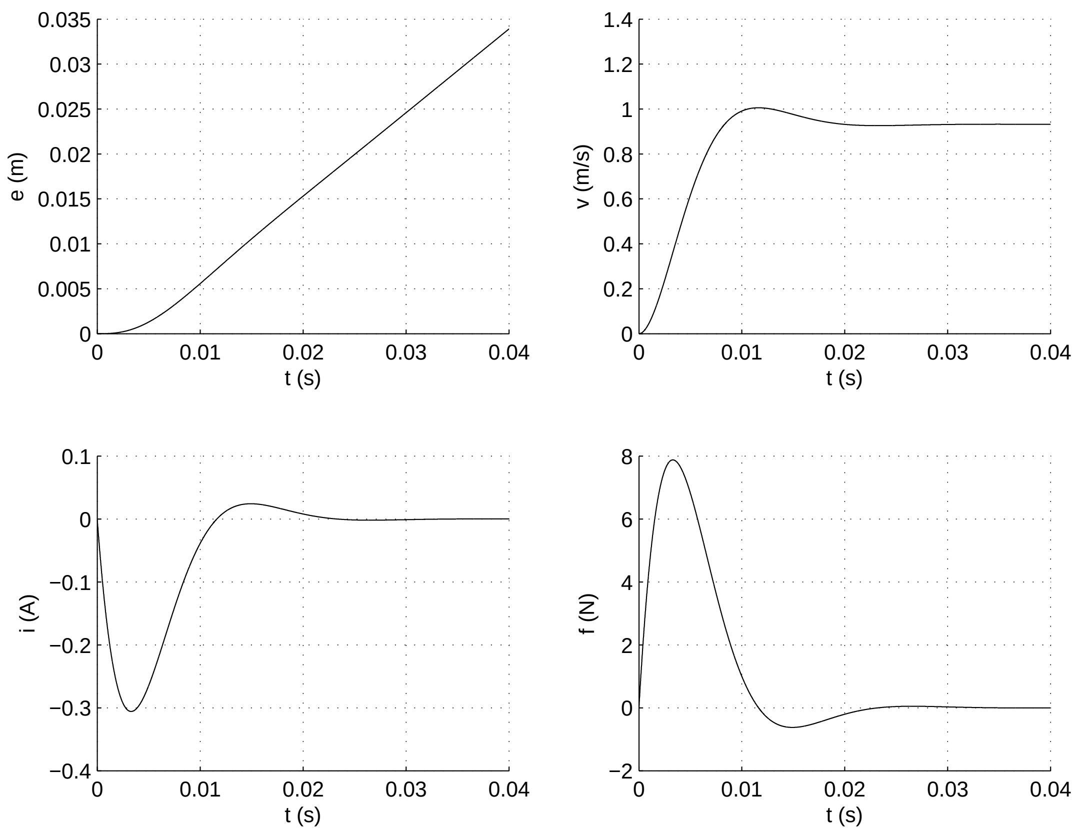


Figure 2: Les fonctions $e(t)$, $v(t)$, $i(t)$ et $f(t)$