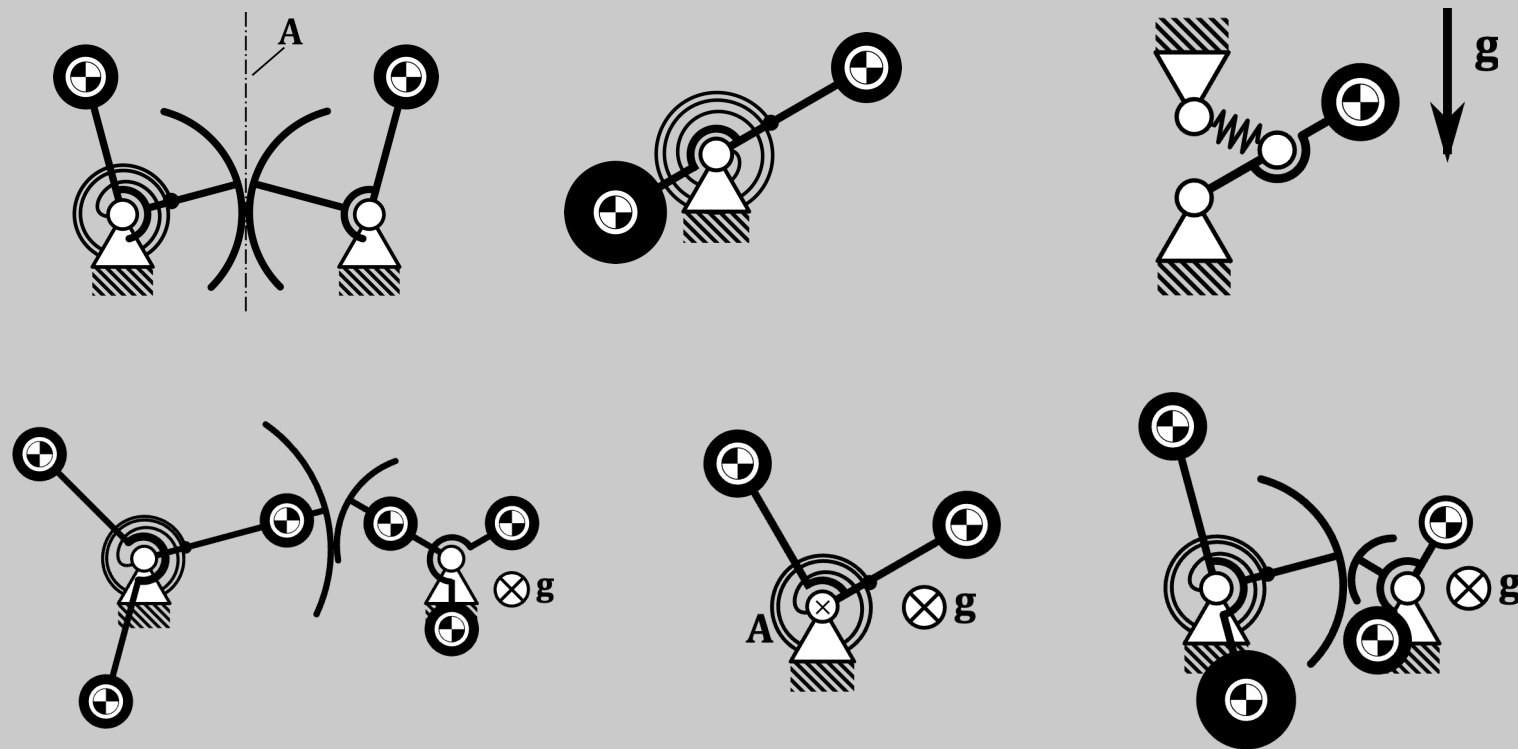


Equilibrage des mécanismes



Hubert Schneegans
Simon Henein

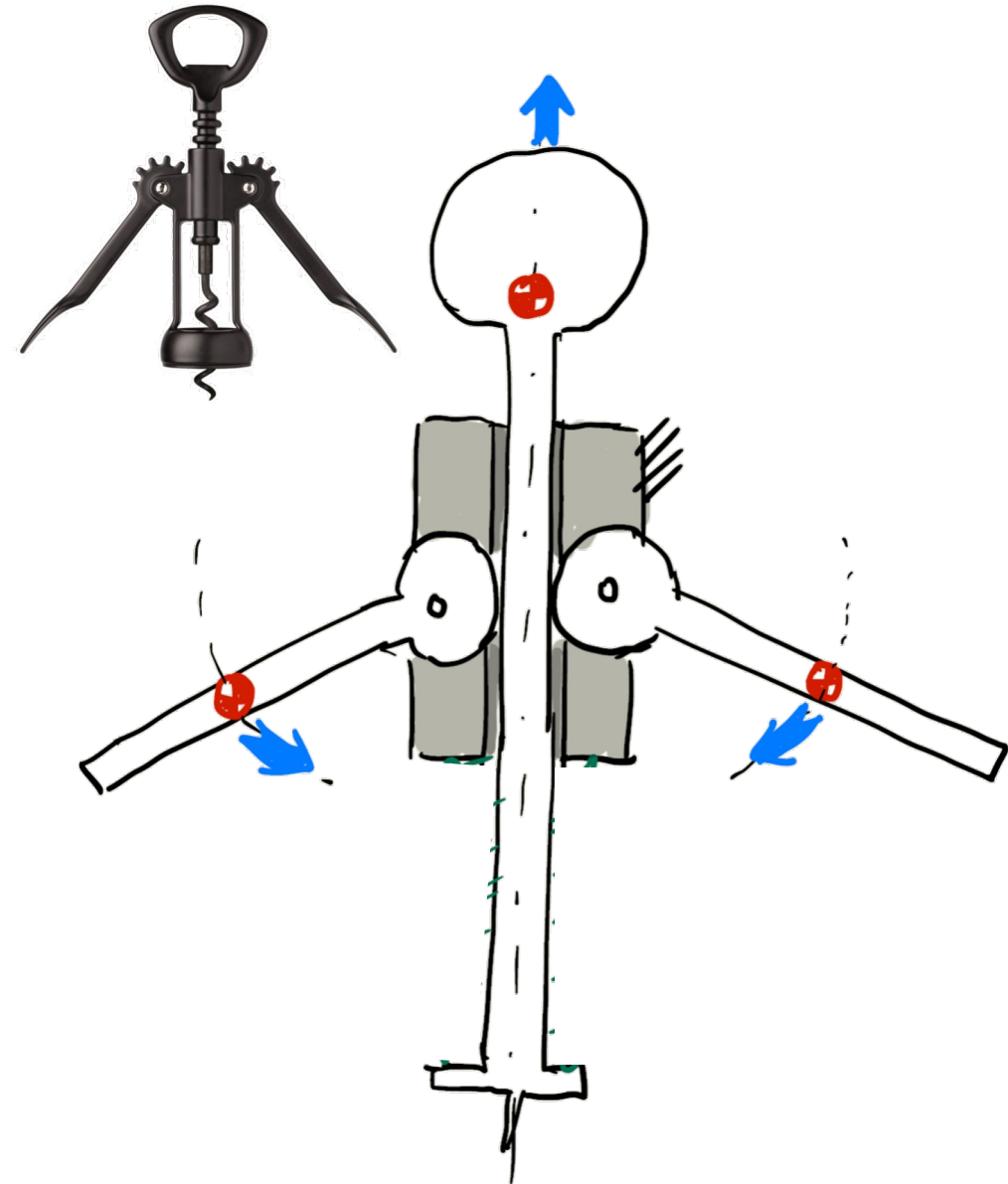
Instant-Lab
IGM – STI – EPFL

26 Fevrier 2025

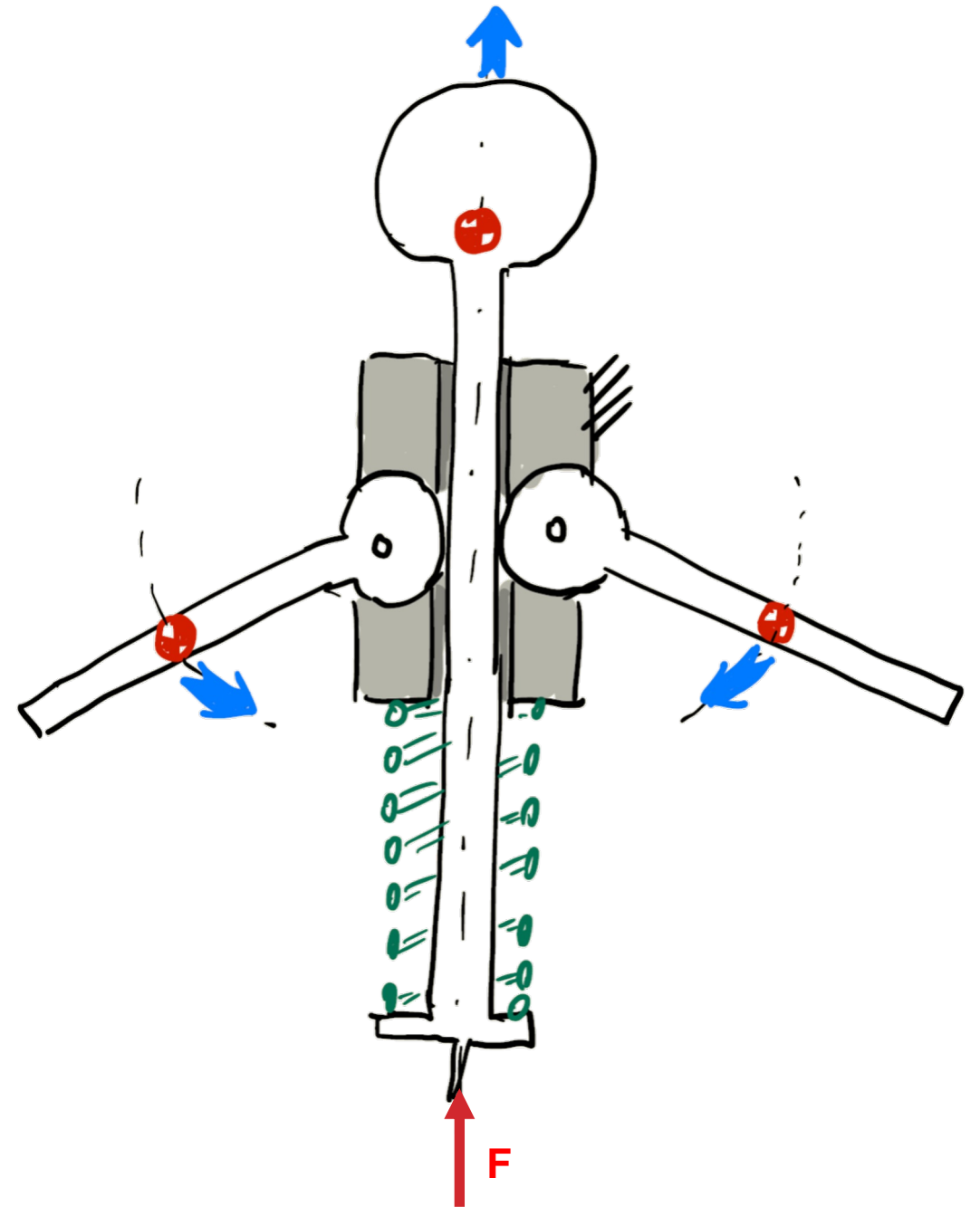
Equilibrage des mécanismes

- ✓ — **Equilibrage en force (Type F) : valide localement**
« Le centre de gravité du mécanisme reste immobile lorsqu'il bouge. »
- ✓ — **Equilibrage en moment (Type M): valide globalement**
« Chaque inertie dont le mouvement est "horaire" a son homologue "anti-horaire". »
- ✗ — **Equilibrage statique (Type S): valide localement:**
« L'énergie potentielle totale reste constante au cours du mouvement. »
