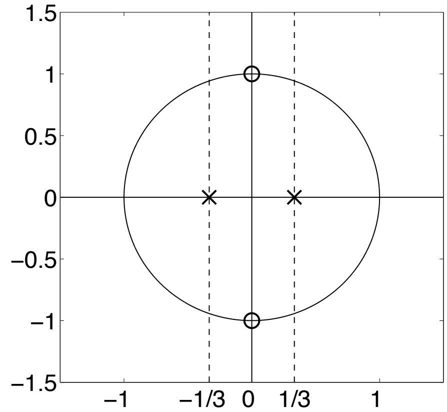
Série 15

Exercice 15.1 : PÔLES ET ZÉROS (BASIQUE)

Voici un exercice standard de caractérisation de système discret. Il permet de tester votre capacité à jongler avec les différents types de représentation d'un même système (diagramme pôles-zéros, réponse impulsionnelle, fonction de transfert) et de s'assurer que vous maîtrisez les définitions importantes (stabilité, RIF/RII, réalisabilité). Ce genre d'exercice fait partie du minimum vital de connaissances nécessaires pour survivre au second semestre de Signaux et Systèmes

Soit le filtre rationnel caractérisé par le diagramme pôles-zéros suivant. Le filtre est normalisé pour que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} h[n] = 1$.



1) Déterminer la fonction de transfert $H(z)$ du filtre.

2) Déterminer la réponse impulsionnelle causale $h[n]$ correspondante.

3) Le système correspondant à la réponse impulsionnelle $h[n]$ déterminée ci-dessus est-il stable ? Réalisable ? RIF/RII ? Justifier toutes les réponses.

Exercice 15.2 : SOLUTION PROPRE, RÉPONSE IMPULSIONNELLE (BASIQUE)

On propose ici d'analyser des systèmes discrets décrits par des équations aux différences en restant dans le domaine temporel. Cette procédure a été expliquée en cours aux pages 9-13 à 9-18. Il s'agit d'une façon valide parmi d'autres d'étudier une équation aux différences, et il est important d'être à l'aise avec cette approche, tant qu'avec les autres.

1) Soit le système caractérisé par l'équation aux différences

$$8y[n] + 2y[n-1] - y[n-2] = x[n],$$

avec $x[n]$ comme entrée et $y[n]$ comme sortie.

(a) Exprimer le système sous la forme $a_0(\mathrm{I} - r_1\mathrm{S})(\mathrm{I} - r_2\mathrm{S})\{y\} = x$ et déterminer les coefficients $a_0, r_1, r_2 \in \mathbb{C}$.

(b) Donner l'opérateur LID S_h tel que $y = \mathrm{S}_h\{x\}$.

(c) Calculer la réponse impulsionnelle $h[n]$ de S_h.

(d) Donner la forme générale de la solution de l'équation homogène.
La solution de l'équation homogène est celle correspondant à une entrée nulle. On peut donc s'aider de la page 9-16 du cours.

2) Soit le système caractérisé par l'équation aux différences

$$y[n] - \tfrac{1}{5}y[n-1] = x[n] + x[n-1],$$

avec $x[n]$ comme entrée et $y[n]$ comme sortie.

(a) Exprimer le système sous la forme $a_0(\mathrm{I} - r_1\mathrm{S})\{y\} = (b_0\mathrm{I} + b_1\mathrm{S})\{x\}$ et déterminer les coefficients $a_0, r_1, b_0, b_1 \in \mathbb{C}$.

(b) Donner l'opérateur LID S_h tel que $y = \mathrm{S}_h\{x\}$.

(c) Calculer la réponse impulsionnelle $h[n]$ de S_h.

(d) Donner la forme générale de la solution de l'équation homogène.
La solution de l'équation homogène est celle correspondant à une entrée nulle. On peut donc s'aider de la page 9-16 du cours.

Exercice 15.3 : FONCTIONS DE TRANSFERT RATIONNELLES (BASIQUE)

On étudie dans cet exercice les mêmes systèmes qu'au ***15.2****, mais cette fois-ci en utilisant la transformée en z. Cette approche est décrite dans le cours aux pages 9-27 et 9-28. Le but est ici de vous permettre de constater que l'on peut attaquer le même problème de différentes manières, que chaque approche a ses avantages et ses inconvénients, mais que vous êtes tenus de maîtriser chaque méthode.*

1) Soit le système caractérisé par l'équation aux différences

$$8y[n] + 2y[n-1] - y[n-2] = x[n],$$

avec $x[n]$ comme entrée et $y[n]$ comme sortie. On note $X(z)$ et $Y(z)$ les transformées en z des signaux $x[n]$ et $y[n]$.

(a) Donner la relation qui relie $Y(z)$ et $X(z)$.

(b) Déduire de la question précédente la fonction de transfert du système, $H(z)$.

(c) Calculer $h[n]$, la réponse impulsionnelle causale correspondante.

2) Soit le système caractérisé par l'équation aux différences

$$y[n] - \tfrac{1}{5}y[n-1] = x[n] + x[n-1],$$

avec $x[n]$ comme entrée et $y[n]$ comme sortie. On note $X(z)$ et $Y(z)$ les transformées en z des signaux $x[n]$ et $y[n]$.

(a) Donner la relation qui relie $Y(z)$ et $X(z)$.

(b) Déduire de la question précédente la fonction de transfert du système, $H(z)$.

(c) Calculer $h[n]$, la réponse impulsionnelle causale correspondante.

3) Comparer les résultats obtenus ci-dessus avec ceux de l'exercice **15.2**. Qu'observe-t-on ?

