Série 19

Exercice 19.1 : CARACTÉRISATION DE FILTRES (BASIQUE)

Voici encore un exercice récapitulatif qui doit vous permettre de bien vous entrainer pour l'examen final. On fait ici appel à toutes les notions utiles pour la caractérisation de systèmes : pôles/zéros, stabilité, support de la réponse impulsionnelle, réponse en amplitude et en phase, etc. En plus de cela viennent s'ajouter les questions de phase linéaire que vous venez de voir en cours. Si cet exercice vous pose problème, il est absolument capital de reprendre vos notes de cours et de vous assurez que vous êtes au clair avec les définitions des différents concepts.

Soient les fonctions de transfert suivantes.

$$\begin{aligned}
H_1(z) &= 1 + 6z^{-1} + 9z^{-2} \\
H_2(z) &= \frac{1 - 5z^{-1}}{5 - z^{-1}} \\
H_3(z) &= \frac{1}{1 + 0.3\mathrm{j}z + 0.04z^2} \\
H_4(z) &= \frac{1 - z^{-3}}{1 - z^{-1}}
\end{aligned}$$

1) Déterminer les pôles et les zéros de chacunes des fonctions H_1 à H_4, puis les tracer dans le plan complexe.

2) Caractériser le support (RIF/RII) des filtres correspondants à chacunes des fonctions H_1 à H_4.

3) Préciser si les filtres correspondants à chacunes des fonctions H_1 à H_4 sont stables.
On supposera que ces filtres sont causaux si cela s'avère nécessaire.

4) Déterminer l'expression analytique de la réponse en amplitude de H_1.

5) Donner l'expression de la réponse en amplitude de H_2 après l'avoir simplifiée.

6) A quel type de filtre la fonction H_2 correspond-elle ?

7) La fonction H_3 correspond-elle à un filtre réel ?

8) Donner l'expression de la réponse en phase de H_4, puis la tracer.

9) Les fonctions H_1 et H_4 correspondent-elles à des filtres à phase linéaire ?

Exercice 19.2 : RELATIONS ENTRE LES DIFFERENTES TRANSFORMATIONS DE FOURIER (BASIQUE)

En ayant fait les deux dernières séries, vous devriez être tout à fait à l'aise avec les différentes transformées de Fourier et les liens entre signaux discrets et continus. Pour vous en assurer, ce petit exercice propose de revoir sous un autre angle dess résultats que vous devriez déjà connaître.

Soit le signal à temps continu $x(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t)$.

1) Calculer la transformée de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$.

2) On échantillonne $x(t)$ avec un pas d'échantillonage de T. Donner l'expression du signal échantillonné, noté $x[n]$.

3) Calculer la DTFT $X_d(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ de $x[n]$.

4) Calculer la DFT sur N points $X[k]$ du signal $x[n]$ tronqué à $n = 0, \ldots, N-1$, où $N > 0$ est un nombre entier arbitraire.

5) Vérifier l'égalité suivante en utilisant les résultats de convergence des séries géométriques.

$$\frac{X[k]}{X_d(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi k}{N}})} = 1 - \mathrm{e}^{-NT}$$

6) Que peut-on dire de la relation entre DFT et DTFT quand $N \gg 1/T$?

7) Calculer la limite quand $T \to 0$ de $TX_d(\mathrm{e}^{\mathrm{j}T\omega})$ et mettre le résultat en relation avec la transformée de Fourier de $x(t)$.
On utilisera le développement limité de $X_d(\mathrm{e}^{\mathrm{j}T\omega})$ autour de 0.

Exercice 19.3 : ZERO-PADDING (INTERMÉDIAIRE)

Cet exercice permet de constater l'effet du zero-padding, c'est à dire l'extension d'un signal en ajoutant des échantillons nuls. Comme on le verra, cette opération a priori insignifiante a des implications intéressantes dans le domaine fréquentiel. Cet exemple est aussi une bonne occasion de se rappeler des définitions des différentes transformées de Fourier discrètes (DTFT et DFT), de leurs différences et des liens qui les unissent.

