Série 17

Exercice 17.1 : TRANSFORMÉES EN Z (BASIQUE)

On vous propose ici un exercice révisant toutes les étapes de l'analyse d'un système discret : la réponse impulsionnelle, ses caractéristiques, les notions de stabilité du système associé, et le calculs de transformées en z. Cet exercice ne comporte que des types de questions très standards et ne devrait vous poser aucun problème si vous avez correctement suivi (et compris) le cours jusque là. Il peut donc vous servir à identifier et à combler vos lacunes.

On considère les systèmes discrets caractérisés par les réponses impulsionnelles suivantes.

$$\begin{aligned} h_1[n] &= 2^{-n}u[-n] \\ h_2[n] &= -16h_1[n+4] + h_1[n] \\ h_3[n] &= h_2[n] + h_2[-n] - \delta[n] \\ h_4[n] &= 2^{-n}\cos(n\pi/4)u[n] \end{aligned}$$

1) Représenter graphiquement ces quatre réponses impulsionnelles.

2) Préciser si ces systèmes sont à réponse impulsionnelle finie (RIF), et s'ils sont causaux.

3) Déterminer lesquels de ces quatre systèmes sont stables.

4) Déterminer les fonctions de transfert $H_1(z)$, $H_2(z)$, $H_3(z)$ et $H_4(z)$.

5) Calculer la réponse en amplitude $|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$ et la réponse en phase $\mathrm{Arg}H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ du système représenté sur la Figure 1.

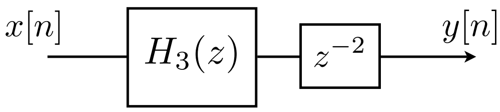

FIGURE 1 – Schéma bloc du système de la question **17.1.5**.

Exercice 17.2 : ÉTUDE D'UN SYSTÈME (BASIQUE)

Voici un nouvel exercice de rappel qui vous permettra de vous assurez que vous maîtrisez comme il se doit les descriptions de systèmes à l'aide de schémas blocs. Dans ce genre de problème, en étant suffisamment méthodique, même le plus effrayant des schémas-blocs ne devrait plus vous inquiéter.

On considère le système reliant l'entrée discrète $x[n]$ à la sortie discrète $y[n]$ représenté sur la Figure 2. Pour rappel, les $\bigcirc$ représentent la multiplication du signal par un scalaire dont la valeur est donnée par le nombre inscrit dans le cercle. Les $\oplus$ représentent l'opérateur addition : une entrée accompagnée du signe $+$ est additionnée alors qu'une entrée munie du signe $-$ est soustraite. Enfin, les boîtes rectangulaires correspondent à des filtres dont la réponse fréquentielle est indiquée dans le rectangle.

1) Écrire les équations aux différences qui relient $x[n]$ à $x_{\text{int}}[n]$ puis $y[n]$ à $x_{\text{int}}[n]$.

2) Déterminer sa fonction de transfert du système complet, notée $H(z)$.

3) Donner l'expression récursive du signal $y[n]$ en fonction de $x[n], x[n-1], y[n-2]$ et $y[n-1]$.

4) Donner l'expressions des réponses en amplitude et en phase du système complet.

5) Déterminer la réponse impulsionnelle causale $h[n]$ du système complet.

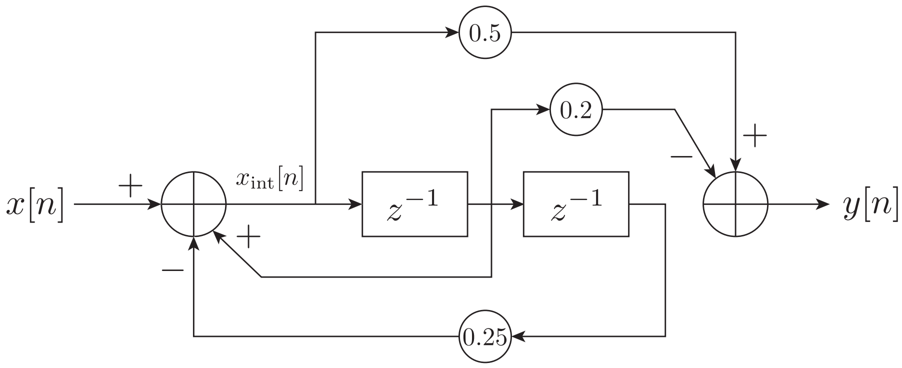

FIGURE 2 – Schéma bloc du système de la question **17.2**.

Exercice 17.3 : CONCEPTION D'UN SYSTÈME (INTERMÉDIAIRE)

Pour changer un peu, on vous propose ici un exercice de "reverse engineering". Plutôt que de vous faire analyser un système donné, on va chercher ici à vous faire construire un système réalisable qui satisfait certaines contraintes. On imposera par exemple un comportement spécifié sur certaines classes de signaux, ou des conditions sur la réponse impulsionnelle. C'est une très bonne façon de vérifier que vous êtes réellement au clair avec les définitions des différents concepts d'analyse de système et que vous ne reproduisez pas seulement toujours les mêmes manipulations dans les exercices habituels sans vraiment en comprendre le fond.

1) On veut construire le système S_1 causal tel que
- $S_1\{x_1\}[n] = 0$ pour l'entrée $x_1[n] = \cos(2\pi n/3)$,
- $h_1[0] = 1$, où $h_1[n]$ est la réponse impulsionnelle du système S_1.

(a) Donner l'équation aux différences d'ordre minimal caractérisant le système S_1.
(b) Le système S_1 est-il RIF/RII ?
(c) Le système S_1 est-il BIBO stable ?
(d) Donner l'expression de sa réponse impulsionnelle $h_1[n]$.

2) On veut construire le système S_2 causal tel que
- $S_2\{x_2\}[n] = (n+1)x_2[n]$ pour l'entrée $x_2[n] = e^{\mathrm{j}\pi n/3}u[n]$.

(a) Donner l'équation aux différences d'ordre minimal caractérisant le système S_2.
(b) Le système S_2 est-il RIF/RII ?
(c) Le système S_2 est-il BIBO stable ?
(d) Donner l'expression de sa réponse impulsionnelle $h_2[n]$.

3) On veut construire le système S_3 causal tel que
- S_3 contient deux pôles mais pas de zéros,
- S_3 est réel,
- $\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_3[k] = 1$, où $h_3[n]$ est la réponse impulsionnelle du système S_3,
- $S_3\{x_3\}[n] = 4x_3[n]$ pour l'entrée $x_3[n] = \cos(2\pi n/3)$.

(a) Montrer que sa fonction de transfert $H_3(z)$ peut s'écrire
$$H_3(z) = \frac{a}{1 + bz^{-1} + cz^{-2}},$$
avec $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
(b) Reformuler toutes les conditions ci-dessus en termes d'équations en a, b, c.
(c) Existe-t-il un système qui vérifie toutes les contraintes ? Si oui donner sa transformée en z, préciser s'il est stable et si le problème a une unique solution.