NOM, Prénom:

Signaux & Systèmes II - Examen Blanc 2021

Problème I

Soient S_1, S_2 et S_3, les trois systèmes **causaux** définis par

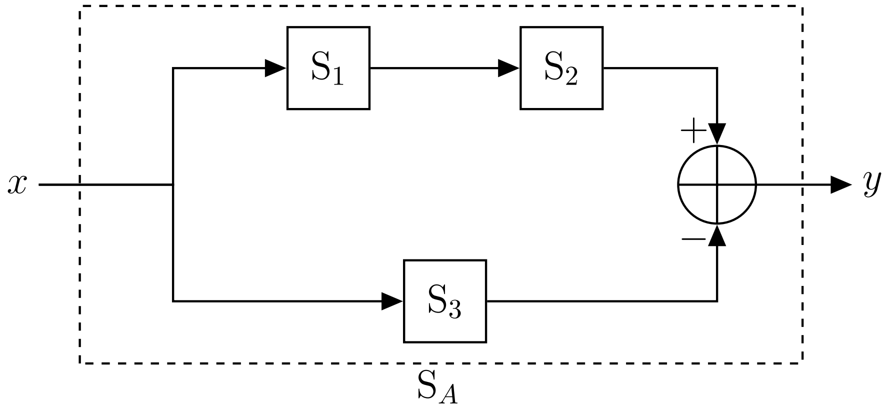
$$S_1 \ : \ y[n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u[k]x[n-k], = (u * x)[n]$$
$$S_2 \ : \ H_2(z) = 1 - z^{-1},$$
$$S_3 \ : \ h_3[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

1) Compléter le tableau suivant.

	S_1	S_2	S_3
Réponse impulsionnelle	$h_1[n] = u[n]$	$h_2[n] = \delta[n]-\delta[n-1]$	$h_3[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$
Tables A-8 **Transformée en z**	$H_1(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$	$H_2(z) = 1 - z^{-1}$	$H_3(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$
Zone de convergence	$\{z\in\mathbb{C}, \lvert z\rvert>1\}$	$\mathbb{C}\setminus\{0\}$	$\{z\in\mathbb{C}, \lvert z\rvert>\frac{1}{3}\}$
$H_i(e^{jw})$ sauf si cercle unité $\notin$ ROC **DTFT**	$\mathcal{F}_d\{h_1\}(w) =$ $\frac{1}{1-e^{-jw}} + \pi\delta_{perio}(w)$ Tables A-12	$\mathcal{F}_d\{h_2\}(w) =$ $1-e^{-jw}$	$\mathcal{F}_d\{h_3\}(w) =$ $\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-jw}}$
$Y(z)=H_i(z)X(z)$ **Équation aux différences**	$y[n]-y[n-1]=x[n]$	$y[n]=x[n]-x[n-1]$	$y[n]-\frac{1}{3}y[n-1]=x[n]$
RIF/RII	RII	RIF	RII
équivalent **Stabilité BIBO**	Non	Oui	Oui
$h_i[n]$ RIF $h_i[n] \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$?	Non	Oui	Non.
$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lvert h_i[n]\rvert < +\infty$ $h_i[n] \in \ell_1(\mathbb{Z})$? équivalent	Non	Oui	Oui
$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \lvert h_i[n]\rvert < +\infty$ $h_i[n] \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$?	Oui	Oui	Oui

NOM, Prénom:

On considère maintenant le système S_A causal construit à partir des systèmes S_1, S_2 et S_3 comme illustré ci-dessous.



2) (a) Montrer que $H_A(z) = -\frac{1}{3}\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$, où H_A est la transformée en z du système S_A.

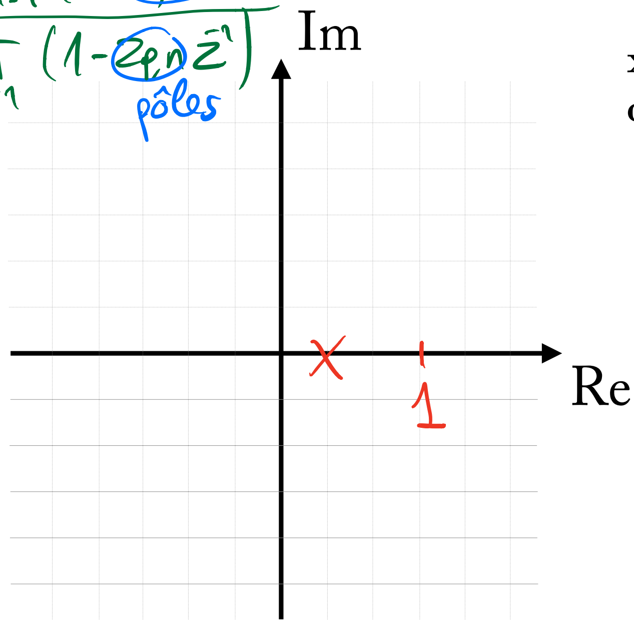
$$H_A(z) = H_1(z)H_2(z) - H_3(z)$$
$$= \frac{1}{\cancel{1-z^{-1}}} \times \cancel{(1-z^{-1})} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$
$$= 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \boxed{-\frac{1}{3}\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}}$$

