Actionneurs et systèmes électromagnétiques I

Corrigé: **Tension induite de mouvement**

a) Tension induite, inductances propre et mutuelle

On utilise l'équation de la tension induite pour déterminer les grandeurs électriques des deux bobines. On obtient le système d'équations différentielles suivant dont il s'agit d'extraire u_2

$$u_1 = R_1 i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} = R_1 i_1 + \frac{d}{dt}(L_{11} i_1) + \frac{d}{dt}(L_{12} i_2) \quad (1)$$

$$u_2 = R_2 i_2 + \frac{d\psi_2}{dt} = R_2 i_2 + \frac{d}{dt}(L_{22} i_2) + \frac{d}{dt}(L_{12} i_1) \quad (2)$$

Comme la bobine 2 est à vide ($i_2 = 0$), les termes en R_2 et L_{22} s'annulent, les seuls paramètres à déterminer sont donc les inductances L_{11} et L_{12} :

$$L_{11} = N_1^2 \Lambda \quad (3)$$

$$L_{12} = N_1 N_2 \Lambda \quad (4)$$

avec :

$$\Lambda = \frac{\Lambda_f \Lambda_\delta}{\Lambda_f + \Lambda_\delta} \quad (5)$$

et :

$$\Lambda_f = \frac{\mu_o \mu_{rf} S_f}{l_f} \quad (6)$$

$$\Lambda_\delta = \frac{\mu_o S_\delta}{\delta} = \frac{\mu_o S_f}{\delta_a + \delta_b (1 - \cos \Omega t)} \quad (7)$$

Après substitutions, on obtient :

$$\Lambda = \frac{\mu_o S_f}{\delta_c - \delta_b \cos \Omega t} \quad (8)$$

avec :

$$\delta_c = \frac{l_f}{\mu_{rf}} + \delta_a + \delta_b \quad (9)$$

Avec $i_2 = 0$ et en substituant L_{11} et L_{12} par leurs valeurs tirées de (5) et (6), les équations (1) et (2) deviennent:

$$u_1 = R_1 i_1 + \frac{d}{dt}(L_{11} i_1) = R_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} + i_1 \frac{dL_{11}}{dt} = R_1 i_1 + N_1^2 \Lambda \frac{di_1}{dt} + N_1^2 i_1 \frac{d\Lambda}{dt} \quad (10)$$

$$u_2 = \frac{d}{dt}(L_{12} i_1) = L_{12} \frac{di_1}{dt} + i_1 \frac{dL_{12}}{dt} = N_1 N_2 \Lambda \frac{di_1}{dt} + N_1 N_2 i_1 \frac{d\Lambda}{dt} = \frac{N_2}{N_1}(u_1 - R_1 i_1) \quad (11)$$

La dérivée de (8) est donnée par :

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -\frac{\mu_o S_f \delta_b \Omega \sin \Omega t}{(\delta_c - \delta_b \cos \Omega t)^2} \tag{12}$$

Ainsi, le modèle mathématique du système est complet.

b) Détermination de u_2 dans le cas 1

Le cas 1 est un cas particulier. Comme le courant est constant ($i_1 = I_1$ et $di_1/dt = 0$), (11) et (12) donnent :

$$u_2 = -\frac{\mu_o N_1 N_2 I_1 S_f \delta_b \Omega \sin \Omega t}{(\delta_c - \delta_b \cos \Omega t)^2} \tag{13}$$

Après substitution numérique, on obtient :

$$u_2 = -\frac{31.58 \sin 2\pi 50 t}{(1.1 - \cos 2\pi 50 t)^2} \tag{14}$$

La fonction $u_2(t)$ est présentée à la Fig. 1.

