Série 16

Réponses à l'exercice 16.1 : DTFT

1) $\mathcal{F}_{\mathrm{d}}\{f\}(\omega) = F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$.

2) $F_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = 1$,
$F_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = -2\sin(2\omega)$,
$F_3(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}/3}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}/3}$,
$F_4(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = 3\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}/3}$.

3) $|F_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| = 1$, $arg(F_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})) = 0$,
$|F_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| = |2\sin(2\omega)|$, $arg(F_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})) = \begin{cases} \pi, & \text{si } \sin(2\omega) > 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$,
$|F_3(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| = \frac{1}{3\sqrt{(1-\cos(\omega)/3)^2+(\sin(\omega)/3)^2}}$, $arg(F_3(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})) = -\omega - arg(1 - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{3})$,
$|F_4(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| = \frac{3}{\sqrt{(1-\cos(\omega)/3)^2+(\sin(\omega)/3)^2}}$, $arg(F_4(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})) = \omega - arg(1 - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{3})$.

4) Les spectres d'amplitude et de phase sont tous 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. Ils sont représentés sur la Figure 1.

5) $F_1(z) = 1$,
$F_2(z) = \frac{z^{-2}-z^2}{j}$,
$F_3(z) = \frac{z^{-1}}{3-z^{-1}}$,
$F_4(z) = \frac{3z}{1-z^{-1}/3}$.

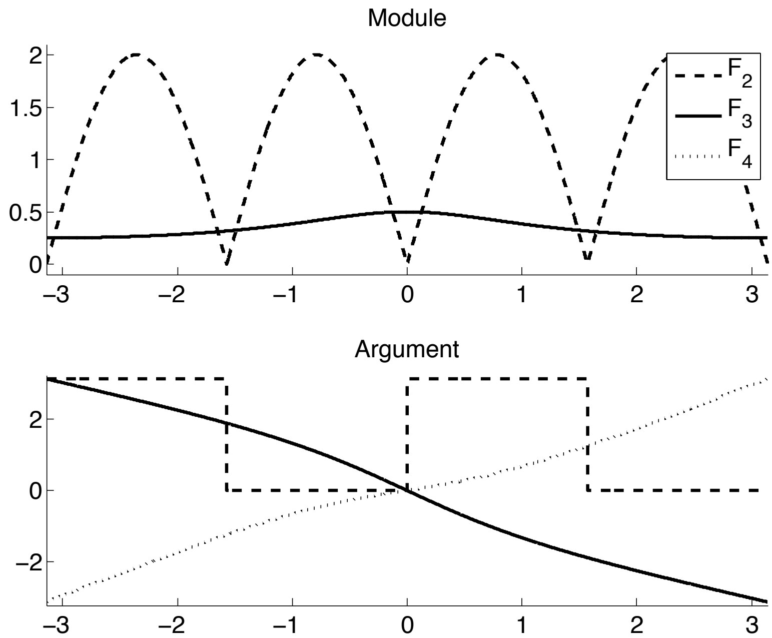

FIGURE 1 – Spectres d'amplitude (module, en haut) et de phase (argument, en bas) des signaux f_1 à f_4.

Réponses à l'exercice 16.2 : FONCTION DE TRANSFERT RATIONNELLE

1) $H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{15-8z^{-1}+z^{-2}}$.

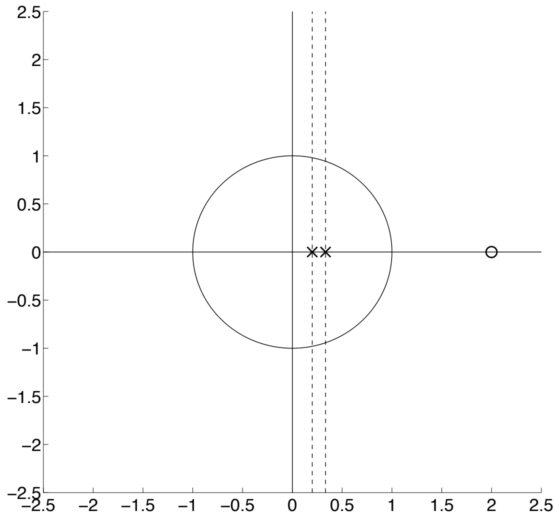

FIGURE 2 – Diagramme pôles-zéros correspondant au système de l'exercice **15.1**. Les pôles sont représentés par des croix, les zéros par des ronds. Le cercle unité est également représenté sur la figure.

