Série 22

Exercice 22.1 : PROCESSUS STATIONNAIRES (BASIQUE)

Cet exercice vous permet de constater que le traitement de processus stochastiques (ici un bruit blanc, défini au slide $12-29$*) ressemble beaucoup à celui des signaux déterministes. À la place de transformée de Fourier, vous aurez ici à calculer des densités spectrales de puissance, que l'on peut facilement obtenir grâce au théorème de Wiener-Khintchine (voir slide* $12-26$*). Le résultat d'un filtrage est donc également aisé à calculer, comme on peut le voir au slide* $12-28$*. Ce que vous avez appris de "basique" dans votre cours de Signaux & Systèmes peut donc être transposé facilement afin de manipuler des processus aléatoires complexes, et ça, c'est chouette.*

On considère le système représenté en Figure 1.

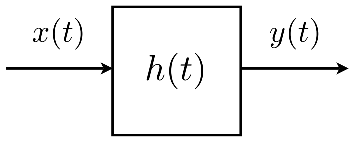


FIGURE 1 – Système de filtrage.

On suppose que l'entrée $x(t)$ est la réalisation d'un bruit blanc gaussien $X(t)$. Sa densité spectrale de puissance (DSP) est alors donnée par

$$S_X(\omega) = \sigma^2.$$

On suppose également que la réponse impulsionnelle du filtre, $h(t)$, est réelle et symétrique autour de 0 (i.e. $h(t) = h(-t)$).

Dans cet exercice, on désire ajuster le filtre $h(t)$ de sorte que la sortie $y(t)$ soit la réalisation d'un processus stationnaire au sens large $Y(t)$ ayant une densité spectrale de puissance $S_Y(\omega)$ fixée par l'utilisateur.

1) Cas général : $S_Y(\omega) = S(\omega)$ quelconque.

(a) Donner la relation entre les DSP du signal d'entrée $X(t)$ et de sortie $Y(t)$.

(b) Donner les expressions de $|H(\omega)|$ et $\Phi_H(\omega)$ pour que la DSP du signal de sortie soit égale à $S(\omega)$, une fonction quelconque.

(c) Donner l'expression de la fonction d'autocorrélation $\rho_X(t)$. Donner l'expression de $\rho_Y(t)$ en fonction de $h(t)$.

2) Cas particulier : $S_Y(\omega) = S(\omega) = e^{-2|\omega|}$.

(a) Donner l'expression d'un filtre $h(t)$ qui permet de générer un processus stationnaire au sens large caractérisé par le $S(\omega)$ donné ci-dessus.

(b) Donnez l'expression de $\rho_Y(t)$ pour le filtre $h(t)$ obtenu à la question précédente.

Exercice 22.2 : DÉCONVOLUTION (AVANCÉ)

Bien que cet exercice soit de type avancé et qu'il paraisse long au premier abord, nous vous encourageons vivement à le faire pour trois raisons. Premièrement, parce que les assistants le trouvent joli. Ensuite, parce qu'il s'agit de l'exercice que vous rencontrerez qui se trouve le plus connecté à la réalité et *vous permet donc de voir (en s'investisant un minimum pour comprendre le problème) comment le traitement du signal s'inscrit dans des problèmes concrets.*

Soit un système d'acquisition modélisé par la première partie du schéma bloc en Figure 2. Une réalisation $x(t)$ du signal stochastique $X(t)$ est acquise via le système de réponse impulsionnelle $h(t)$. Malheureusement, l'acquisition n'est pas parfaite. Le signal dont l'utilisateur dispose est bruité et est donné par l'expression $y(t) = h(t) * x(t) + n(t)$, où $n(t)$ est une réalisation d'un bruit blanc gaussien $N(t)$. Le problème typique de traitement du signal dit de *déconvolution* va être de parvenir à récupérer une estimation précise du signal d'entrée $x(t)$ sachant que l'on a à disposition uniquement la sortie $y(t)$. Ceci est effectué efficacement en utilisant le *filtre de Wiener optimal*, que nous allons découvrir étape par étape.

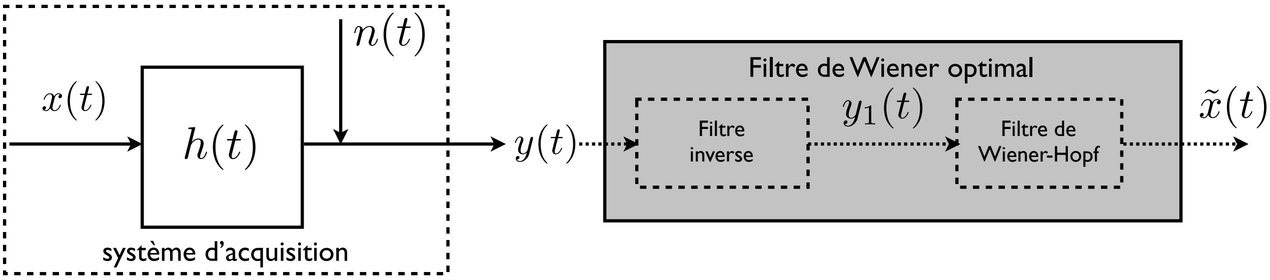


FIGURE 2 – Schéma-bloc du problème de déconvolution.