(b) Déterminez les pôles et les zéros du système S_A et les représenter dans le plan complexe.

⚠ Forme canonique d'une fonction de transfert rationnelle:

$$H(z) = z^{-n_0}\, b_0 \frac{\prod_{m=1}^{M}(1-\overset{\text{zéros}}{z_{0,m}}z^{-1})}{\prod_{n=1}^{N}(1-\underset{\text{pôles}}{z_{p,n}}z^{-1})}$$

z^{-n_0} : pas représenté dans diagramme pôle/zéro (0 ou $+\infty$ ne sont pas considérés comme des pôles/zéros)



x : *pôles*
o : *zéros*

NOM, Prénom:

(c) Le système S_A est-il stable ? Justifiez.

S_A est causal car S_1, S_2 et S_3 le sont

$\Rightarrow$ S_A est stable ssi tous ses pôles vérifient $|z_{p,n}| < 1 \ \forall n$.

Or $|z_{p,1}| = \frac{1}{3} < 1$ donc S_A est stable.

⚠ La transformée en z ne suffit pas à déterminer la stabilité d'un système, il faut aussi la ROC.

Stabilité BIBO $\Leftrightarrow$ cercle unité inclus dans la ROC (slide 9-7)

(d) Déduire de $H_A(z)$ la réponse impulsionnelle causale $h_A[n]$ du système S_A.

$$H_A(z) = -\frac{1}{3} z^{-1} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow h_A[n] = -\frac{1}{3}\delta[n-1] * \overbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]}^{\text{car } h_A[n] \text{ est causal}}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1]$$

$$= \boxed{-\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]}$$

(e) Déduire de $H_A(z)$ l'équation aux différences associée.

$$Y(z) = H_A(z) X(z)$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) Y(z) = -\frac{1}{3} z^{-1} X(z)$$

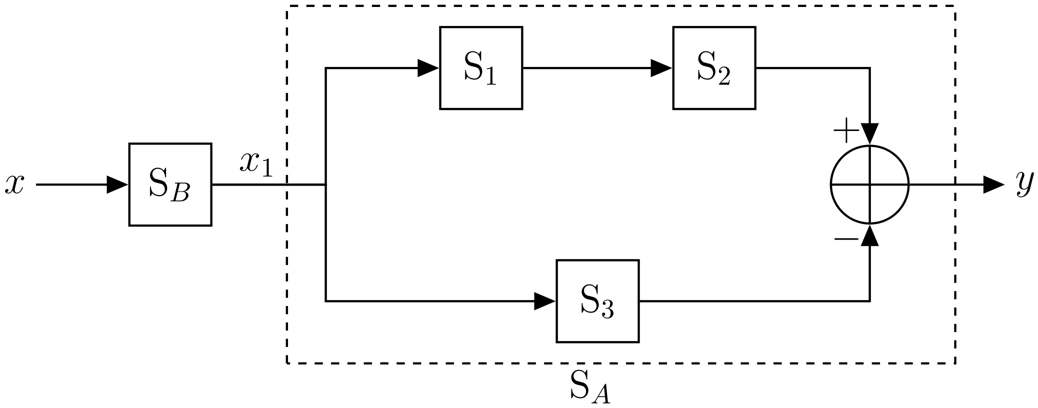
$$\Leftrightarrow \boxed{y[n] - \frac{1}{3} y[n-1] = -\frac{1}{3} x[n-1]}$$

NOM, Prénom:

Soit S_B le système causal donné par l'équation aux différences suivante :

$$S_B \quad : \quad x_1[n] - x_1[n-1] = 2x[n] - x[n-1]$$

On combine ce système avec le système S_A étudié précédemment pour former le système S comme indiqué sur le schéma ci-après.



3) (a) Déterminez l'équation aux différences du système complet S à partir de celles des sous-systèmes S_A et S_B.