- ✗ — **Invariance inertielle (Type I): non valide**
« Les moments d'inertie du mécanisme varient en fonction de sa position ».

Exemple du tire-bouchon



Projet FLYFORCE



Projet FLYFORCE

Cahier des charges FLYFORCE :

- **FM** : Equilibrage dynamique
- **FMI**: Equilibrage inertiel (optionnel)

En pratique :

F*: « Centre de gravité immobile lorsque le mécanisme bouge ».

M*: « Toute inertie “horaire” a son homologue “antihoraire” ».

I*: « Les moments d’inertie du mécanisme sont invariables quelque soit sa position ».

Classification des types d'équilibrage

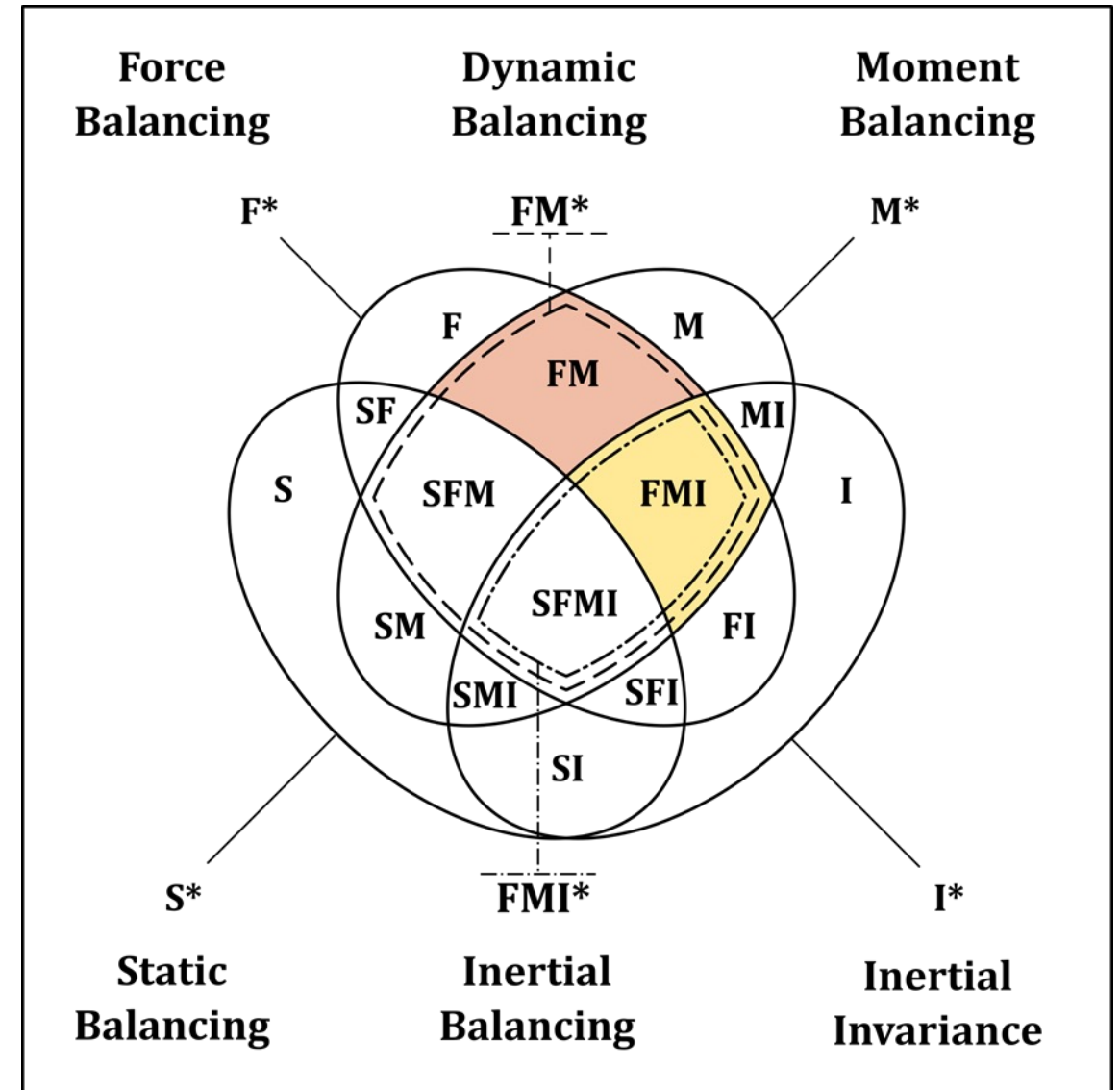
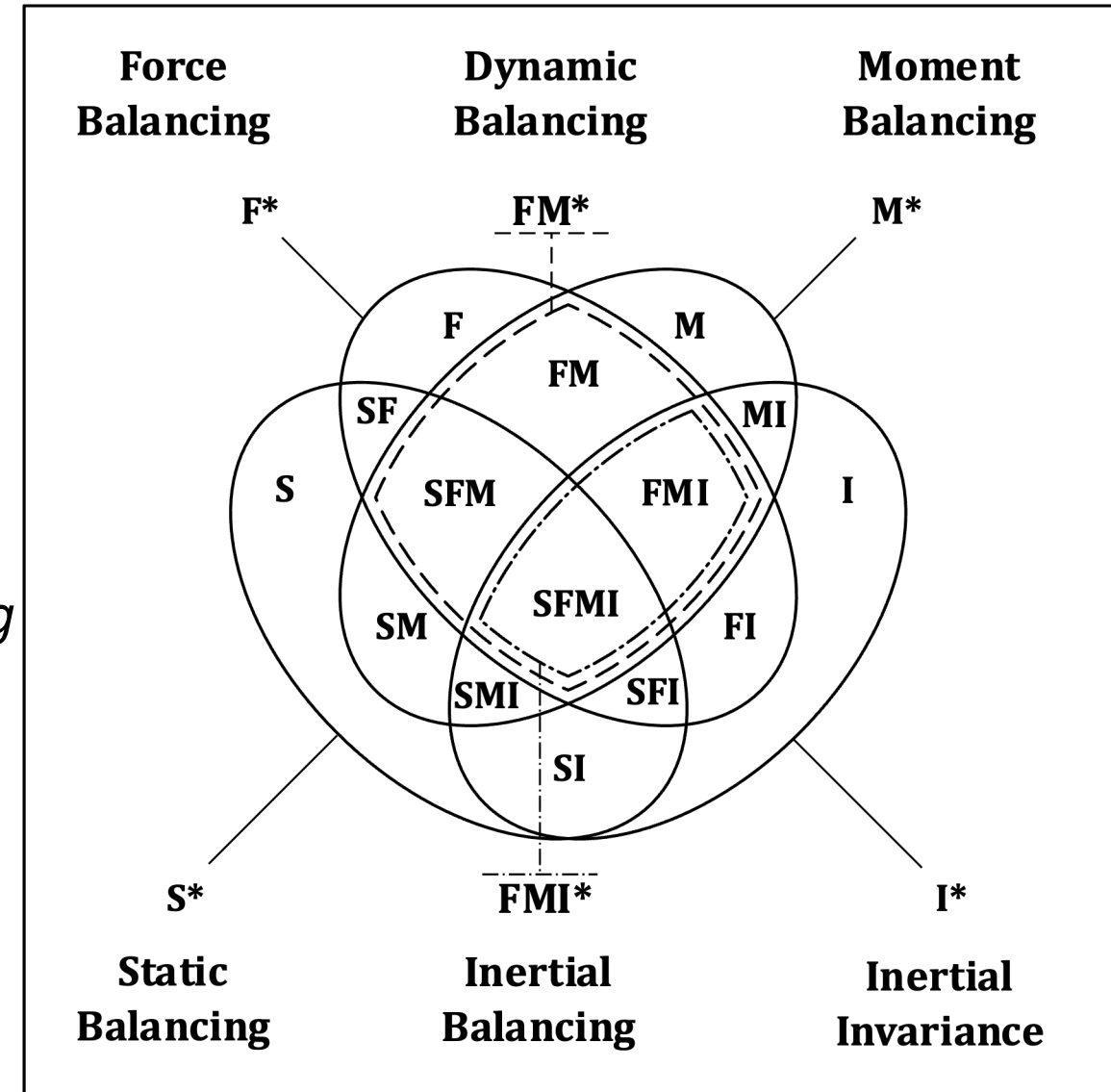


