Série 13

Exercice 13.1 : CATEGORISATION DE SIGNAUX ET CALCUL DE PRODUITS SCALAIRES (BASIQUE)

Cet exercice propose de se familiariser avec les différents espaces de signaux discrets introduits en cours. Bien qu'elles puissent sembler abstraites, ces questions sont fondamentales pour déterminer si les opérations que l'on effectue couramment (produit scalaire, convolutions) sont bien définies.

Rappel : la somme partielle d'une série géométrique se calcule $\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ pour $q \neq 1$.

La fonction Zêta de Riemann est donnée par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

La série est convergente pour tout $s > 1$ (on a $\zeta(1) = +\infty$) ; certaines de ses valeurs particulières sont $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(3) \approx 1.202$ (constante d'Apéry).

1) Remplir les cases vides du tableau suivant, en indiquant par oui ou non si le signal discret $f_i[n]$ est inclut dans l'espace de signaux en question.

	$\mathcal{D}(\mathbb{Z})$	$\ell_1(\mathbb{Z})$	$\ell_2(\mathbb{Z})$	$\ell_\infty(\mathbb{Z})$	$\mathcal{D}'(\mathbb{Z})$
$f_1[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$					
$f_2[n] = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & n \geq 1 \\ 0 & n \leq 0 \end{cases}$					
$f_3[n] = \begin{cases} \frac{1}{\lvert n\rvert} & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$					
$f_4[n] = 1$					
$f_5[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$					
$f_6[n] = (\frac{3}{2})^n u[n]$					

2) Pour chaque signal $f_i[n]$, $i \in \{1, \ldots, 5\}$, justifier son inclusion dans l'espace le plus petit.

3) Le signal discret $g[n] = f_2[n]\mathbb{1}_{[-100,\ldots,100]}[n]$ appartient-il à l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$?

4) Calculer les produits scalaires suivants.

(a) $\langle f_1, f_2 \rangle$

(b) $\langle f_1, f_3 \rangle$

(c) $\langle f_2, f_3 \rangle$

(d) $\langle f_4, f_5 \rangle$

(e) $\langle f_5, f_6 \rangle$

Exercice 13.2 : CONVOLUTION DE SIGNAUX RIF (BASIQUE)

La convolution de signaux à support fini est plus aisée qu'il n'y paraît : elle revient à effectuer une simple multiplication de polynômes. Nous illustrons cette propriété ici avec deux formalismes différents (mais équivalents) : à l'aide de l'opérateur de décalage S*, et en utilisant la transformée en* z*.*

Soient les signaux discrets

$$f_1[n] = \begin{cases} n+1 & n \in \{0,\dots,4\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_2[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ -1 & n=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Avec l'opérateur de décalage

(a) Exprimer les opérateurs de convolution $\mathrm{S}_i : f \mapsto f_i * f$, $i \in \{1,2\}$, en terme de l'opérateur de décalage $\mathrm{S} : f \mapsto f[\cdot - 1]$ et de ses itérés S^k, $k \in \mathbb{N}$.

(b) Exprimer l'opérateur composé $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2$ en fonction de S et de ses itérés.

(c) Donner la réponse impulsionnelle $g[n]$ de l'opérateur $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2$, sans passer par la transformée en z.

2) Avec la transformée en z

(a) Calculer $F_i(z)$, la transformée en z de $f_i[n]$ pour $i \in \{1,2\}$.

(b) Calculer $H(z)$, la transformée en z de $h[n] = (f_1 * f_2)[n]$.

(c) Donner $h[n]$, et comparer votre résultat au signal $g[n]$ calculé à la question 1). Commenter.

Exercice 13.3 : INVERSE DE CONVOLUTION (INTERMEDIAIRE)

Cet exercice permet de se familiariser avec l'opération de convolution et l'identification d'opérateurs inverses. Dans les exercices, on ne s'attardera souvent pas trop sur la rigueur mathématique nécessaire pour identifier de tels inverses. Cependant, l'inversion est loin d'être une opération anodine ; elle est traitée à titre d'illustration de manière rigoureuse dans cet exercice, sans faire usage de la transformée en z*.*

On considère le signal discret $h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{3}\delta[n-1]$, et l'opérateur de convolution associé $\mathrm{S}_h : f \mapsto h * f$.

1) On cherche à identifier une solution **causale** $g[n]$ de l'équation $(h * g)[n] = \delta[n]$.

(a) Expliciter l'équation aux différences $(h * g)[n] = \delta[n]$.

(b) Que doit valoir $g[0]$?

(c) Donner la relation entre $g[n]$ et $g[n-1]$ pour tout $n > 0$.

(d) En déduire l'expression de $g[n]$.

2) Le système S_g de réponse impulsionnelle $g[n]$ est-il BIBO-stable ? Justifier.

3) L'opérateur S_h est-il injectif sur $\ell_\infty(\mathbb{Z})$? L'opérateur $\mathrm{S}_g : f \mapsto g * f$ est-il l'inverse de convolution de S_h ? Justifier.

4) Soit le signal $x[n] = (\frac{2}{3})^n$. A-t-on $x \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$?

5) Calculer $\mathrm{S}_h\{x\}[n]$.