2) Le diagramme pôles-zéros correspondant au système étudié ici est représenté sur la Figure 2.

3) $h[n] = -\frac{5}{6}(\frac{1}{3})^n u[n] + \frac{9}{10}(\frac{1}{5})^n u[n]$.
Il s'agit d'une réponse impulsionnelle stable.

4) (a) $y_1[n] = -\frac{5}{6}(\frac{5}{2}(\frac{1}{3})^n u[n] - \frac{3}{2}(\frac{1}{5})^n u[n]) + \frac{9}{10}(n+1)(\frac{1}{5})^n u[n]$.
(b) $y_2[n] = -(\frac{1}{2})^n$.

Réponses à l'exercice 16.3 : NOMBRES COMPLEXES

1) Les points ${W_6}^{nk}$ pour $k = 0, \ldots, 11$ et $n = 1, 2, 3$ sont représentés sur la Figure 3

2) ${W_N}^{Nk} = 1$.

3) $\sum_{k=0}^{N-1} {W_N}^{nk} = \begin{cases} N, & \text{si } n = Np \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

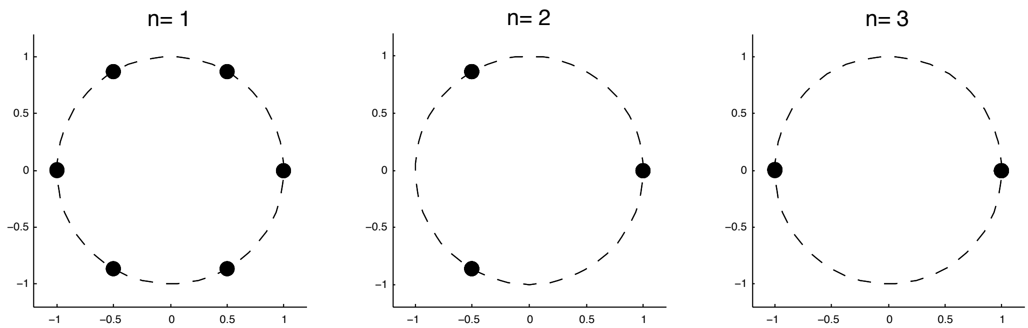

FIGURE 3 – Représentation des ${W_6}^{nk}$ pour $k = 0, \ldots, 11$ dans les cas ou $n = 1$ (gauche), $n = 2$ (centre) et $n = 3$ (droite).

Réponses à l'exercice 16.4 : CONVOLUTION DE SIGNAUX À BANDE LIMITÉE

1) (a) $F(\omega) = 2\mathrm{rect}(\frac{\omega}{\pi})$ est donc de support $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$,
$G(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi})$ est donc de support$=[-\pi; \pi]$.

(b) $h(t) = \mathrm{sinc}((t-1)/2)$.

(c) $h(t)$ est à bande limitée sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

(d) $h[k] = \mathrm{sinc}((k-1)/2)$.

(e) $h[k] = \mathrm{sinc}((k-1)/2) = h(t)|_{t=k} = c[k]$

2) (a) $T_{max} = 1$.

(b) $f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(kT)\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right)$,
$g(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(kT)\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right)$.

(c) La démonstration est détaillée dans la correction.

(d) La démonstration est détaillée dans la correction.

(e) Une explication complète est fournie dans la correction.