Série 21

Exercice 21.1 : FORMULE DE FILTRAGE (BASIQUE)

Ce premier exercice traitant des propriétés statistiques des signaux aléatoires vous propose de travailler sur les définitions afin de vous familiariser avec ces nouveaux concepts. On se réferera aux slides $12-18$, $12-20$, $12-26$ *et* $12-29$ *pour les définitions des statistiques d'ordre deux, de la stationnarité, du théorème de Wiener-Khintchine et du bruit blanc, respectivement.*
Le but général de cet exercice et de comprendre et de démontrer l'effet d'un filtrage sur un signal aléatoire en donnant les propriétés statistiques de la sortie en fonction de celles de l'entrée.

Soit $X[n]$ un processus stochastique stationnaire au sens large. On le fait passer dans un filtre réel dont la réponse impulsionnelle stable est notée $h[n]$. On appelle le signal filtré $Y[n]$. On notera en outre μ_X la moyenne et $\rho_X[n]$ l'autocorrélation statistique de $X[n]$.

1) Calculer $\mathbb{E}\{Y[n]\}$, la moyenne statistique de $Y[n]$.

2) Calculer $\mathbb{E}\{Y[n]Y[m]^*\}$, l'autocorrélation statistique de $Y[n]$.

3) Déduire des points précédents que $Y[n]$ est stationnaire au sens large.(On note μ_Y sa moyenne et $\rho_Y[n]$ son autocorrélation statistique).

4) Vérifier la formule de filtrage suivante, où $S_Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ et $S_X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ sont les DTFTs des autocorrélations statistiques de $Y[n]$ et $X[n]$ respectivement.

$$S_Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = |H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2 S_X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

5) Calculer S_Y lorsque $X[n]$ est un bruit blanc.

Exercice 21.2 : DENSITÉS DE PROBABILITÉ (BASIQUE)

On vous propose ici encore un exercice d'"échauffement" où la difficulté réside essentiellement dans le fait de bien comprendre les définitions. Vous travaillerez dans ce problème avec des variables aléatoires Gaussiennes qui sont aisées à manipuler et forment les outils fondamentaux pour l'analyse statistique de signaux. Pour chaque variable, on verra les notions de densité de probabilité, de fonction charactéristique et le lien entre les dérivées et les moments. Enfin, vous (re)découvrirez une propriété intéressante des variables aléatoires gaussiennes.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes telles que

$$\begin{aligned} X_1 &\sim p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \\ X_2 &\sim p_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}. \end{aligned}$$

1) Déterminer la fonction caractéristique de X_1, notée $P_1(\omega)$.

2) Déterminer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}P_1(\omega)$.

3) Déterminer $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}P_1(\omega)$.

4) Déduire des questions précédentes les moments d'ordre 1 et 2 de $p_1(x)$, noté $\mu_{X_1,1}$ et $\mu_{X_1,2}$.

5) Déterminer la fonction caractéristique de X_2, notée $P_2(\omega)$.

6) Déterminer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}P_2(\omega)$.

7) Déterminer $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}P_2(\omega)$.

8) Déduire des questions précédentes les moments d'ordre 1 et 2 de $p_2(x)$, notés $\mu_{X_2,1}$ et $\mu_{X_2,2}$.

9) Déterminer $P_{1+2}(\omega)$, la fonction caractéristique et la densité de probabilité $p_{1+2}(y)$ de la variable aléatoire $Y = X_1 + X_2$.

10) Enoncer la propriété des variables gaussiennes que l'on observe au point précédent.

Exercice 21.3 : SOMME DE VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES (AVANCÉ)

Le début de cet exercice est basique. En particulier, vous avez à manipuler les sommes de variables aléatoires indépandantes et de même loi (cf. à ce sujet la page $12 - 10$ *du cours). Le but final de l'exercice – ce qui justifie son statut d'avancé – est de prouver le Thérème Central Limite, un des résultats les plus importants de la théorie des probabilités, dans le cas particulier d'une somme de lois uniformes.*

Soit une suite $X_1, X_2, \ldots, X_N$ de N variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Leur distribution est uniforme sur l'intervalle $[-2, 2]$.

1) Donner l'expression de leur densité de probabilité $f(x)$.

2) Déterminer leur fonction caractéristique $F(\omega)$.

3) Déterminer μ_0, μ_1 et μ_2, les moments d'ordre 0, 1 et 2 de $f(x)$ et en déduire l'écart-type σ.

4) Déterminer la fonction caractéristique $F_N(\omega)$ de la variable aléatoire $Y_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$.

5) Esquisser la forme de $f_N(y)$, la densité de probabilité de y_N, pour $N = 1$, $N = 2$ et $N = 3$.

6) Calculer la moyenne m_N et l'écart-type σ_N de $f_N(y)$.

7) Calculer la forme limite de $\sqrt{N} f_N(\sqrt{N} y)$ quand $N \to \infty$ (on pourra commencer pas étudier la limite dans le domaine de Fourier en utilisant le developpement limité de sinc).