Table des matières

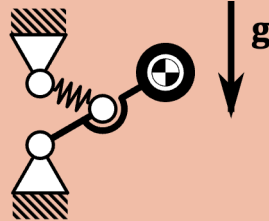
- Introduction
- S^* : Equilibrage statique / *Static balancing*
- F^* : Equilibrage en force / *Force balancing*
- M^* : Equilibrage en moment / *Moment balancing*
- FM^* : Equilibrage dynamique / *Dynamic balancing*
- I^* : Invariance inertielle / *Inertial invariance*
- FMI^* : Equilibrage inertiel / *Inertial balancing*



Introduction

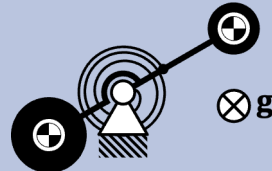
Equilibrage Statique S*

- \mathbf{V} Energie potentielle constante
- \mathbf{Z} Mécanisme zéro-force
- \mathbf{Eq} Equilibre indifférent



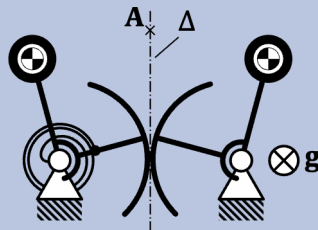
Equilibrage en Force F*

- \mathbf{p} Quantité de mouvement constante
- \mathbf{G} Centre de masse fixe par rapport au bâti
- φ_g Insensibilité à l'orientation de la gravité
- \mathbf{F} Pas d'exportations de forces au bâti
- \mathbf{V}_g Potentiel de gravité constant
- \mathbf{Y} Insensibilité aux accélérations linéaires



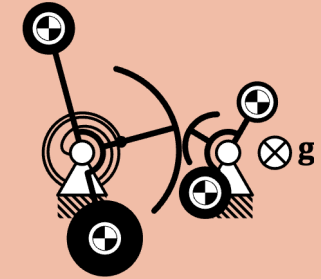
Equilibrage en Moment M*

- σ_A Moment cinétique constant en A
- \mathbf{M}_A Pas d'exportations de moments au bâti en A
- α_A Insensibilité aux accélérations angulaires en A



Equilibrage Dynamique FM*

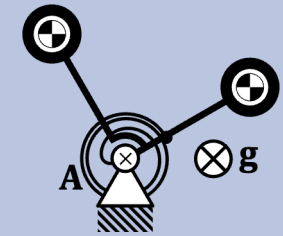
- \mathbf{p} Quantité de mouvement constante
- \mathbf{G} Centre de masse fixe par rapport au bâti
- φ_g Insensibilité à l'orientation de la gravité
- \mathbf{F} Pas d'exportations de forces au bâti
- \mathbf{V}_g Potentiel de gravité constant
- \mathbf{Y} Insensibilité aux accélérations linéaires



- σ Moment cinétique constant
- \mathbf{M} Pas d'exportations de moments au bâti
- α Insensibilité aux accélérations angulaires

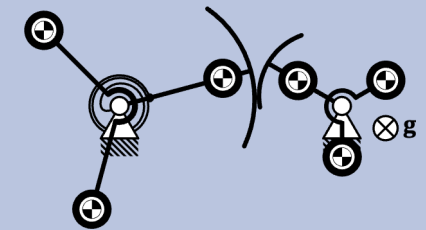
Invariance inertielle I*

- \mathbf{J}_A Tenseur d'inertie invariant en position en A
- Ω_A Insensibilité aux vitesses angulaires



Equilibrage inertiel FMI*

- \mathbf{p} Quantité de mouvement constante
- \mathbf{G} Centre de masse fixe par rapport au bâti
- φ_g Insensibilité à l'orientation de la gravité
- \mathbf{F} Pas d'exportations de forces au bâti
- \mathbf{V}_g Potentiel de gravité constant
- \mathbf{Y} Insensibilité aux accélérations linéaires

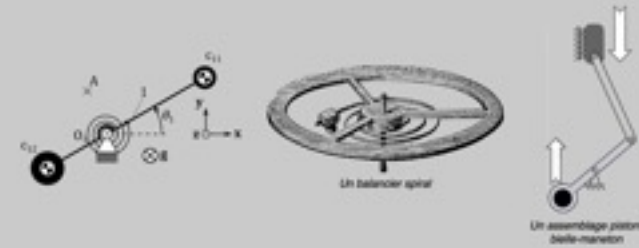


- σ Moment cinétique constant
- \mathbf{M} Pas d'exportations de moments au bâti
- α Insensibilité aux accélérations angulaires
- \mathbf{J} Tenseur d'inertie invariant en position
- Ω Insensibilité aux vitesses angulaires

Equilibrage statique (S^*)



Equilibrage en force (F^*)



Equilibrage en moment (M^*)



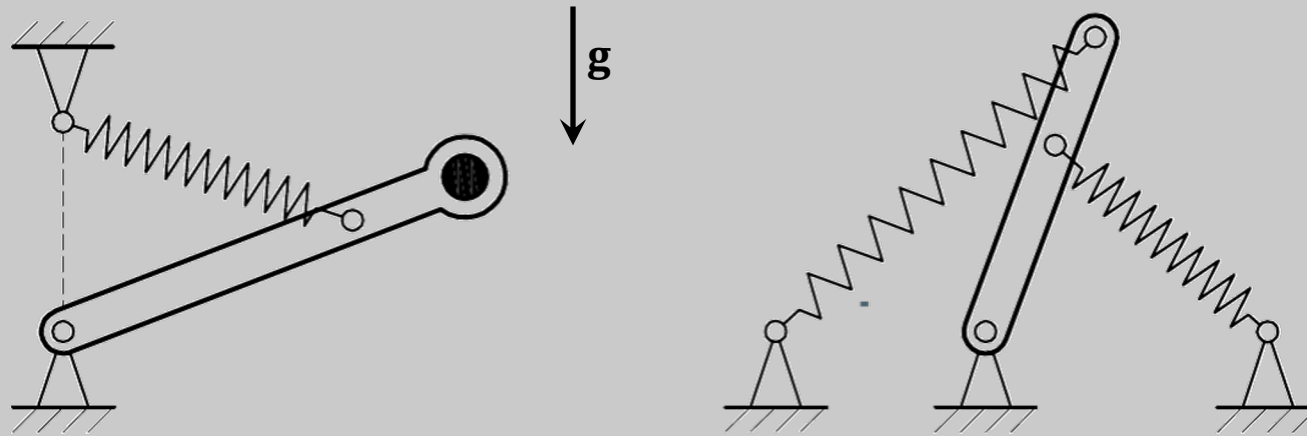
Equilibrage dynamique (FM^*)



Invariance inertielle (I^*) & Equilibrage inertielle (FMI^*)



Equilibrage statique (S^*)





Source:
<https://www.dailymotion.com/video/x4ezcx8>

Equilibrage statique (S^*)

Définition :

Dans un référentiel inertiel, un mécanisme est équilibré statiquement lorsque son énergie potentielle totale* (V_{tot}) est constante dans tout son espace de travail (tous les frottements étant supposés nuls).

