Série 12

Exercice 12.1 : SIGNAUX DISCRETS PERIODIQUES (BASIQUE)

Dans le cadre de l'analyse des signaux discrets, la notion de périodicité va régulièrement apparaitre et jouer un rôle important. On propose dans cet exercice de s'entrainer à des manipulations de base telles que le calcul de période pour un signal donné. Le concept d'échantillonnage est également brièvement rappelé, car il est, comme nous le verrons plus tard au cours du semestre, intimement lié à la périodicité.

1) Indiquer et justifier si les signaux discrets suivants sont périodiques et, le cas échéant, calculer leurs périodes.

(a) $x_1[n] = \cos(0.3\pi n + 0.7)$;

(b) $x_2[n] = \cos(\sqrt{3}\pi n + 1.7)$;

(c) $x_3[n] = \sin(0.3n + \frac{\pi}{5})$.

2) Soit le signal à temps continu $x(t) = e^{j2\pi ft}$ où f est une fréquence inconnue. On échantillonne $x(t)$ à la fréquence F et on observe que le signal échantillonné est périodique de période p. Montrer que les seules valeurs possibles de f sont de la forme $f = \frac{kF}{p}$, où k est un entier positif.

Exercice 12.2 : SIGNAUX DISCRETS DE BASE (BASIQUE)

Nous nous sommes rendus familiers au premier semestre avec une collection de signaux continus "de base" tels que l'impulsion de dirac $\delta(t)$, le saut unité $u(t)$ ou le monôme causal $t_+^n(t)$. Ces signaux ont tous des équivalents discrets donnés aux slides $8-17$ à $8-22$ du cours et vont, comme leurs pendants continus, jouer un rôle récurrent tout au long du semestre. Cet exercice propose d'apprivoiser les définitions de ces signaux de base.

1) Représenter les signaux suivants.

(a) $f_1[n] = 3(u[n+1] - u[n-3])$

(b) $f_2[n] = s_+^2[n]$

(c) $f_3[n] = s_+^1[n] - 2s_+^1[n-3] + s_+^1[n-6]$

2) Soit $g_1[0] = g_1[1] = \cdots = g_1[4] = 2$ et $g_1[n] = 0$ pour les autres valeurs de n.

(a) Tracer $g_1[n]$ et exprimer la fonction en utilisant le signal de base $u[n]$ et ses translatés.

(b) Écrire $g_1[n]$ sous la forme canonique et substituer $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$. Simplifier la somme et comparer avec le résultat précédent.

3) Soit $g_2[0] = 1$, $g_2[1] = 2$, $g_2[2] = 3$, $g_2[3] = 4$, et $g_2[n] = 0$ pour les autres valeurs de n. Tracer $g_2[n]$ et l'exprimer en utilisant les signaux de base.

4) Tracer $g_3[n] = 0.9^{-n}u[-n]$.

5) Montrer que $s_+^N[n] - s_+^N[n-1] = s_+^{N-1}[n]$. Quelle est la propriété correspondante dans le domaine continu ?

Exercice 12.3 : ÉCHANTILLONNAGE (BASIQUE)

Cet exercice fait le lien entre les concepts de signaux continus (étudié au premier semestre) et discret. Il est capital d'être au point sur la notion d'échantillonnage d'un signal continu. Le signal résultant est discret, vous vous entraînez ici à le calculer. Profitez aussi de l'occasion pour vous familiariser avec les signaux discrets de base.

Déterminer les signaux discrets $x_i[n]$ obtenus par échantillonnage des signaux $x_i(t)$ suivant, pour un pas d'échantillonnage de $T = 1$.

1) $x_1(t) = \sin(\pi t)$

2) $x_2(t) = \cos(\pi t)$

3) $x_3(t) = \cos(2\pi t)$

4) $x_4(t) = \cos(\frac{\pi}{6}t)$

5) Donner les valeurs du signal $\mathrm{j}^n u[n]$ pour $n = -5, \ldots, 6$.

6) Exprimer le signal $x_4[n] \cdot u[n]$ à partir des signaux de base.

Exercice 12.4 : INTERPOLATION (INTERMEDIAIRE)

Nous faisons ici le lien entre les signaux discrets et les concepts d'échantillonnage et d'interpolation linéaire. L'occasion de se remémorer de bons souvenirs du semestre passé tout en affrontant l'avenir.

On définit le signal discret $x[n]$ donné par $x[-1] = 1$, $x[0] = x[1] = -1$, et $x[n] = 0$ pour les autres valeurs de n.

1) Représenter sur le même graphique le signal $x[n]$ et la courbe obtenue par interpolation linéaire de ce signal. On notera $x_1(t)$ la fonction correspondante.

2) Donner les valeurs $y[n]$ obtenues par échantillonnage de $x_1(t)$ à la fréquence 2. Représenter le signal $y[n]$ sur le même graphique que $x[n]$ et $x_1(t)$.

3) Exprimer $x_1(t)$ en utilisant des versions décalées et pondérées de $\mathrm{tri}(t)$. Quelles sont les valeurs de $x_1(n)$ pour $t = n, n \in \mathbb{Z}$? Pour $t = n/2, n \in \mathbb{Z}$?

On se place maintenant dans le cas général : $x[n]$ n'est pas précisé et $T > 0$ désigne une période d'échantillonnage quelconque.

4) Donner la formule de la fonction continue $x_T(t)$ prenant les valeurs $x[n]$ aux points nT et évoluant linéairement entre ces points.
Donner également la formule du signal discret $y[n]$ obtenu par échantillonnage de $x_T(t)$ à la période $T/2$.

5) Montrer que $y[n]$ peut être écrit sous la forme

$$y[n] = \sum_{k \in Z} h[n-2k]x[k]$$

et préciser la valeur du filtre discret $h[n]$.

6) Proposer un schéma-bloc implémentant ce calcul. On utilisera l'opérateur de sur-échantillonnage par 2 défini ci-dessous.

$$v[k] \longrightarrow \uparrow 2 \longrightarrow w[k] = \begin{cases} v[k/2] \text{ si } k \text{ pair;} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$