On suppose que la densité spectrale de puissance du signal d'entrée $X(t)$ (dont $x(t)$ est une réalisation) est donnée par

$$S_X(\omega) \quad = \quad \frac{1}{1+\omega^2}.$$

On rappelle que puisque $N(t)$ (dont $n(t)$ est une réalisation) est un bruit blanc gaussien alors sa densité spectrale de puissance est donnée par

$$S_N(\omega) \quad = \quad \sigma^2.$$

On suppose de plus que le signal $X(t)$ et le bruit $N(t)$ sont indépendants.

La fonction de transfert du filtre h est supposée être de la forme

$$H(\omega) = \frac{j\omega - s}{(j\omega+2)^2},$$

où s est tel que $\mathrm{Re}\,(s) \leq 0$.

1) Filtrage inverse : on va tout d'abord tenter de compenser l'effet du filtre h.

(a) Donner l'expression de la fonction de transfert H_{inv} d'un filtre h_{inv} qui permettrait de récupérer $x(t)$ à partir de sa version filtrée non bruitée (c'est à dire $h(t) * x(t)$).

(b) Le filtre H_{inv} est-il stable ?

(c) Donner l'expression de y_1, le signal obtenu après filtrage inverse de y.
On notera n_1 le résultat du filtrage du bruit $n(t)$ par h_{inv}. Le signal n_1 est une réalisation du signal stochastique noté $N_1(t)$.

(d) Donner les densités spectrales de puissance de chacune des composantes de y_1.

2) Filtrage de Wiener-Hopf : Le filtre de Wiener-Hopf est donné par

$$H_W(\omega) = \frac{S_X(\omega)}{S_X(\omega) + S_{N_1}(\omega)}.$$

Ce dernier permet d'obtenir $\tilde{x}(t)$, une estimation de l'entrée $x(t)$ à partir de $y_1(t)$.

(a) En quoi ce filtre est-il optimal ?
On pourra se référer aux slides $12-43$ *et* $12-46$.

(b) Donner l'expression du filtre de Wiener équivalent $H_{\mathrm{opt}}(\omega)$ obtenu en combinant le filtre inverse et le filtre de Wiener-Hopf.

(c) Donner l'expression limite de $H_{\mathrm{opt}}(\omega)$ lorsque le rapport signal-sur-bruit $S_X(\omega)/S_{N_1}(\omega)$ tend vers l'infini.

(d) Donner l'expression limite de $H_{\mathrm{opt}}(\omega)$ lorsque le rapport signal-sur-bruit $S_X(\omega)/S_{N_1}(\omega)$ tend vers zéro.

(e) Expliquer pourquoi le comportement observé dans les deux points précédents est désirable.

Exercice 22.3 : DÉTECTEUR PAR CORRÉLATION (AVANCÉ)

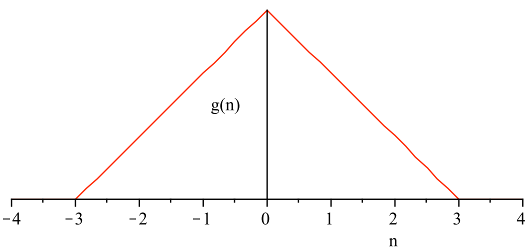
Cet exercice vous permet enfin d'utiliser les propriétés statistiques des signaux dans une application se rapprochant plus du concret. On a ici un signal passé dans un canal de transmission et dégradé par des imperfections que l'on appelle du bruit. A la sortie du canal, on cherche à détecter la présence dudit signal dans le bruit. On parviendra ici à comprendre quel est le détecteur optimal, c'est-à-dire celui qui aura le moins de chance de commettre une erreur pour supprimer le bruit et restaurer le signal initial.

La sortie d'un détecteur par corrélation est modélisée par

$$Y = X + N.$$

Dans cette équation, le signal X est une variable aléatoire binaire pouvant prendre deux états (présence ou absence de signal). De son côté, N est un bruit aléatoire dû à la transmission. Le bruit N et le signal X sont indépendants.

On donne $\mathrm{Prob}\{X = 0\} = 0.8$ et $\mathrm{Prob}\{X = 4\} = 0.2$. On connait également la densité de probabilité g du bruit, représentée ci-dessous.



1) Exprimer et tracer la densité de probabilité $f(x)$ de X.

2) Donner la forme analytique de la densité de probabilité conditionnelle $p_{Y|X}(y|x = 4)$.

3) Donner la forme analytique de la densité de probabilité conditionnelle $p_{Y|X}(y|x = 0)$.

4) Représenter les fonctions $p_X(x = 0)p_{Y|X}(y|x = 0)$ et $p_X(x = 4)p_{Y|X}(y|x = 4)$ sur un même graphe.

5) Proposer une règle simple pour une détection optimale.
Une détection optimale signifie que l'on minimise la probabilité d'erreur globale.

6) Calculer la probabilité d'erreur dans ce cas.

7) Que devient la règle du point **5)** lorsque les états $X = 0$ et $X = 4$ sont équiprobables ?

8) Calculer la probabilité d'erreur dans ce cas.