Série 18

Réponses à l'exercice 18.1 : LIEN ENTRE LES TRANSFORMATIONS DE FOURIER

1) (a) i. $g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a[n]\delta(t-nT)$.

ii. $G(\omega) = \mathcal{F}_{\mathrm{d}}\{a\}(\omega T)$.

(b) i. $h(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b[k]\delta(t-kT)$.

ii. $H(\omega) = \frac{2\pi}{NT}\sum_{k\in\mathbb{Z}} B[k]\delta(\omega - k\frac{2\pi}{NT})$.

2) (a) $a[n] = \begin{cases} e^{-nT}, & \text{si } n \geq 0 \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$

$b[n] = \frac{e^{-nT}}{1-e^{-NT}}$, $0 \leq n \leq N-1$.

(b) Les fonctions $f(t)$, $g(t)$ et $h(t)$ sont représentées sur la Figure 1.

(c) $F(\omega) = \frac{1}{j\omega+1}$,
$\mathcal{F}_{\mathrm{d}}\{a\}(\omega) = \frac{1}{1-e^{-(T+j\omega)}}$,
$B[n] = \mathcal{F}_{\mathrm{d}}\{a\}(2\pi n/N)$.

(d) Les modules des fonctions $F(\omega)$, $T\,\mathcal{F}_{\mathrm{d}}\{a\}(\omega T)$ et $T\sum_{k\in\mathbb{Z}} B[k]\delta(\omega - k\frac{2\pi}{NT})$ sont représentés sur la Figure 2.

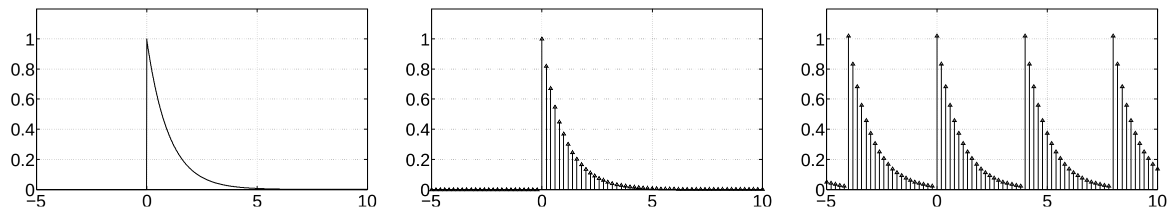

FIGURE 1 – Graph des fonctions $f(t)$ (gauche), $g(t)$ (centre) et $h(t)$ (droite).

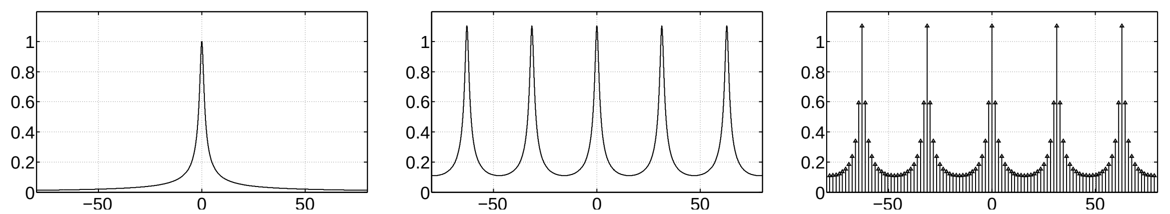

FIGURE 2 – Module des fonctions $F(\omega)$ (gauche), $T\,\mathcal{F}_{\mathrm{d}}\{a\}(\omega T)$ (centre) et $T\sum_{k\in\mathbb{Z}} B[k]\delta(\omega - k\frac{2\pi}{NT})$ (droite).

Réponses à l'exercice 18.2 : DFT D'UN SIGNAL RÉEL

1) (a) $F_1[2] = 5 - \mathrm{j}$

(b) $m_1 = \frac{1}{3}$

2) (a) $F_2[3] = 1 + 2\mathrm{j}$

(b) $F_2[2]$ est réel

3) $f_1[n] = [\frac{11}{3},\ -\frac{1}{3}(4+\sqrt{3}),\ -\frac{1}{3}(4-\sqrt{3})]$
$f_2[n] = [\frac{1}{4}(2+p),\ \frac{1}{4}(4-p),\ \frac{1}{4}(p-2),\ -\frac{1}{4}(p+4)]$

Réponses à l'exercice 18.3 : DFT INVERSE

1) Indication : revenir à la définition de la DFT et intervertir deux sommes. La démonstration est détaillée dans la correction.

2) $G_k[n] = N \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta[(n+k) - mN]$.

3) Remarquer pour commencer que $\mathbf{DFT}\{\mathbf{DFT}\{f\}\}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} F[n] \cdot g_k[n]$. La démonstration est détaillée dans la correction.

4) Les calculs sont détaillés dans la correction.

Réponses à l'exercice 18.4 : TRANSFORMATION EN COSINUS DISCRÈTE

1) $C_m = \begin{cases} N & \text{si } m = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2) Montrer que les produits scalaires $\langle e_k, e_\ell \rangle$ valent 1 si $k = \ell$ et 0 sinon. La démonstration est détaillée dans la correction.

3) (a) Ceci est une conséquence du fait que e_k est une base de $\mathbb{C}^N$.

(b) $c[0] = 1$,
$c[1] = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{\pi}{8}) + \cos(\frac{3\pi}{8}))$,
$c[2] = 0$,
$c[3] = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{\pi}{8}) - \cos(\frac{3\pi}{8}))$.