Actionneurs et systèmes électromagnétiques I

Corrigé: **Transformateur monophasé**

Le schéma équivalent du transformateur, rapporté au primaire, est présenté à la Fig. 1.

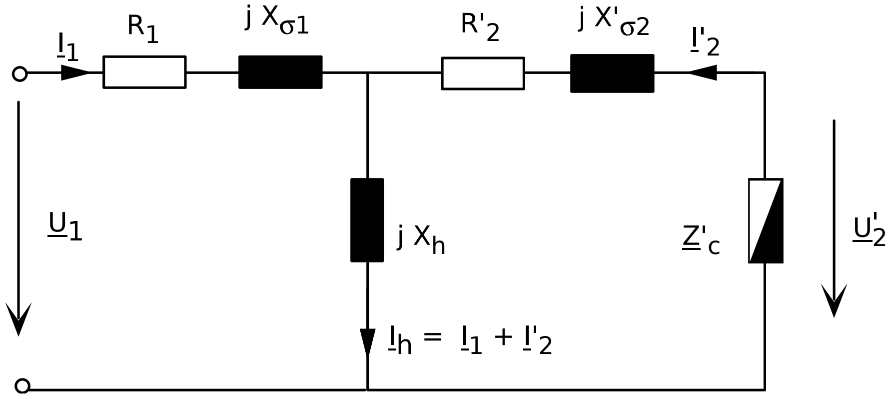

Figure 1: Schéma électrique équivalent du transformateur

Les équations des tensions sur les deux mailles (primaire et secondaire) sont:

$$\underline{U}_1 = R_1\underline{I}_1 + \jmath\omega L_{\sigma 1}\underline{I}_1 + \jmath\omega L_h(\underline{I}_1 + \underline{I}_2') = R_1\underline{I}_1 + \jmath X_{\sigma 1}\underline{I}_1 + \jmath X_h(\underline{I}_1 + \underline{I}_2') \quad (1)$$

$$\underline{U}_2' = R_2'\underline{I}_2' + \jmath\omega L_{\sigma 2}'\underline{I}_2' + \jmath\omega L_h(\underline{I}_1 + \underline{I}_2') = R_2'\underline{I}_2' + \jmath X_{\sigma 2}'\underline{I}_2' + \jmath X_h(\underline{I}_1 + \underline{I}_2') \quad (2)$$

L'équation de la charge au secondaire $\underline{U}_2 = \underline{Z}_c\underline{I}_2$ peut également être rapportée au primaire:

$$\underline{U}_2' = -\underline{Z}_c'\underline{I}_2' \quad (3)$$

Toutes les impédances du secondaire sont rapportées au primaire en les multipliant par le carré du rapport de transformation $\ddot{u} = \frac{N_1}{N_2}$:

$$R_2' = \ddot{u}^2 R_2 \quad (4)$$

$$X_{\sigma 2}' = \ddot{u}^2 X_{\sigma 2} \quad (5)$$

$$\underline{Z}_c' = \ddot{u}^2 \underline{Z}_c \quad (6)$$

Quant à la réactance de champ principal X_h, elle est obtenue à partir de la réactance mutuelle:

$$X_h = \ddot{u} X_{12} \quad (7)$$

En regroupant les impédances en série, on obtient le circuit de la Fig. 2, avec: $\underline{Z}_1 = R_1 + \jmath X_{\sigma 1}$, $\underline{Z}_2' = R_2' + \jmath X_{\sigma 2}'$ et $\underline{Z}_h = \jmath X_h$.