Propriétés :

Si un mécanisme est équilibré statiquement dans un référentiel inertiel, alors:

- Le mécanisme est dit «zéro force».
- Le mécanisme est à l'équilibre dans tout son espace de travail (équilibre indifférent)
- Les actionneurs du système (s'il y en a) ne soutiennent pas le poids du mécanisme; ils ne servent alors qu'à l'accélérer ou à le freiner.

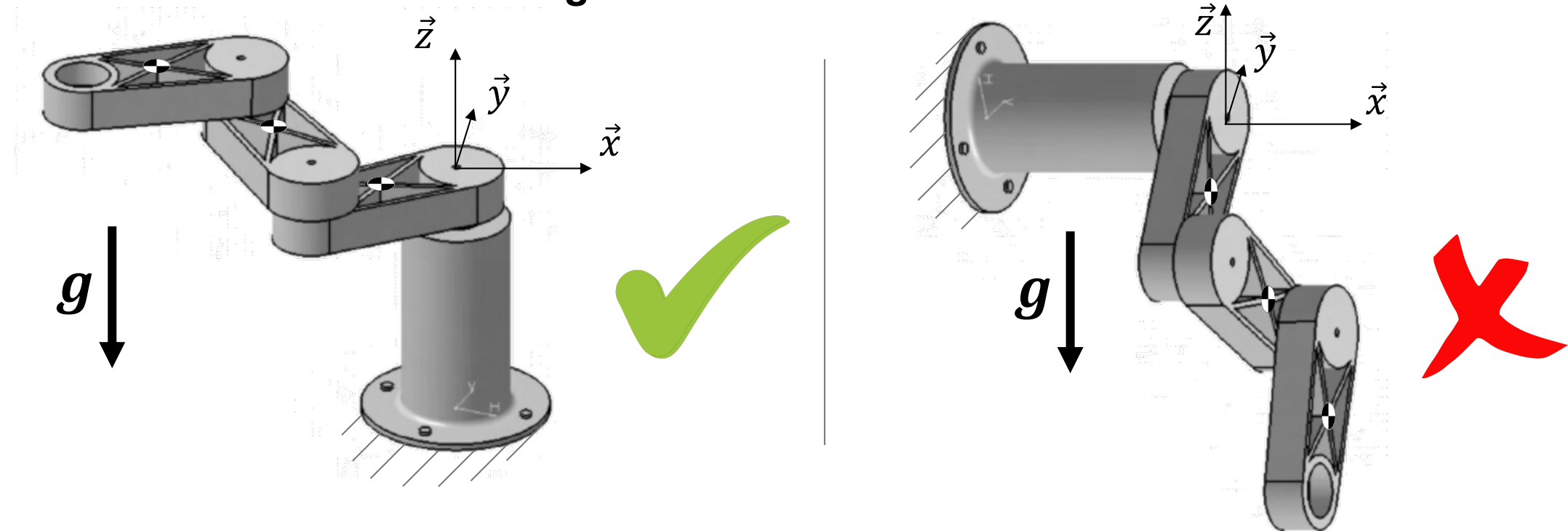
*Dans le cadre de ce cours, il s'agit de la somme de son énergie potentielle gravitationnelle et élastique.

Equilibrage statique (S^*)

Potentiels : Gravité uniquement

L'équilibrage statique d'un mécanisme ne possédant que des corps massiques (aucun potentiel élastique) revient à **garder son centre de masse total à la même altitude**.

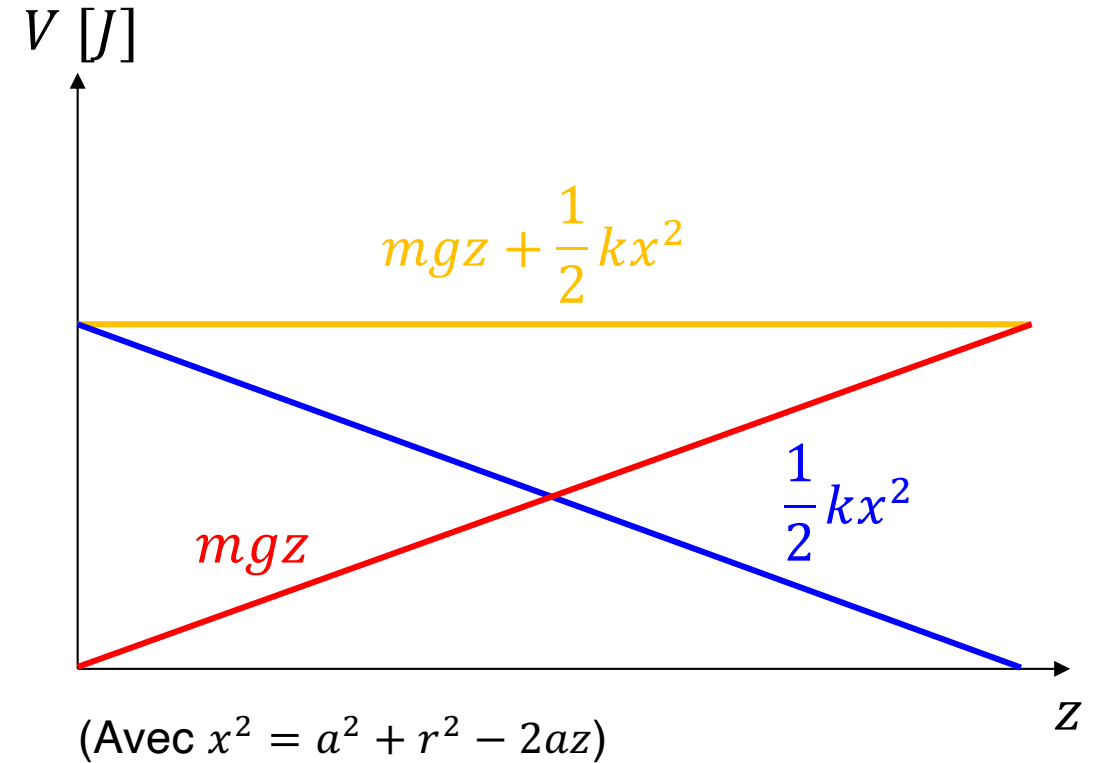
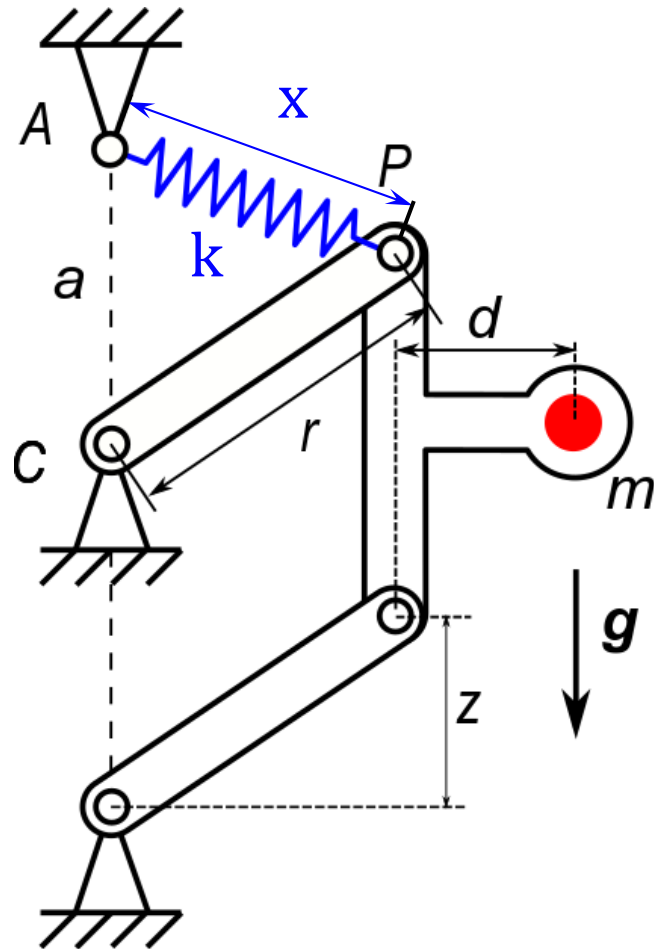
Si dans l'espace de travail d'un mécanisme, son centre de masse se déplace tout en restant à une même altitude, le **mécanisme est équilibré statiquement** MAIS est **sensible à l'orientation de la gravité**.