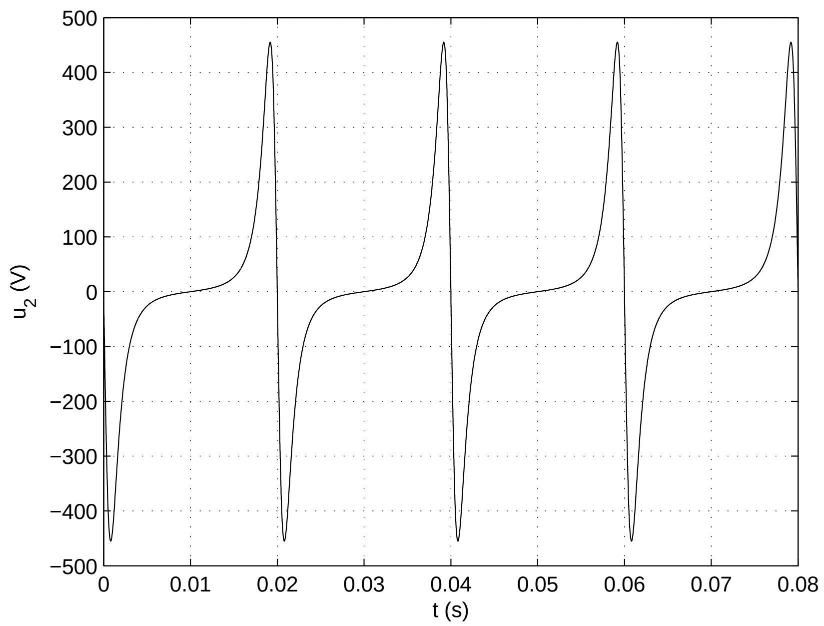

Figure 1: Tension $u_2(t)$ dans le cas 1

c) Détermination de u_2 dans le cas 2

Le cas 2 est plus général, car (10) et (11) sont pris en considération. En connaissant $u_1 = U_1$, le courant i_1 est d'abord déterminé à partir de (10) :

$$U_1 = R_1 i_1 + N_1^2 \Lambda \frac{di_1}{dt} + N_1^2 i_1 \frac{d\Lambda}{dt} \tag{15}$$

Ce qui donne l'équation différentielle :

$$\frac{di_1}{dt} = f(t, i_1) = \frac{(U_1 - R_1 i_1)(\delta_c - \delta_b \cos \Omega t)}{N_1^2 \mu_o S_f} + \frac{i_1 \delta_b \Omega \sin \Omega t}{\delta_c - \delta_b \cos \Omega t} \tag{16}$$

avec la condition initiale $i_1(0) = 0$.

Cette équation doit être résolue numériquement.
Matlab (fonction ode45) offre cette possibilité. Cette fonction, avec la syntaxe : `[x,y]=ode45(f,[x0 xF],y0)`, résout l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ sur la plage $x_0 < x < x_F$ et avec la valeur initiale y_0. Le script *tension_induite.m* (en annexe sur Moodle) permet de jouer avec les paramètres du système pour voir leur effet sur l'allure de la tension induite de mouvement.
La solution $u_2(t)$ est présentée à la Fig. 2.

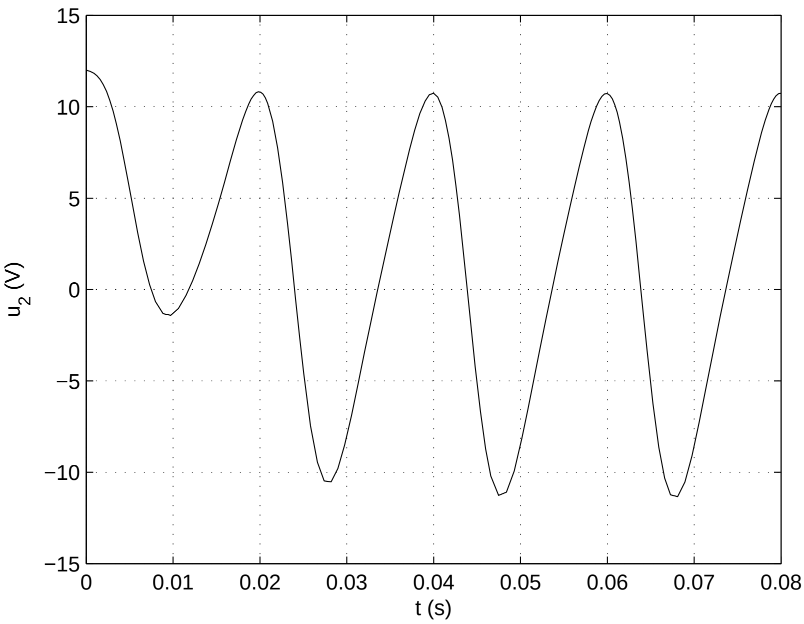

Figure 2: Tension $u_2(t)$ dans le cas 2