Série 21

Réponses à l'exercice 21.1 : FORMULE DE FILTRAGE

1) $\mathbb{E}\left\{Y[n]\right\} = \mu_X \times \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} h[k]\right).$

2) $\mathbb{E}\left\{Y[n]Y[m]^*\right\} = (h[-\cdot] * h * \rho_X)[m-n].$

3) La justification est donnée dans la correction.

4) La démonstration est donnée dans la correction.

5) $S_Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sigma^2 \left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|^2.$

Réponses à l'exercice 21.2 : DENSITÉS DE PROBABILITÉ

1) $P_1(\omega) = \mathrm{e}^{-\omega^2/2}.$

2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}P_1(\omega) = -\omega\,\mathrm{e}^{-\omega^2/2}.$

3) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}P_1(\omega) = -\mathrm{e}^{-\omega^2/2} + \omega^2\,\mathrm{e}^{-\omega^2/2}.$

4) $\mu_{X_1,1} = 0$, $\mu_{X_1,2} = 1.$

5) $P_2(\omega) = \mathrm{e}^{-2\omega^2}.$

6) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}P_2(\omega) = -4\,\omega\,\mathrm{e}^{-2\omega^2}.$

7) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}P_2(\omega) = -4\,\mathrm{e}^{-2\omega^2} + 16\,\omega^2\,\mathrm{e}^{-2\omega^2}.$

8) $\mu_{X_2,1} = 0$, $\mu_{X_2,2} = 4.$

9) $P_{1+2}(\omega) = \mathrm{e}^{-\frac{5}{2}\omega^2}$, $p_{1+2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{5}}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{10}}.$

10) Une somme de variables gaussiennes indépendantes est une variable gaussienne de variance la somme des variances.

Réponses à l'exercice 21.3 : SOMME DE VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES

1) $f(x) = \frac{1}{4}\mathrm{rect}\left(\frac{x}{4}\right).$

2) $F(\omega) = \mathrm{sinc}\left(\frac{2\omega}{\pi}\right).$

3) $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \frac{4}{3}$,$\sigma = \frac{2}{\sqrt{3}}.$

4) $F_N(\omega) = \left[\mathrm{sinc}\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)\right]^N.$

5) Les fonctions $f_1(y)$, $f_2(y)$ et $f_3(y)$ sont representées sur la Figure 1.

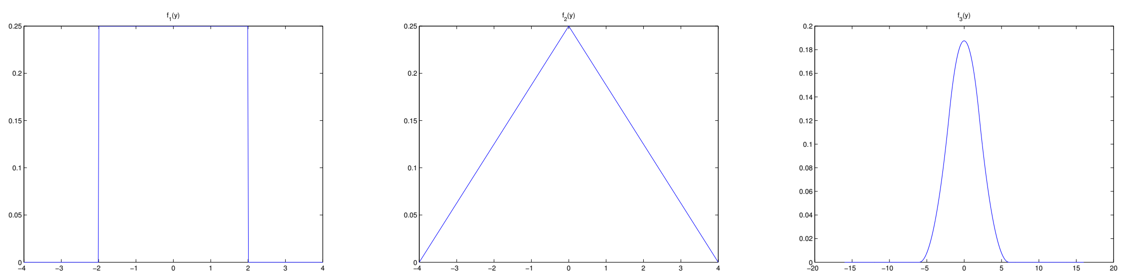

FIGURE 1 – Densité de probabilité $f_N(y)$ de y_N pour $N = 1$ (gauche), $N = 2$ (centre) et $N = 3$ (droite).

6) $m_N = 0$, $\sigma_N = \sqrt{N}\sigma = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{N}$.

7) $\lim_{N\to+\infty} \sqrt{N} f_N(\sqrt{N} y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$.