Série 15

Réponses à l'exercice 15.1 : PÔLES ET ZÉROS

1) $H(z) = \frac{4}{9}\frac{(1-jz^{-1})(1+jz^{-1})}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}$.

2) $h[n] = -4\delta[n] + \frac{20}{9}\left[(\frac{1}{3})^n u[n] + (-\frac{1}{3})^n u[n]\right]$.

3) Le système est stable, RII et réalisable.

Réponses à l'exercice 15.2 : SOLUTION PROPRE, RÉPONSE IMPULSIONNELLE

1) (a) $a_0 = 8$, $r_1 = \frac{1}{4}$ et $r_2 = -\frac{1}{2}$.
(b) $\mathrm{S}_h = \frac{1}{8}(\mathrm{I} - \frac{1}{4}\mathrm{S})^{-1}(\mathrm{I} + \frac{1}{2}\mathrm{S})^{-1}$.
(c) $h[n] = \frac{1}{24}(\frac{1}{4})^n u[n] + \frac{1}{12}(-\frac{1}{2})^n u[n]$.
(d) $y[n] = c_1(\frac{1}{4})^n + c_2(-\frac{1}{2})^n$.

2) (a) $a_0 = 1$, $r_1 = \frac{1}{5}$, $b_0 = 1$, et $b_1 = 1$.
(b) $\mathrm{S}_h = (\mathrm{I} - \frac{1}{5}\mathrm{S})^{-1}(\mathrm{I} + \mathrm{S})$.
(c) $h[n] = (\frac{1}{5})^n u[n] + (\frac{1}{5})^{n-1} u[n-1]$.
(d) $y[n] = c(\frac{1}{5})^n$.

Réponses à l'exercice 15.3 : FONCTIONS DE TRANSFERT RATIONNELLES

1) (a) $8Y(z) + 2z^{-1}Y(z) - z^{-2}Y(z) = X(z)$.
(b) $H(z) = \frac{1}{8+2z^{-1}-z^{-2}}$.
(c) $h[n] = \frac{1}{24}(\frac{1}{4})^n u[n] + \frac{1}{12}(-\frac{1}{2})^n u[n]$.

2) (a) $Y(z) - \frac{1}{5}z^{-1}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z)$.
(b) $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{5}z^{-1}}$.
(c) $h[n] = (\frac{1}{5})^n u[n] + (\frac{1}{5})^{n-1} u[n-1]$.

3) Les réponses impulsionnelles causales sont les mêmes que dans l'exercice 15.2.

Réponses à l'exercice 15.4 : MOMENTS

1) $X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]z^{-n}$,
$m_0 = X(1)$.

2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z) = \sum_{n=-N}^{N} -n\, x[n]z^{-n-1}$,
$m_1 = -X'(1)$.

3) $m_1 = -9$.

4) $m_1 = \frac{3}{4}$.

5) $m_2 = X''(1) + X'(1)$.

Réponses à l'exercice 15.5 : SOLUTION PROPRE, RÉPONSE IMPULSIONNELLE

1) (a) $p[n] = \alpha s_1[n] + \beta s_2[n] + x[n]$.
(b) $s_0[n] = \gamma p[n]$, $\bar{s_1}[n] = (1-\alpha)s_1[n]$.

(c) $s_1[n] = \sigma s_0[n-1]$, $s_2[n] = \sigma \bar{s_1}[n-1]$

(d) $p[n] - \gamma\sigma(\alpha p[n-1] + \beta(1-\alpha)\sigma p[n-2]) = x[n]$.

2) (a) On pose $b_1 = \gamma\sigma\alpha$ et $b_2 = \gamma\sigma^2\beta(1-\alpha)$. $(\mathrm{I} - b_1\mathrm{S} - b_2\mathrm{S}^2)\{p\} = x$. Le polynôme caratéristique a deux racines réelles r_1 et r_2.

$$p = (\mathrm{I} - r_1\mathrm{S})^{-1}(\mathrm{I} - r_2\mathrm{S})^{-1}\{x\}.$$

(b) $h[n] = \left(\frac{r_1}{r_1-r_2} r_1^n - \frac{r_2}{r_1-r_2} r_2^n\right) u[n]$.

(c) $g[n] = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$.

3) (a) $\delta = \frac{4}{\gamma}\frac{\beta}{\alpha}(\frac{1}{\alpha} - 1)$

(b) δ négligeable si β/α est petit. Les deux racines sont très proches de $\gamma\sigma\alpha$.

(c) Le nombre de plantes sera proportionnel à $(\gamma\sigma\alpha)^n$.