Equilibrage statique (S^*)

Potentiels : Gravité et Elastique

Mécanisme 4 barres à 1 degré de liberté



Conditions :

- $ka = mg$
- Le ressort a une longueur libre nulle

Equilibrage statique (S^*)

Potentiels : Gravité et Elastique

Mécanismes à 2 et 3 degrés de liberté équilibrés statiquement

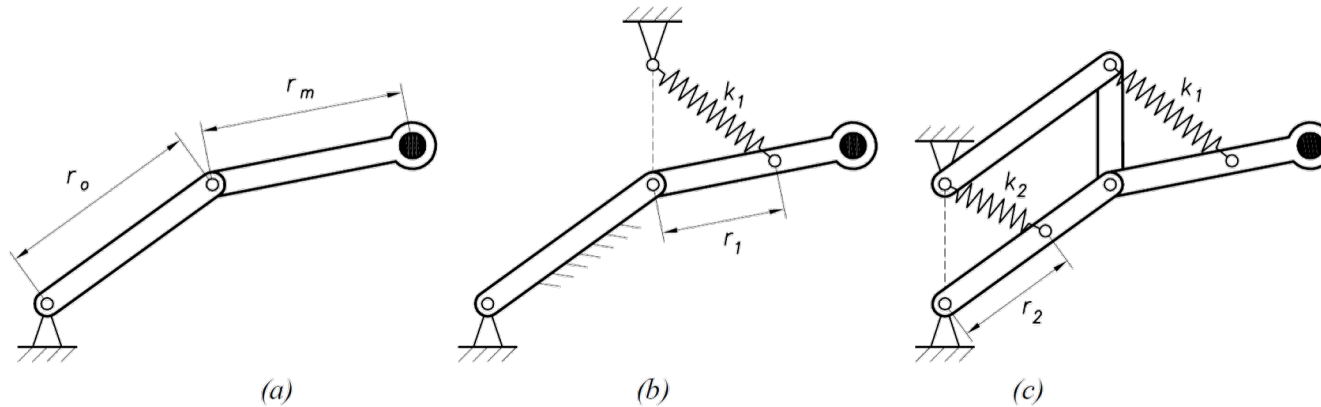
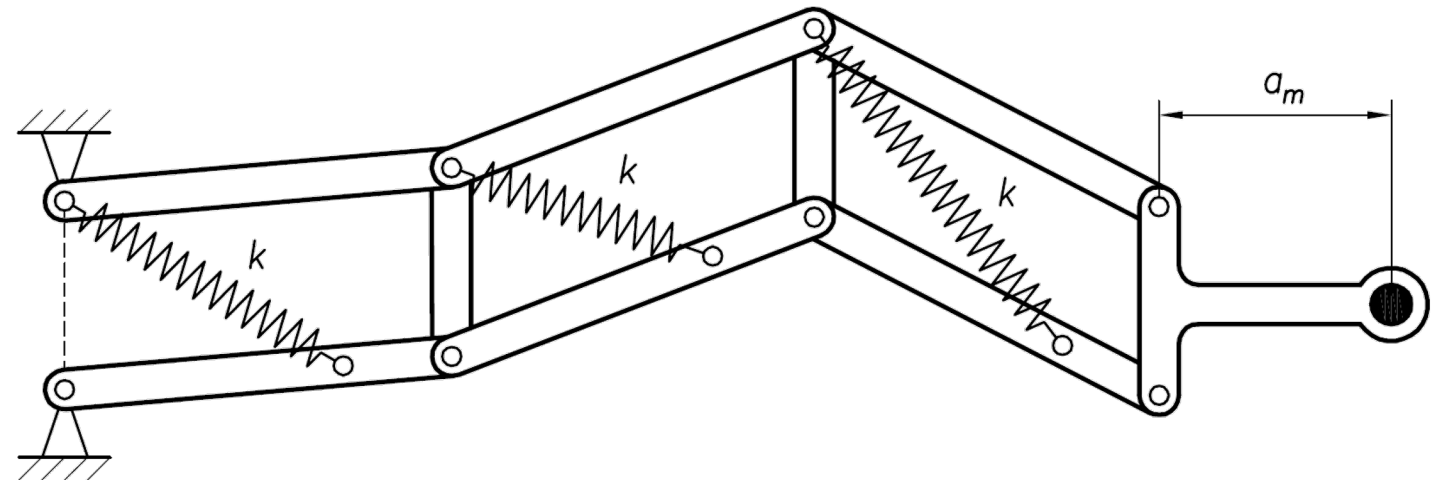


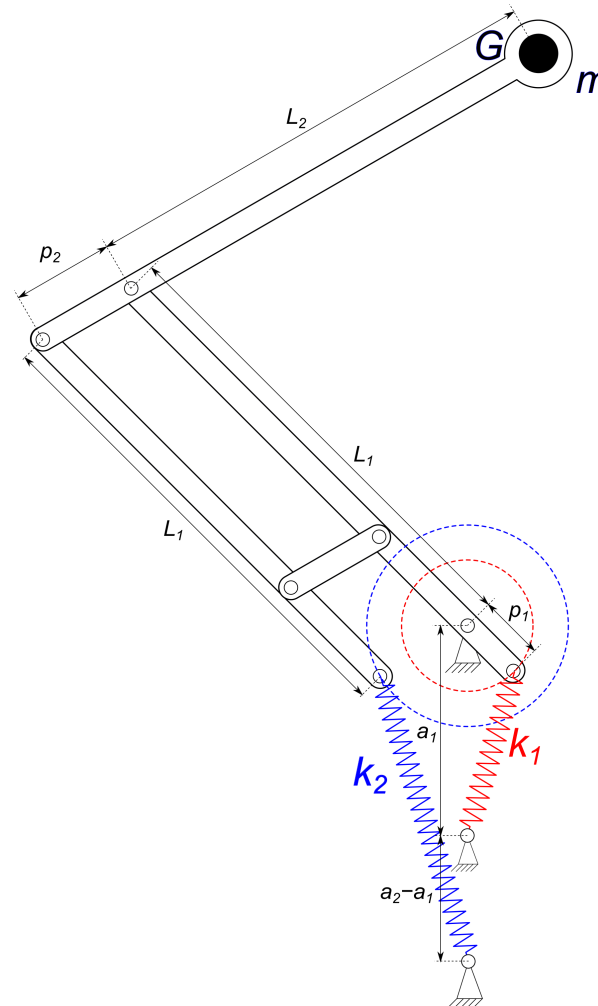
Figure 5.4 Two degrees-of-freedom: (a) statement of the problem, (b) equilibration of first element while second element remains fixed, (c) vertical yet mobile base for first element realized by parallelogram linkage, and balancer for second element.



Equilibrage statique (S^*)

Potentiels : Gravité et Elastique

La lampe Anglepoise



Equilibrage statique (S*)

Potentiels : Gravité et Elastique

La lampe Anglepoise

Le potentiel total de la lampe Anglepoise peut s'écrire :

$$V_{tot} = -m\mathbf{O}_1\mathbf{G} \cdot \mathbf{g} + \frac{1}{2}k_1[A_1B_1]^2 + \frac{1}{2}k_2[A_2B_2]^2$$

Avec :

$$\mathbf{O}_1\mathbf{G} = (L_1c_\varphi + L_2c_\theta)\mathbf{x} + (L_1s_\varphi + L_2s_\theta)\mathbf{y}$$