Soit les trois signaux discrets suivants.

$$\begin{aligned}
f_0[n] &= \mathrm{e}^{-n},\ n = 0, \ldots, N-1 \\
f_1[n] &= \begin{cases} \mathrm{e}^{-n} & n = 0, \ldots, N-1 \\ 0 & n = N, \ldots, 2N-1 \end{cases} \\
f[n] &= \begin{cases} \mathrm{e}^{-n} & n = 0, \ldots, N-1 \\ 0 & \text{pour tout autre } n \in \mathbb{Z} \end{cases}
\end{aligned}$$

Le signal f_1 correspond donc à f_0 étendu jusqu'à la longueur $2N$ en ajoutant N éléments nuls à sa fin. On appelle cette opération *zero-padding*. Le dernier signal, f, correspond à la version non-périodique de f_0.

1) Calculer la DFT $F_0[m]$ de $f_0[n]$.

2) Calculer la DFT $F_1[m]$ de $f_1[n]$.

3) Exprimer la relation entre $F_1[2m]$ et $F_0[m]$, pour $m = 0, \ldots, N-1$.

4) Calculer la DTFT $\mathcal{F}_\mathrm{d}\{f\}(w)$ de $f[n]$.

5) Expliquer le lien entre les deux DFT $F_0[m]$ et $F_1[m]$ et la DTFT $\mathcal{F}_\mathrm{d}\{f\}(w)$.

6) Déduire des questions ci-dessus quel effet dans le domaine fréquentiel correspond au zero-padding dans le domaine temporel.

Exercice 19.4 : SOUS-ÉCHANTILLONNAGE DE SIGNAUX DISCRETS (INTERMÉDIAIRE)

Tant pour les signaux continus que discrets, il existe un lien étroit entre échantillonnage et périodisation entre les domaines temporels et fréquentiels. Ce problème vous permet de découvrir les effets du sous-échantillonnage sur des signaux discrets au travers d'un exemple concret. Les différentes observations que vous ferez dans cet exercice, en particulier les points (b) et (c) de la seconde partie, devraient vous rappeler de bons souvenirs du premier semestre.

Soit un signal discret $x[n]$ que l'on sous-échantillonne d'un facteur 2 pour obtenir $y[n] = x[2n]$.

1) Cas général : on considère $x[n]$ quelconque.

(a) Rappeler la relation entre les transformées en z de $x[n]$ et $y[n]$.

(b) Déduire du point précédent une relation similaire pour les DTFT de $x[n]$ et $y[n]$.

2) Application : on prend pour $x[n]$ la suite discrète représentant les échantillons de la fonction $f(t) = \mathrm{sinc}^2(t)$ à la période $T = 1/2$.

(a) Calculer la DTFT de $x[n]$.

(b) Représenter graphiquement $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$, $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega/2})$ et $Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$.

Pour remédier au phénomène observé ci-dessus, on convolue $x[n]$ avec le filtre discret $h[n] = \frac{\mathrm{sinc}(n/2)}{4}$ (issu de l'échantillonage de la fonction $h(t) = \frac{\mathrm{sinc}(t)}{4}$ à la période $T = \frac{1}{2}$) avant l'étape de sous-échantillonnage. Le résultat est le signal noté $x_{\mathrm{mod}}[n] = (x * h)[n]$.

(c) En appliquant judicieusement la formule de reconstruction de Shannon (vue au premier semestre), montrer que $x_{\mathrm{mod}}[n] = \frac{1}{T}(f * h)(nT)$.

(d) Calculer et représenter graphiquement les DTFT de $x_{\mathrm{mod}}[n] = (x * h)[n]$ et $y_{\mathrm{mod}}[n] = x_{\mathrm{mod}}[2n]$.