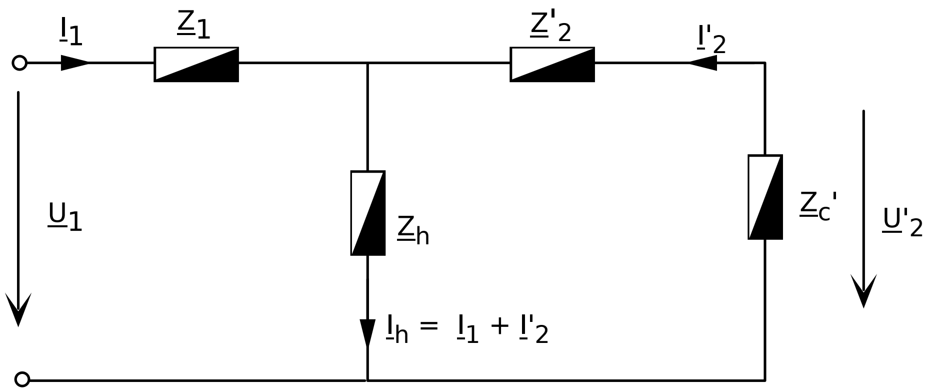

Figure 2: Schéma équivalent du transformateur simplifié

Pour obtenir la tension au secondaire $\underline{U}'_2$, il suffit d'exprimer la tension $\underline{U}_h$ aux bornes de $\underline{Z}_h$ en utilisant un diviseur de tension:

$$\underline{U}_h = \frac{\underline{U}_1(\underline{Z}_h //(\underline{Z}'_2 + \underline{Z}'_c))}{\underline{Z}_1 + (\underline{Z}_h //(\underline{Z}'_2 + \underline{Z}'_c))} \tag{8}$$

Le courant $\underline{I}'_2$ est alors obtenu en divisant cette dernière tension par la somme des impédances rapportées du secondaire et de la charge:

$$\underline{I}'_2 = -\frac{\underline{Z}_h}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_h + \underline{Z}'_2 + \underline{Z}'_c) + \underline{Z}_h(\underline{Z}'_2 + \underline{Z}'_c)}\underline{U}_1 \tag{9}$$

On obtient $\underline{U}'_2$ en remplaçant (9) dans (3):

$$\underline{U}'_2 = \frac{\underline{Z}_h\underline{Z}'_c}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_h + \underline{Z}'_2 + \underline{Z}'_c) + \underline{Z}_h(\underline{Z}'_2 + \underline{Z}'_c)}\underline{U}_1 \tag{10}$$

Dans les gros transformateurs, on peut faire l'hypothèse de Kapp et supposer que la réactance de champ principal est très grande: $|\underline{Z}_h| \gg |\underline{Z}'_2 + \underline{Z}'_c|$. La tension au secondaire devient alors:

$$\underline{U}'_2 = \frac{\underline{Z}'_c}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}'_2 + \underline{Z}'_c}\underline{U}_1 \tag{11}$$

Application numérique

Les tensions nominales permettent de déterminer le rapport de transformation $\ddot{u} = N_1/N_2$:

$$\ddot{u} = \frac{U_{1n}}{U_{2n}} = \frac{6000\ \text{V}}{400\ \text{V}} = 15 \tag{12}$$

Les autres paramètres sont:

$$\underline{Z}_1 = 45 + \jmath 60\ \Omega \tag{13}$$

$$\underline{Z}'_2 = 15^2 \cdot 0.2 + \jmath 15^2 \cdot 0.3 = 45 + \jmath 67.5\ \Omega \tag{14}$$

$$\underline{Z}_h = \jmath \ddot{u} X_{12} = \jmath 15 \cdot 4000 = 60000\ \Omega \tag{15}$$

$$\underline{Z}'_c = \ddot{u}^2 \underline{Z}_c = 15^2 \cdot 7 e^{\jmath\phi} = 1575 e^{\jmath\phi}\ \Omega \tag{16}$$

avec $\phi = 0, \pi/2, -\pi/2$ correspondant aux cas 1, 2 et 3. Dans les trois cas, il est possible d'effectuer l'hypothèse de Kapp (11) et de négliger la réactance de la branche magnétisante (ou de champ principal) $\underline{Z}_h$.