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{y}$$

$$[A_1B_1]^2 = a_1^2 + p_1^2 - 2a_1p_1s_\varphi$$

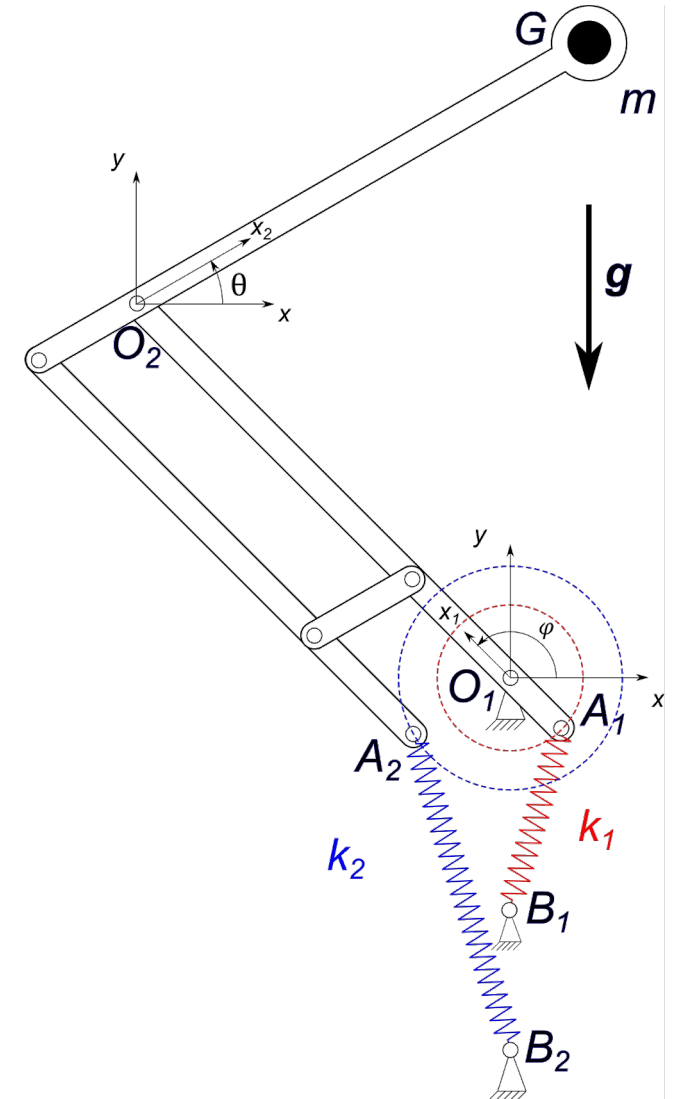
$$[A_2B_2]^2 = a_2^2 + p_2^2 - 2a_2p_2s_\theta$$

On a donc :

$$V_{tot} = \frac{1}{2}k_1(a_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}k_2(a_2^2 + p_2^2) + s_\varphi(mgL_1 - a_1p_1k_1) + s_\theta(mgL_2 - a_2p_2k_2)$$

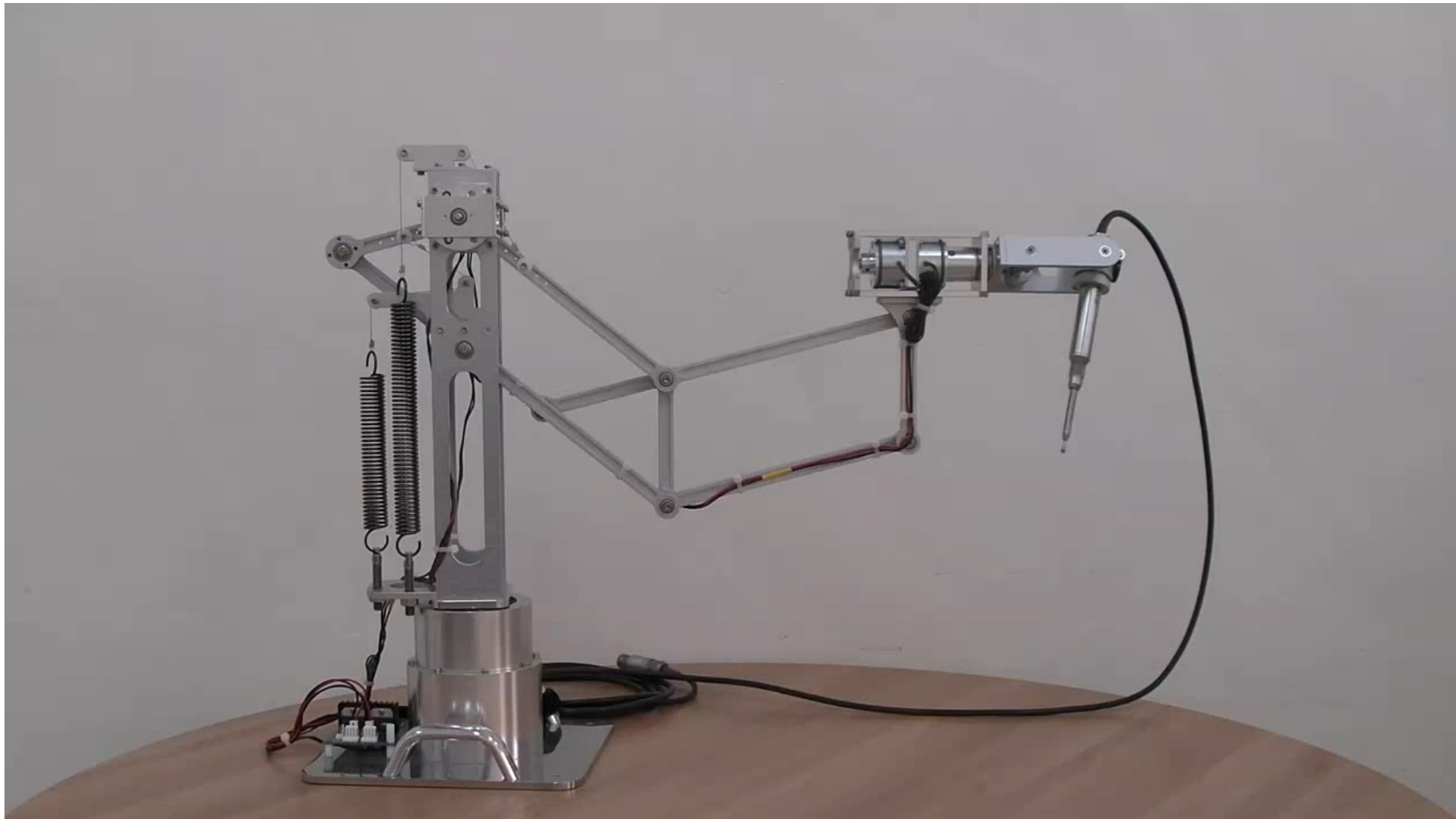
Les conditions pour atteindre l'équilibrage statique sont :

- $mgL_1 = a_1p_1k_1$
- $mgL_2 = a_2p_2k_2$
- Les ressorts ont une longueur à vide nulle.



Equilibrage statique (S^*)

Potentiels : Gravité et Elastique

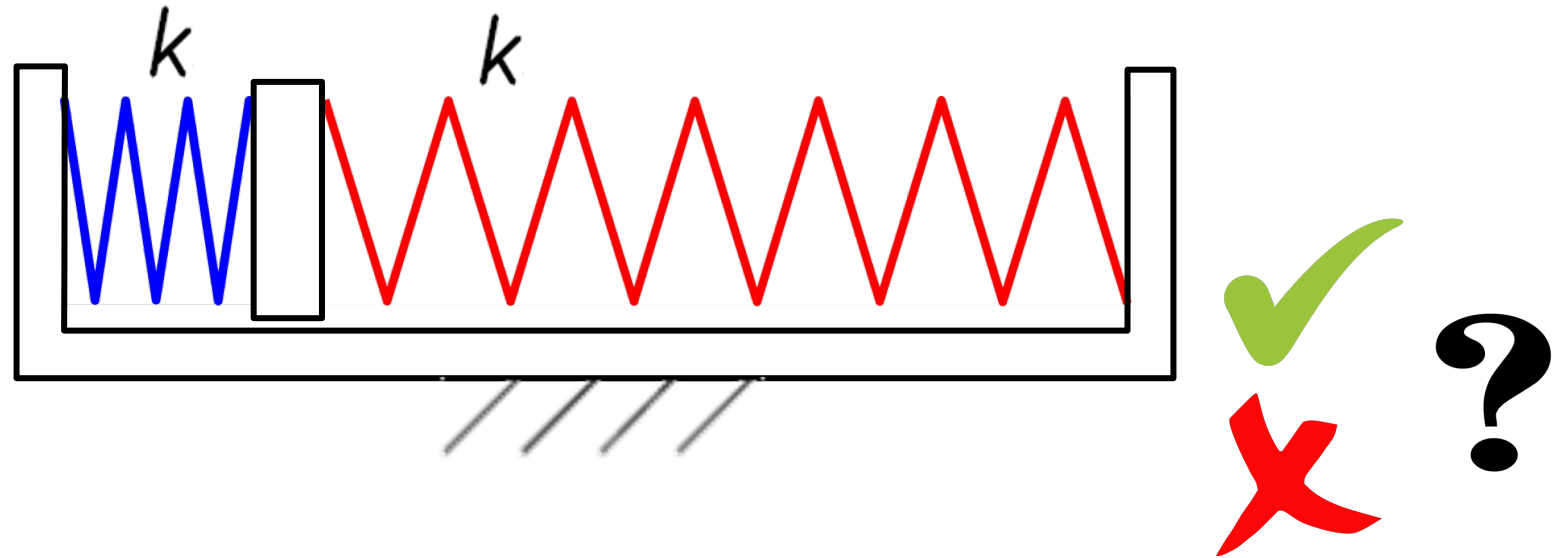


YouTube. (2018, November 10), Spring balancing, retrieve from <https://www.youtube.com/watch?v=XKq6cP4qjcY>.

