

Série 13

Réponses à l'exercice 13.1 : CATEGORISATION DE SIGNAUX ET CALCUL DE PRODUIT SCALAIRES

	$\mathcal{D}(\mathbb{Z})$	$\ell_1(\mathbb{Z})$	$\ell_2(\mathbb{Z})$	$\ell_\infty(\mathbb{Z})$	$\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$
$f_1[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$	oui	oui	oui	oui	oui
$f_2[n] = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & n \geq 1 \\ 0 & n \leq 0 \end{cases}$	non	oui	oui	oui	oui
1) $f_3[n] = \begin{cases} \frac{1}{ n } & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$	non	non	oui	oui	oui
$f_4[n] = 1$	non	non	non	oui	oui
$f_5[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$	non	oui	oui	oui	oui
$f_6[n] = (\frac{3}{2})^n u[n]$	non	non	non	non	oui

- 2) — Le support de $f_1[n]$ est $\{0, 1\}$.
 — $f_2[n]$ a un support infini $\mathbb{Z}$, mais $\|f_2\|_{\ell_1} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} < +\infty$.
 — $\|f_3\|_{\ell_1} = +\infty$, mais $\|f_3\|_{\ell_2}^2 = 2\zeta(2) + 1 = \frac{\pi^2}{3} + 1 < +\infty$.
 — $\|f_4\|_{\ell_2} = +\infty$, mais $\|f_4\|_{\ell_\infty} = 1 < +\infty$.
 — $f_5[n]$ a un support infini $\mathbb{N}$, mais $\|f_5\|_{\ell_1} = 2 < +\infty$.
 — $\|f_6\|_{\ell_\infty} = +\infty$, mais $f_6[n] \in \mathbb{R}$.
- 3) $g[n] \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$.
- 4) (a) $\langle f_1, f_2 \rangle = -\frac{1}{2}$.
 (b) $\langle f_1, f_3 \rangle = \frac{1}{2}$.
 (c) $\langle f_2, f_3 \rangle = \zeta(3) \approx 1.202$.
 (d) $\langle f_4, f_5 \rangle = 2$.
 (e) $\langle f_5, f_6 \rangle = 4$.

Réponses à l'exercice 13.2 : CONVOLUTION DE SIGNAUX RIF

- 1) (a) $S_1 = I + 2S + 3S^2 + 4S^3 + 5S^4$.
 $S_2 = I - S$.
- (b) $S_1 S_2 = I + S + S^2 + S^3 + S^4 - 5S^5$.
- (c) $g[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] - 5\delta[n-5]$.
- 2) (a) $F_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4}$.
 $F_2(z) = 1 - z^{-1}$.
- (b) $H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} - 5z^{-5}$.
- (c) $h[n] = g[n]$.

Réponses à l'exercice 13.3 : INVERSE DE CONVOLUTION

- 1) (a) $\frac{1}{2}g[n] + \frac{1}{3}g[n-1] = \delta[n]$.
- (b) $g[0] = 2$.
- (c) $g[n] = -\frac{2}{3}g[n-1]$.
- (d) $g[n] = 2(-\frac{2}{3})^n u[n]$.
- 2) S_g est BIBO-stable.
- 3) S_h est injectif sur $\ell_\infty(\mathbb{Z})$. S_g est l'inverse de convolution de S_h .
- 4) $x \notin \ell_\infty(\mathbb{Z})$.
- 5) $S_h\{x\}[n] = (\frac{2}{3})^n$.