Exercice 15.4 : MOMENTS (INTERMÉDIAIRE)

Cet exercice permet de mette en lumière une relation importante entre la transformée en z d'un signal discret et ses moments de différents ordres. Le type de résultats que vous allez découvrir dans cet exercice devrait en outre vous rappeller une relation très similaire vue au premier semestre impliquant la transformée de Fourier et les moments d'un signal continu.

Rappel : La somme d'une série géométrique finie de la forme $\sum_{n=0}^{N} q^n$ *s'obtient par la formule*

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

1) Soit $x[n]$ un signal discret. Donner la définition de sa transformée en z, $X(z)$. Quel est le lien entre $X(z)$ et le moment d'ordre 0 de $x[n]$, $m_0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]$?

2) On suppose que $x[n]$ est à support fini dans $\{-N, \cdots, N\}$. Calculer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z)$. Quel est le lien avec le moment d'ordre 1 de $x[n]$, $m_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\, x[n]$?

3) Calculer explicitement $m_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} nx[n]$ dans le cas où

$$x[n] = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } |n| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que la transformée en z de $x[n]$ est

$$X(z) = 4z^2 \frac{1 - \frac{z^{-5}}{32}}{1 - \frac{z^{-1}}{2}}.$$

Calculer ensuite $X'(z)$ pour obtenir la valeur de m_1 à l'aide de la relation obtenue au point **2)**.

4) La relation $m_1 = -X'(1)$ est en fait valable pour des signaux à support infini. En utilisant ce résultat, calculer m_1 pour $x[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$.

5) Sur le même modèle que **2)**, proposer une formule permettant de calculer le moment d'ordre 2 de $x[n]$, $m_2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 x[n]$, à partir de $X(z)$.

Exercice 15.5 : SOLUTION PROPRE, RÉPONSE IMPULSIONNELLE (INTERMÉDIAIRE)

On propose ici de décrire et d'analyser des systèmes discrets décrits à l'aide d'équations aux différences en restant dans le domaine temporel. En complément de l'exercice **15.2***, on va chercher d'abord à modéliser un système, puis d'étudier son comportement en résolvant les équations aux différences qui régissent le système.*

On considère une certaine espèce de plante. Ces plantes produisent des graines à la fin de l'été et meurent en hiver. Un certain nombre de ces graines va germer au printemps, donnant naissance à de nouvelles plantes. Certaines de ces graines vont rester dormantes pendant une année et ne germeront que l'année suivante. Les graines plus âgées que 2 ans meurent et ne germent donc pas. Au cours de l'hiver, certaines graines meurent et ne germent donc pas au printemps suivant. Durant l'année, les personnes cultivant ces plantes peuvent soit les récolter (avant que leurs graines ne se dispersent), soit en ajouter au début du printemps

1) Nous allons d'abord mettre ce système en équations. Pour cela, il faut tout d'abord définir les paramètres du système :

— γ est le nombre de graines produites par une plante à la fin de l'été,

— α est la proportion de graines âgées d'une année qui germent au printemps,

— β est la la proportion de graines âgées de 2 ans qui germent au printemps,

— σ est la proportion des graines qui survivent à un hiver.

α, β et σ sont des paramètres appartenant à l'intervalle $[0, 1]$.

On va décrire l'évolution de ce système au cours du temps à l'aide des quantités suivantes :

— $p[n]$ est le nombre de plantes à l'année n,

— $x[n]$ est le nombre de plantes récoltées (si $x[n] < 0$) ou introduites (si $x[n] > 0$) durant l'année n.

— $s_0[n]$ est le nombre de nouvelles graines, à la fin de l'été de l'année n,

— $s_1[n]$ est le nombre de graines âgées d'une année, au printemps de l'année n,

— $s_2[n]$ est le nombre de graines âgées de deux ans, au printemps de l'année n,

— $\bar{s_1}[n]$ est le nombre de graines d'une année qui n'ont pas germé au printemps de l'année n.

(a) Quelle relation lie $p[n]$ avec $x[n], s_1[n]$ et $s_2[n]$?

(b) Exprimer $s_0[n]$ en fonction de $p[n]$, et $\bar{s_1}[n]$ en fonction de $s_1[n]$.

(c) Exprimer $s_1[n]$ en fonction de $s_0[n-1]$ et $s_2[n]$ en fonction de $\bar{s_1}[n-1]$.

(d) En utilisant les résultats précédents, écrire l'équation aux différences du système reliant $x[n]$ (entrée) et $p[n]$ (sortie)

2) (a) Exprimer le système sous la forme $a_0(\mathrm{I}-r_1\mathrm{S})(\mathrm{I}-r_2\mathrm{S})\{p\} = x$. On se contentera de justifier que cette forme existe **sans calculer explicitement** r_1 **et** r_2 (pour l'instant). Donner l'opérateur LID S_h tel que $p = \mathrm{S}_h\{x\}$.

(b) Calculer la réponse impulsionnelle $h[n]$ de S_h.

(c) Donner la forme générale de la solution de l'équation homogène.
La solution de l'équation homogène est celle correspondant à une entrée nulle. On peut donc s'aider de la page 9-16 du cours.

3) On s'intéresse dans cette partie au comportement du système en fonction des paramètres

(a) Montrer que les racines du polynôme caractéristiques peuvent s'écrire sous la forme

$$r = \frac{\gamma\sigma\alpha}{2}(1 \pm \sqrt{1 \ + \delta}),$$

et calculer la valeur de δ.

(b) On suppose que δ est proche de zéro. Comment peut-on se trouver dans ce cas (justifier avec les paramètres du système) ? Que deviennent les racines ?

(c) Discuter de l'évolution du système en fonction des paramètres dans le cas δ négligeable. Quelles sont les limitations du modèle ?