Equilibrage statique (S^*)

Potentiels : Elastique uniquement

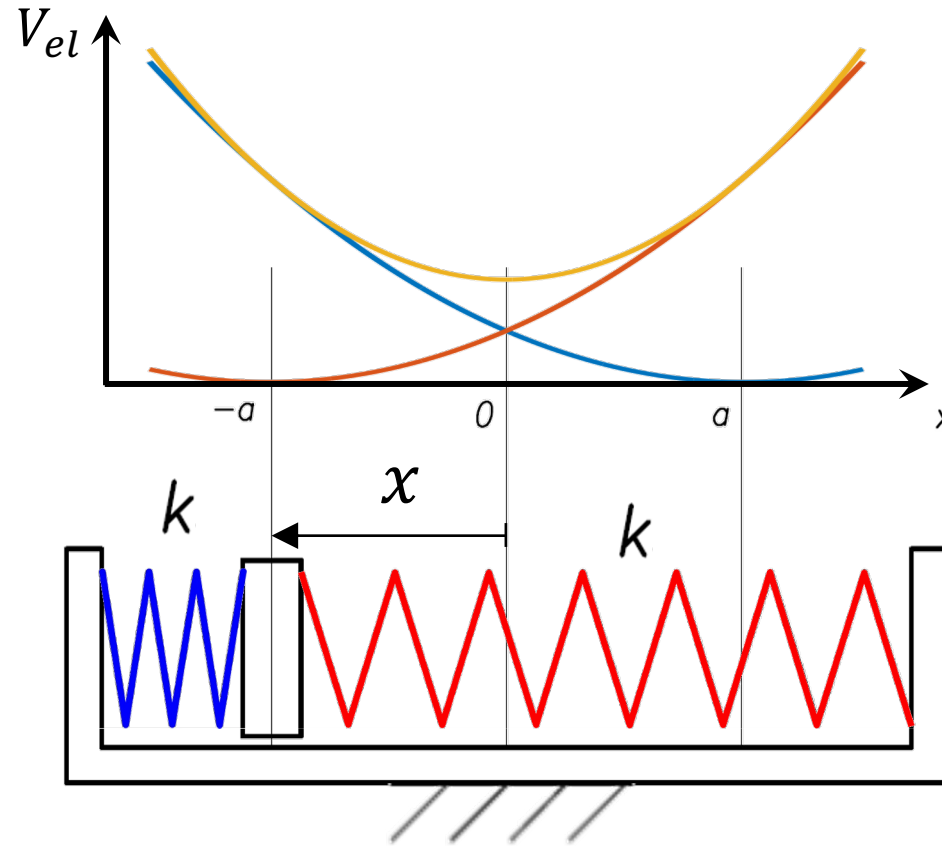
Equilibrage «ressort-ressort» fructueux ou infructueux ?



Equilibrage statique (S^*)

Potentiels : Elastique uniquement

Equilibrage statique **infructueux**

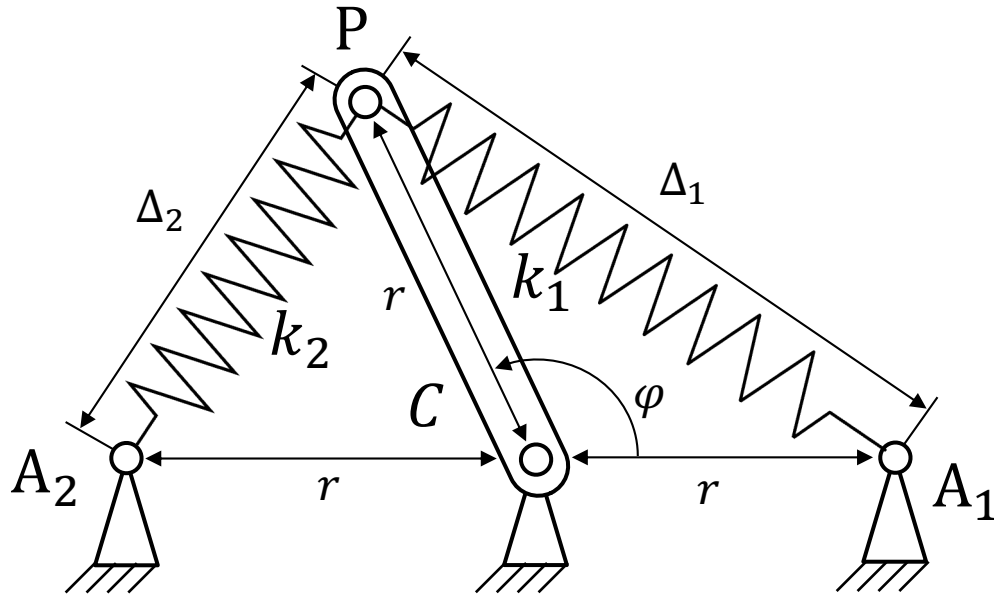


$$V_{\text{tot}} = \frac{1}{2} k(x - a)^2 + \frac{1}{2} k(x + a)^2 = \frac{1}{2} (2k)(x^2 + a^2) \neq \text{const.}$$

Equilibrage statique (S^*)

Potentiels : Elastique uniquement

Levier à ressorts



Energie potentielle du système :

$$V_{\text{tot}} = \frac{1}{2} k_1 \Delta_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \Delta_2^2$$

Loi des cosinus :

$$\Delta_1^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos \varphi$$

$$\Delta_2^2 = r^2 + r^2 + 2r^2 \cos \varphi$$

L'énergie potentielle du système peut se réécrire :

$$V_{\text{tot}} = \left(k_1 + k_2 - c_\varphi (k_1 - k_2) \right) r^2$$

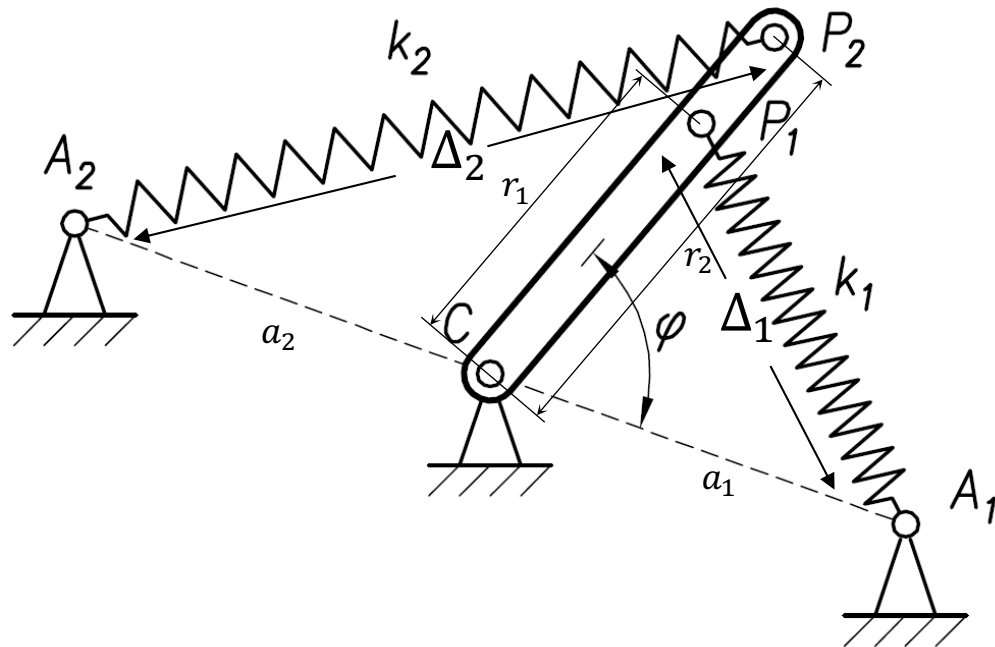
Conditions d'équilibrage :

- $k_1 = k_2$
- Les ressorts ont une longueur libre nulle

Equilibrage statique (S^*)

Potentiels : Elastique uniquement

Levier à ressorts généralisé



Energie potentielle du système :

$$V_{\text{tot}} = \frac{1}{2}k_1\Delta_1^2 + \frac{1}{2}k_2\Delta_2^2$$

Loi des cosinus :

$$\Delta_1^2 = a_1^2 + r_1^2 - 2a_1r_1 \cos \varphi$$

$$\Delta_2^2 = a_2^2 + r_2^2 + 2a_2r_2 \cos \varphi$$

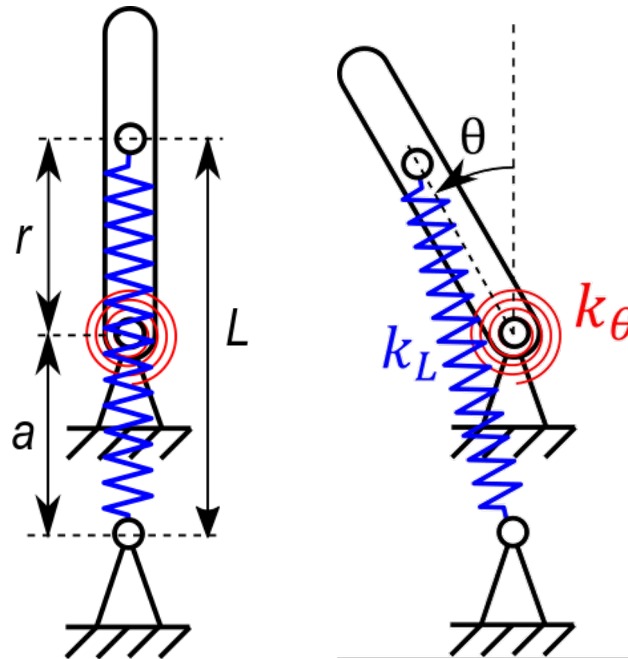
L'énergie potentielle du système peut se réécrire :

$$V_{\text{tot}} = \frac{1}{2}k_1(a_1^2 + r_1^2) + \frac{1}{2}k_2(a_2^2 + r_2^2) - c_\varphi(k_1a_1r_1 - k_2a_2r_2)$$