Finalement, on obtient:

$$\underline{U}'_2 = \begin{cases} 5691 e^{-\jmath 4.38^\circ}\ \mathrm{V} & \text{cas 1} \\ 5543 e^{+\jmath 3.03^\circ}\ \mathrm{V} & \text{cas 2} \\ 6516 e^{-\jmath 3.56^\circ}\ \mathrm{V} & \text{cas 3} \end{cases} \tag{17}$$

En rapportant tout au secondaire, on obtient:

$$U_2 = \frac{|\underline{U}'_2|}{\ddot{u}} = \begin{cases} 377.3\ \mathrm{V} & \text{cas 1} \\ 369.5\ \mathrm{V} & \text{cas 2} \\ 434.4\ \mathrm{V} & \text{cas 3} \end{cases} \tag{18}$$

Annexe: Développement équations de tensions pour un transformateur

Les équations pour les tensions primaire et secondaire sont:

$$u_1 = R_1 i_1 + L_{11}\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt} = R_1 i_1 + L_{\sigma 1}\frac{di_1}{dt} + L_{h1}\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt} \tag{19}$$

$$u_2 = R_2 i_2 + L_{22}\frac{di_2}{dt} + L_{12}\frac{di_1}{dt} = R_2 i_2 + L_{\sigma 2}\frac{di_2}{dt} + L_{h2}\frac{di_2}{dt} + L_{12}\frac{di_1}{dt} \tag{20}$$

Pour les inductances, on sait que $L_{h1} = N_1^2\Lambda$, $L_{h2} = N_2^2\Lambda$ et $L_{12} = N_1 N_2 \Lambda$. En introduisant $L_h = L_{h1}$ et $\ddot{u} = N_1/N_2$, on a $L_{h2} = \frac{1}{\ddot{u}^2}L_h$ et $L_{12} = \frac{1}{\ddot{u}}L_h$, les équations des tensions deviennent:

$$u_1 = R_1 i_1 + L_{\sigma 1}\frac{di_1}{dt} + L_h\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{\ddot{u}}L_h\frac{di_2}{dt} \tag{21}$$

$$u_2 = R_2 i_2 + L_{\sigma 2}\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{\ddot{u}^2}L_h\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{\ddot{u}}L_h\frac{di_1}{dt} \tag{22}$$

En multipliant (22) par $\ddot{u}$, on obtient:

$$u_1 = R_1 i_1 + L_{\sigma 1}\frac{di_1}{dt} + L_h\frac{di_1}{dt} + L_h\frac{d}{dt}\left(\frac{i_2}{\ddot{u}}\right) \tag{23}$$

$$\ddot{u}u_2 = \ddot{u}^2 R_2\frac{i_2}{\ddot{u}} + \ddot{u}^2 L_{\sigma 2}\frac{d}{dt}\left(\frac{i_2}{\ddot{u}}\right) + L_h\frac{d}{dt}\left(\frac{i_2}{\ddot{u}}\right) + L_h\frac{di_1}{dt} \tag{24}$$

On introduit les valeurs secondaires rapportées au primaire: $u'_2 = nu_2$, $i'_2 = \frac{i_2}{\ddot{u}}$,

$R'_2 = \ddot{u}^2 R_2$ et $L'_{\sigma 2} = \ddot{u}^2 L_{\sigma 2}$ et on obtient:

$$u_1 = R_1 i_1 + L_{\sigma 1}\frac{di_1}{dt} + L_h \frac{d(i_1 + i'_2)}{dt} \tag{25}$$

$$u'_2 = R'_2 i'_2 + L'_{\sigma 2}\frac{di'_2}{dt} + L_h \frac{d(i_1 + i'_2)}{dt} \tag{26}$$

La tension appliquée au primaire étant sinusoïdale, on travaillera alors sous forme de phaseurs complexes. Le passage formel au complexe est:

$$a = \sqrt{2}A\cos(\omega t + \alpha) \longleftrightarrow \underline{A} = Ae^{\jmath\alpha} \tag{27}$$

et:

$$a = \Re\{\sqrt{2}\underline{A}e^{\jmath\omega t}\} \tag{28}$$

En remplaçant les grandeurs instantanée de (26) et (27) par des phaseurs complexes, on obtient les équations caractéristiques du transformateur (1) et (2).