à exprimer en fonction de y grâce à S_A

$$\times -\frac{1}{3} \quad \begin{cases} x_1[n] - x_1[n-1] = 2x[n] - x[n-1] \quad \} \; S_B \\ y[n] - \frac{1}{3} y[n-1] = -\frac{1}{3} x_1[n-1] \quad \} \; S_A \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{y[n+1] - \frac{1}{3} y[n]}_{S_B \text{ avec } n \mapsto n+1} - \left(y[n] - \frac{1}{3} y[n-1]\right) = -\frac{1}{3}\left(2x[n] - x[n-1]\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{y[n] - \frac{4}{3} y[n-1] + \frac{1}{3} y[n-2] = -\frac{2}{3} x[n-1] + \frac{1}{3} x[n-2]} \quad n \mapsto n-1$$

(b) En déduire l'expression de $H(z)$, la transformée en z du système complet S.

$$Y(z)\left(1 - \frac{4}{3} z^{-1} + \frac{1}{3} z^{-2}\right) = X(z)\left(-\frac{2}{3} z^{-1} + \frac{1}{3} z^{-2}\right)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \boxed{\frac{-\frac{2}{3} z^{-1} + \frac{1}{3} z^{-2}}{1 - \frac{4}{3} z^{-1} + \frac{1}{3} z^{-2}}}$$

NOM, Prénom:

(c) Retrouvez l'expression de $H(z)$, déterminée en (b), à partir de $H_A(z)$ et $H_B(z)$, les transformées en z des systèmes S_A et S_B.

$$H(z) = H_A(z)H_B(z) = \frac{-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{4}{3}z^{-1}} \times \frac{2-z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$= \frac{-\frac{2}{3}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}}{1-\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}}$$

On retrouve bien la même expression.

(d) Déduire de $H(z)$ la réponse impulsionnelle **causale** $h[n]$ du système complet S.

$$H(z) = -\frac{2}{3}z^{-1}\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-z^{-1})}$$

$$= -\frac{2}{3}z^{-1}\left[\frac{\alpha}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{\beta}{1-z^{-1}}\right]$$

Calcul de α : $\times (1-\frac{1}{3}z^{-1})$, $z^{-1}=3 \Rightarrow \alpha = \frac{1-\frac{3}{2}}{1-3} = \boxed{\frac{1}{4}}$

Calcul de β : $\times (1-z^{-1})$, $z^{-1}=1 \Rightarrow \beta = \frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{3}{4}}$

$$\Rightarrow h[n] = -\frac{2}{3}\delta[n-1] * \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{3}{4}u[n]\right]$$

$$= -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u[n-1] - \frac{1}{2}u[n-1]$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1\right)u[n-1]}$$

(e) Donner l'expression de la réponse $y[n]$ du système S à l'entrée $x[n] = \delta[n-4]$.

$$y[n] = (x*h)[n] = \boxed{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4} + 1\right)u[n-5]}$$

NOM, Prénom:

Problème II

Soit le signal discret $h[n] = \mathrm{e}^{-5n} u[n]$.

1) Donner $\mathcal{F}_\mathrm{d}\{h\}(\omega) = H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$, la DTFT de $h[n]$.

$$h[n] = (e^{-5})^n u[n] \Rightarrow \boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-5} e^{-j\omega}}}$$

2) Montrer que

$$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{e}^{-10} - 2\mathrm{e}^{-5}\cos(\omega)}}$$

Soit $z = 1 - e^{-5} e^{-j\omega} \Rightarrow \begin{cases} Re(z) = 1 - e^{-5}\cos(\omega) \\ Im(z) = e^{-5}\sin(\omega) \end{cases}$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1 - e^{-5}\cos(\omega))^2 + (e^{-5}\sin(\omega))^2}}$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{1 + e^{-10} - 2e^{-5}\cos(\omega)}}} \quad \cos^2(\omega) + \sin^2(\omega) = 1$$

3) Calculer $H_{\min}$ et $H_{\max}$, les bornes inférieure et supérieure de la réponse fréquentielle du système, et les fréquences correspondants $\omega_{\min}$ et $\omega_{\max}$.

$$H_{\substack{\min \\ \max}} = \underset{\omega \in \mathbb{R}}{\substack{\inf \\ \sup}} |H(e^{j\omega})|$$ Slide 10-14.

