Série 16

Exercice 16.1 : DTFT (BASIQUE)

Voici un exercice pour vous entrainer à maîtriser le concept de DTFT récemment vu en cours. Vous serez amenés à calculer la DTFT de différents signaux, et l'on vous rappelera le lien avec la transformée en z. Cet exercice est le premier d'une longue série de prolèmes dans lesquels il vous sera demandé de calculer et dessiner des modules et des phases de fonctions complexes. Il est donc important de s'assurer que vous êtes à l'aise avec ce genre d'objets.

On considère les quatre signaux suivants

$$\begin{aligned} f_1[n] &= \delta[n] \\ f_2[n] &= \frac{\delta[n-2]-\delta[n+2]}{\mathrm{j}} \\ f_3[n] &= \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1] \\ f_4[n] &= \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+1]. \end{aligned}$$

1) Rappeler le lien entre la transformée de Fourier à temps discret (DTFT) et la transformée en z.

2) Pour chacun des signaux f_1 à f_4, calculer leur DTFT de façon explicite (*i.e.* en utilisant la définition).

3) Pour chacun des signaux f_1 à f_4, donner les expressions du module et de la phase de leur DTFT. *On peut laisser des* $arg(a + \mathrm{j}b)$ *dans les expressions de la phase.*

4) Représenter les spectres d'amplitude et de phase de ces DTFT.

5) Vérifier les réponses du point **2)** en calculant les transformées en z des signaux f_1 à f_4 et en appliquant la relation du point **1)**.

Exercice 16.2 : FONCTION DE TRANSFERT RATIONNELLE (BASIQUE)

Vous l'aurez déjà compris avec les exercices des séries précédentes, l'analyse d'un système discret est un des problèmes ultra typiques de ce second semestre. Voici encore un exercice du même genre que vous devriez donc être capable de résoudre aisément, en vous rappelant qu'il s'agit d'un problème de type "examen".

On considère un système dont l'entrée $x[n]$ et la sortie $y[n]$ sont liées par l'équation suivante,

$$15y[n] - 8y[n-1] + y[n-2] = x[n] - 2x[n-1].$$

1) Donner l'expression de la fonction de transfert $H(z)$ de ce filtre.

2) Représenter les pôles et zéros du système dans le plan complexe.

3) Déterminer la réponse impulsionnelle causale $h[n]$ correspondant à ce système. Est-elle stable ?

4) Déterminer la réponse aux entrées suivantes.

(a) $x_1[n] = (\frac{1}{5})^n u[n]$

(b) $x_2[n] = (\frac{1}{2})^n$.

Exercice 16.3 : NOMBRES COMPLEXES (INTERMÉDIAIRE)

Les différentes définitions des transformées de Fourier discrètes que vous allez utiliser ce semestre utilisent les nombres complexes. On propose donc dans cet exercice de revoir quelques résultats qui *pourront vous être utiles par la suite. Si cet exercice n'est en soi pas directement lié à l'analyse de signaux et de systèmes, il demande d'effectuer des manipulations avec lesquelles il est bon d'être à l'aise. C'est donc un très bon échauffement pour vous préparer à utiliser des concepts plus poussés que vous verrez dans le cours.*

Soit N un entier strictement positif. On note $W_N = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi/N}$.

1) Représenter dans le plan complexe les points ${W_6}^{nk}$ pour $k = 0, \dots, 11$ sur trois graphiques différents correspondant à $n = 1, 2, 3$.

2) Calculer ${W_N}^{Nk}$, qui correspond à ${W_N}^{nk}$ lorsque $n = N$.

3) Déduire des deux questions précédentes la valeur de $\sum_{k=0}^{N-1} {W_N}^{nk}$.
On devra ici considérer deux cas, selon que n est divisible par N ou non.

Exercice 16.4 : CONVOLUTION DE SIGNAUX À BANDE LIMITÉE (AVANCÉ)

Voici enfin l'occasion tant attendue d'utiliser en même temps vos connaissances du premier et du second semestre, d'entremêler signaux continus et discrets, et par cette unification d'entrevoir toute la magnifiscience du cours de Signaux et Systèmes ! Plus sobrement, cet exercice vous permet de faire le lien important entre signaux continus et discrets par le biais de l'échantillonage. Vous pourrez ainsi comprendre comment on parvient à effectuer des calculs continus en utilisant des versions discrètes des signaux. Et, si toutes ces belles choses ne sont pas suffisantes à vous motiver, on pourra finalement mentionner que les assistants aiment bien mélanger ainsi les concepts des deux semestres autour du mois de juin.

1) Soient les deux fonctions **continues** $f(t) = \mathrm{sinc}(t/2)$ et $g(t) = \mathrm{sinc}(t-1)$, et les deux suites **discrètes** $a[k] = f(t)|_{t=k}$ et $b[k] = g(t)|_{t=k}$.

(a) Montrer que f et g sont à bande limitée dans $[-\pi, \pi]$.

(b) Calculer leur produit de convolution **continu** $h(t) = (f * g)(t)$.

(c) La fonction $h(t)$ calculée ci-dessus est-elle à bande limitée ? Si oui, indiquer son support fréquentiel.

(d) Calculer le produit de convolution **discret** $c[k] = (a * b)[k]$.

(e) Vérifier que les suites **discrètes** $h[k]$ et $c[k] = h(t)|_{t=k}$ sont identiques.

2) Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux signaux **continus** quelconques à bande limitée dans $[-\pi, \pi]$ et $h(t)$ leur produit de convolution **continu**. Pour une période d'échantillonnage $T > 0$, on construit les suites **discrètes** $a[k] = f(t)|_{t=Tk}$, $b[k] = g(t)|_{t=Tk}$ et $c[k] = h(t)|_{t=Tk}$.

(a) Quelle est la valeur maximale de la période d'échantillonnage T afin de pouvoir reconstruire sans erreur les signaux à partir de leurs échantillons ?

(b) On suppose par la suite la condition de reconstruction de la question précédente remplie. Rappeler la formule de reconstruction de Shannon pour les signaux $f(t)$ et $g(t)$.

(c) Démontrer l'équation

$$(f * g)(Tk) = T \cdot (a * b)[k].$$

(d) Déduire de la question précédente que l'on a

$$h(t) = f(t) * g(t) = T \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a * b)[k] \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right).$$

On commencera par justifier que la formule de reconstruction de Shannon s'applique pour $h(t)$.

(e) En s'inspirant du point (d), proposer une façon de calculer le résultat de convolutions **continues** entre signaux à bande limitée en utilisant des convolutions **discrètes**.