Série 20

Exercice 20.1 : ANALYSE D'UN SYSTÈME (BASIQUE)

*Cet exercice peut également être pris pour de la révision en ce sens qu'il n'introduit quasiment aucune notion nouvelle et comporte essentiellement des questions très basiques. Vous devriez donc pouvoir le faire sans problème. Le seul aspect exotique que vous rencontrerez ici est l'analyse de l'effet d'un filtre de façon qualitative au point **3)**. Pour cela, vous êtes invités à vous référer à la slide* $11-26$ *du cours. Cette technique générale est très utile pour esquisser les réponses en amplitude des systèmes dont la fonction de transfert est rationnelle, ce qui couvre donc la majorité des cas que nous analysons dans les exercices.*

On considère le système causal correspondant à l'équation aux différences suivante, avec $x[n]$ en entrée et $y[n]$ en sortie.

$$2y[n] - \frac{1}{2}y[n-2] = x[n] - 2x[n-1] + 10x[n-2]$$

1) Calculer la fonction de transfert $H(z)$ du système.

2) Donner les pôles et les zéros de $H(z)$.

3) Esquisser la réponse en amplitude du système.

4) Quel est l'effet de ce filtre sur le spectre en amplitude du signal d'entrée ?

5) Le système est-il causal-stable ? Justifier.

6) Redonner la définition de la réponse impulsionnelle $h[n]$ et la calculer pour ce système.

7) Calculer la sortie du système correspondant aux entrées suivantes.

(a) $x_1[n] = \cos(\frac{2\pi n}{17})$;

(b) $x_2[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 10 \\ -\frac{1}{2}, & \text{si } n = 11 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 20.2 : FILTRES À PHASE LINÉAIRE ET FILTRES PASSE-TOUT (INTERMÉDIAIRE)

On propose dans cet exercice de se familiariser avec deux types très particuliers de filtres : les filtres à phase linéaire, et les filtres passe-tout. On se réferera, pour les filtres à phase linéaire, à la page $11-17$ *du cours, et pour les filtres passe-tout à la page* $11-28$*. Ce problème fera aussi appel à la notion de temps de propagation de groupe, dont la définition est fournie à la page* $11-14$ *du polycopié.*

1) Soit un filtre réalisable et à phase linéaire, de fonction de transfert $H(z)$.

(a) Montrer que si z_0 est un zéro de $H(z)$, alors z_0^{-1} est également un zéro de $H(z)$.

(b) Montrer que si p_0 est un pôle de $H(z)$, alors p_0^{-1} est également un pôle de $H(z)$.

(c) Supposons que $H(z)$ ait pour zéros 1, $\sqrt{2}+\mathrm{j}$, et $\sqrt{2}/3+\mathrm{j}/3$. En utilisant 1a) et 1b), représenter l'ensemble minimal des pôles et zéros de $H(z)$ dans le plan complexe, en indiquant le cercle unité.

(d) Le filtre correspondant est-il réel ?
NB : on considérera une constante multiplicative réelle la plus simple.

(e) Le filtre correspondant est-il stable ?

(f) Calculer le temps de propagation de groupe (TPG) du filtre correspondant.

2) Soit un filtre réalisable et passe-tout, de fonction de transfert $G(z)$.

(a) Supposons que $G(z)$ ait $1 - \mathrm{j}$ comme zéro et $2 - \mathrm{j}$ comme pôle. Représenter l'ensemble minimal des pôles et zéros de $G(z)$ dans le plan complexe, en indiquant le cercle unité.

(b) Le filtre correspondant est-il réel ?

(c) Le filtre correspondant est-il causal-stable ?

Exercice 20.3 : DENSITÉS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES (BASIQUE)

Dans cet exercice, nous passons en revue certains concepts de base de la théorie des probabilités pour les variables aléatoires discrètes et pour éclairer certains liens avec les concepts antérieurs que vous avez appris dans ce cours (la convolution discrète, la DTFT, etc.)

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes indépendantes telles que

$$\mathrm{Prob}\{X_1 = n\} = \begin{cases} c_1 2^{-n}, & \text{si } n \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathrm{Prob}\{X_2 = n\} = \begin{cases} c_2 3^{-n}, & \text{si } n \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

1) Determiner les valeurs des constantes c_1 et c_2.

2) Exprimer les densités de probabilité continues $p_1(x)$ et $p_2(x)$ comme des trains de Dirac.

3) Calculer les transformées de Fourier $P_1(\omega)$ et $P_2(\omega)$ de $p_1(x)$ et $p_2(x)$ respectivement.

4) Calculer la densité de probabilité $p(x)$ de la variable aléatoire $X = X_1 + X_2$.

5) Calculer la transformée de Fourier $P(\omega)$ de $p(x)$.

6) Donner la relation entre les transformées de Fourier $P_1(\omega)$, $P_2(\omega)$, et $P(\omega)$.