Série 14

Exercice 14.1 : COURS, GÉNÉRALITÉS (BASIQUE)

Cet exercice de mise en jambe vous permet de vérifier que les concepts théoriques importants du cours ont bien été assimilés. Causalité et stabilité ne devraient plus avoir de secret pour vous après cela. La seconde partie est également à prendre comme un bon entrainement pour la partie QCM que vous rencontrerez lors de l'examen blanc et de l'examen final. **La notion de stabilitié dans cet exercise est au sens BIBO.**

1) Donner des exemples de systèmes satisfaisant les propriétés suivantes.

(a) Un système causal stable.

(b) Un système causal instable.

(c) Un système non causal stable.

(d) Un système non causal instable.

2) Prouver, ou réfuter par un contre-exemple, les affirmations suivantes.

(a) Un système RIF est toujours stable.

(b) Un système RIF est toujours causal.

(c) Pour qu'un système soit stable, il suffit que sa transformée en z converge en un point.

(d) Une fonction complexe de z peut correspondre à la transformée en z de deux systèmes distincts.

(e) Pour savoir si une fonction complexe F est la transformée en z d'une réponse impulsionnelle causale, on utilise le développement en série de Taylor de $F(1/z)$ autour de 0.

Exercice 14.2 : SYSTÈMES LID (BASIQUE)

Voici un exercice basique d'analyse de systèmes discrets. Il s'agit d'un problème typique que vous devez pouvoir maîtriser complétement. Le genre de questions posées sur les caractéristiques d'un système donné (FIR, causalité, stabilité) devraient en outre vous rappeller ce que vous avez déjà vu dans le domaine continu au premier semestre. Pour le calcul des transformées en z, on pourra s'aider des tables. On pourra utiliser qu'une série géométrique $\sum_{k\geq 0} q^k$ *converge si et seulement si* $|q| < 1$.

Soient les systèmes caractérisés par les réponses impulsionnelles suivantes :

$$
\begin{aligned}
h_1[n] &= \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n = 0 \\ 1/n, & n > 0 \end{cases}, \\
h_2[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}, \\
h_3[n] &= u[n] - u[n-5], \\
h_4[n] &= 2^n\, u[n], \\
h_5[n] &= h_4[n] - 2^4\, h_4[n-4].
\end{aligned}
$$

1) Tracer les réponses impulsionnelles $h_1[n]$ à $h_5[n]$.

2) Lesquels de ces systèmes sont causaux ?

3) Lesquels de ces systèmes sont RIF ?

4) Lesquels de ces systèmes sont stables BIBO ? Justifier les réponses.

5) Donner les transformées en z des fonctions $h_1[n]$ à $h_5[n]$, en précisant leur domaine de convergence.

Exercice 14.3 : CONVOLUTION ET TRANSFORMÉE EN Z (BASIQUE)

L'une des propriétés clés de la transformés de Fourier était de convertir les produits de convolution, souvent plus compliqués à calculer, en multiplications. On va pouvoir constater grâce à cet exercice qu'un équivalent existe dans le monde des signaux discrets avec la transformée en z. Dans le second point de l'exercice, on propose aussi d'entrainer différentes méthodes, toutes autant correctes, pour calculer une transformée en z.

Soit le signal $x[n] = u[n] * u[n]$.

1) Par un calcul direct du produit de convolution, prouver que

$$x[n] = \begin{cases} 0 & , n < 0 \\ n+1 & , n \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

2) Prouver que $X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$ à l'aide des méthodes suivantes.

(a) En utilisant les tables directement.

(b) En utilisant la propriété de convolution-multiplication de la transformée en z.

(c) En calculant explicitement la série de Taylor de $X(z^{-1})$.

(d) En partant de $u[n]$ et en utilisant la propriété “multiplication par n” de la transformée en z.

Exercice 14.4 : TRANSFORMÉES EN Z INVERSES (INTERMÉDIAIRE)

Cet exercice est un bon exemple illustrant le genre de difficultés rencontrées lorsque l'on tente de calculer une transformée en z inverse. Vous allez ainsi rencontrer plusieurs cas de figure utilisant des astuces de résolution différentes dans les quatre exemples ci-dessous. Si il n'est pas attendu de vous de “deviner” immédiatement ces méthodes de résolution, il est important de connaitre l'existence de chacune d'entre elles et de savoir s'en servir.

Déterminer les signaux ayant les transformées en z suivantes, en utilisant les tables lorsque cela est possible.

1) $X_1(z) = 3z + 4z^{-2}$

Pour les questions suivantes, on cherchera des signaux **causaux**.

2) $X_2(z) = \frac{3z^2-4z+1}{5z^2-4z+1}$

3) $X_3(z) = \mathrm{e}^{2z^{-1}}$

Indication : La série de Taylor de e^x *est donnée par* $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 14.5 : PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE EN Z (INTERMÉDIAIRE)

Attention, on vous demande ici de faire le contraire de ce que l'on attend de vous en général ! Plus précisément, on propose dans ce problème de mieux comprendre les propriétés de la transformée en z en les retrouvant directement à partir de la définition. Il s'agit d'un bon exercice pour retenir et savoir retrouver ces propriétés. Il est important de garder en tête qu'en pratique, durant le reste du semestre, effectuer explicitement les calculs ne vous sera pas demandé. Vous pourrez en tout autre temps utiliser directement vos tables sans rien démontrer.

Soit un signal $x[n]$. En utilisant l'expression formelle de la transformée en z, soit

$$X(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n]\, z^{-n},$$

exprimer les transformées en z des signaux suivants en fonction de celle de $x[n]$.

1) $y_1[n] = x[n - n_0]$.

2) $y_2[n] = a^n\, x[n]$.

3) $y_3[n] = n\, x[n]$.