$\cos(\omega) \nearrow \Rightarrow$ dénominateur de $|H(e^{j\omega})| \searrow$

$\Rightarrow |H(e^{j\omega})| \nearrow$

$$\Rightarrow H_{max} = |H(e^{j\omega})|\Big|_{\omega=0} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1 + e^{-10} - 2e^{-5}}} \quad (\omega_{max} = 0)}$$

$$H_{min} = |H(e^{j\omega})|\Big|_{\omega=\pi} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1 + e^{-10} + 2e^{-5}}} \quad (\omega_{min} = \pi)}$$

NOM, Prénom:

4) Le système $H(e^{j\omega})$ est-il inversible sur $\ell_2(\mathbb{Z})$? Justifier. Si oui, donner la réponse impulsionnelle $h_{\text{inv}}[n]$ du filtre inverse.

$H(e^{j\omega})$ est inversible car $H_{min} > 0$ Slide 10-15

$$H_{inv}(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})} = 1 - e^{-5} e^{-j\omega}$$

$$\Rightarrow h_{inv}[n] = \mathcal{F}_d^{-1}\{H_{inv}(e^{j\omega})\}[n] = \boxed{\delta[n] - e^{-5}\,\delta[n-1]}$$

5) Donner la réponse $y[n]$ du système LID S_h de réponse impulsionnelle $h[n]$ à l'entrée $x[n] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}n}$.

$$y[n] = \underbrace{H(e^{j\frac{\pi}{4}})\, e^{j\frac{\pi}{4}n}} = \boxed{\frac{e^{j\frac{\pi}{4}n}}{1 - e^{-5} e^{-j\frac{\pi}{4}}}}$$

Slide 10-8 (réponse d'un système LID à une entrée sinusoïdale)

NOM, Prénom:

Problème III

Soit le signal discret :

$$f[n] = 2^{(n-2)} u[2-n],$$

et $g[n]$ le signal de période $N = 4$:

$$g[n] = f[n] \text{ pour } n \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

1) Le signal $f[n]$ est-il causal ? Justifier.

$f[n]$ n'est pas causal car $f[-1] = 2^{-3} \neq 0$.

2) Calculer $\mathcal{F}_d\{f\}(\omega) = F(e^{j\omega})$, la DTFT de $f[n]$.

$$-2^n u[-n-1] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

Tables A-8

$* \delta[n-3]$

$$-2^{(n-3)} u[-n+2] \xrightarrow{z} \frac{z^{-3}}{1-2z^{-1}}$$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{-2z^{-3}}{1-2z^{-1}} \Rightarrow \boxed{F(e^{j\omega}) = \frac{-2e^{-3j\omega}}{1-2e^{-j\omega}}}$$

3) Calculer la transformée en z de $2f[n+2]$.

$$\tilde{f}[n] = 2f[n+2]$$

$$\tilde{F}(z) = 2z^2 F(z) = \boxed{\frac{-4z^{-1}}{1-2z^{-1}}}$$

4) Donner $g[n]$ pour $n \in \{-3, -2, -1, 0, 2222\}$.

$g[n]$ est $N=4$ périodique

$\Rightarrow g[-3] = g[1] = f[1] = \frac{1}{2}$

$g[-2] = g[2] = f[2] = 1$

$g[-1] = g[3] = f[3] = 0$

$g[0] = f[0] = \frac{1}{4}$

$g[2222] = g[2] = 1$

$2222 \equiv 2\,[4]$.

NOM, Prénom:

5) Déterminer $G[m] = \mathbf{DFT}\{g\}[m]$ comme une somme.

$N=4$

$$G[m] = \sum_{n=0}^{N-1} g[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nm} \qquad e^{-j\frac{2\pi}{N}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

$$= \underbrace{g[0]}_{1/4} + \underbrace{g[1]}_{\frac{1}{2}}(-j)^m + \underbrace{g[2]}_{1}(-j)^{2m} + \cancel{g[3](-j)^{3m}}$$

$$= \boxed{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(-j)^m + (-1)^m}$$

6) Déterminer $\tilde{G}[m] = \mathbf{DFT}^{-1}\{g\}[m]$ comme une somme.

$$\tilde{G}[m] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} g[n]\, e^{j\frac{2\pi}{N}nm} \qquad e^{j\frac{2\pi}{N}} = j$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}j^m + (-1)^m\right]}$$

7) Exprimer $G[m]$ en fonction de $\tilde{G}[m]$.

$$(-j)^m = j^{-m} \quad \text{et} \quad (-1)^m = (-1)^{-m}$$

$$\frac{1}{j} = -j$$

$$\Rightarrow \boxed{G[m] = 4\,\tilde{G}[-m]}$$

Cohérent avec la propriété de dualité de la DFT (Tables A-14) avec $F = g$, $f = \tilde{G}$