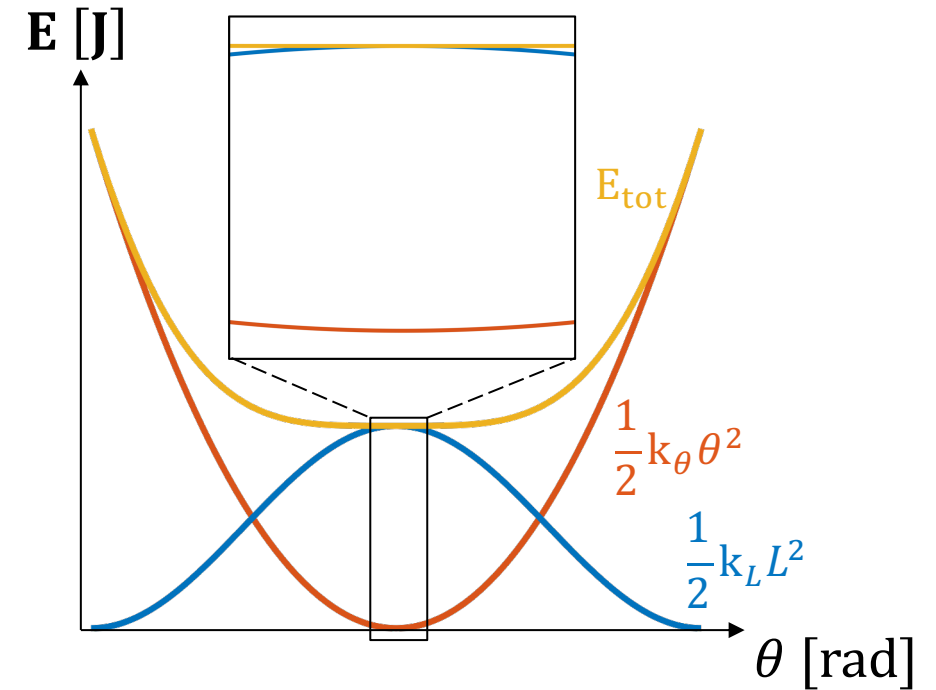
Conditions d'équilibrage :

- $k_1a_1r_1 = k_2a_2r_2$
- Les ressorts ont une longueur libre nulle

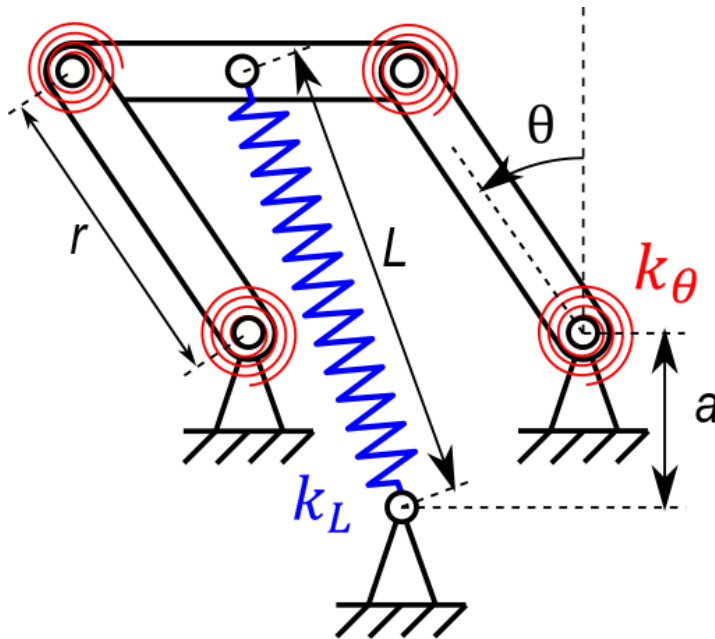
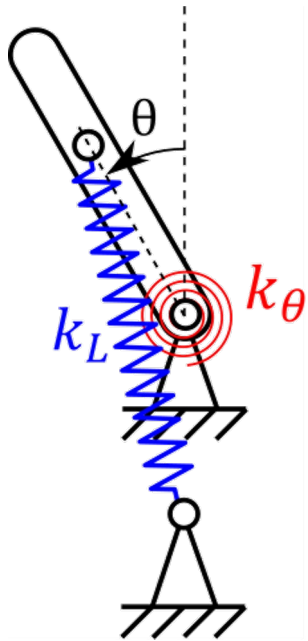
Equilibrage statique: exemple du levier préchargé



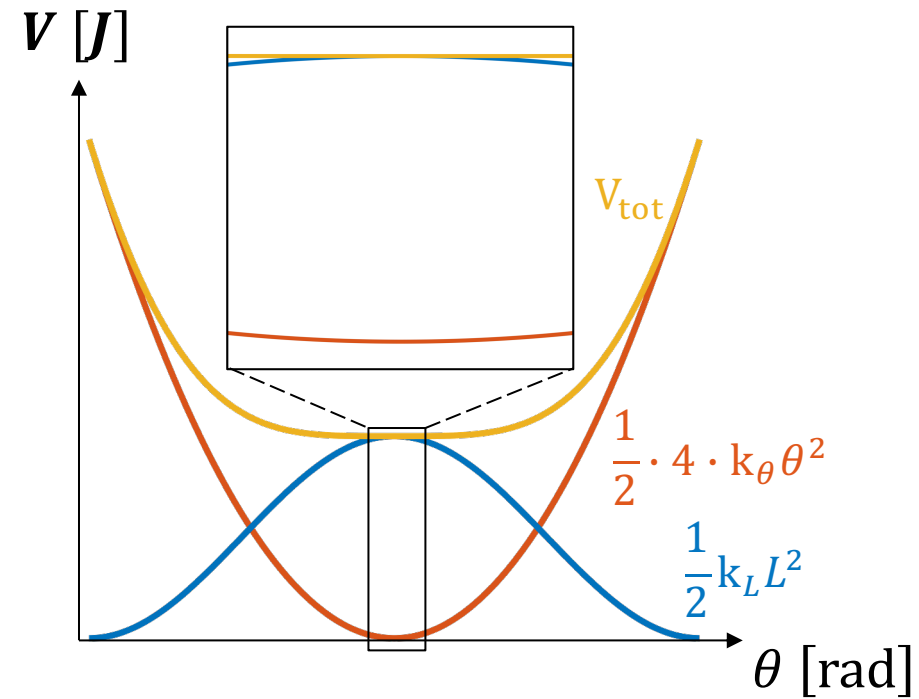
=



Equilibrage statique: exemple du levier préchargé



=

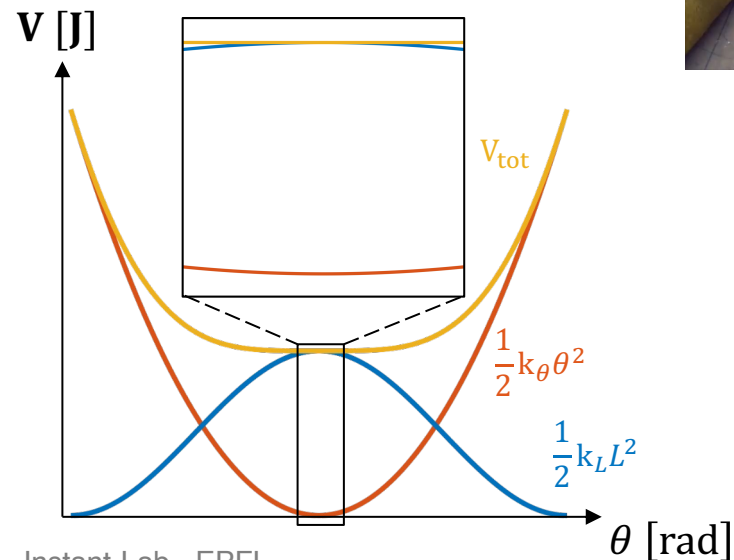


Equilibrage statique: exemple du levier préchargé

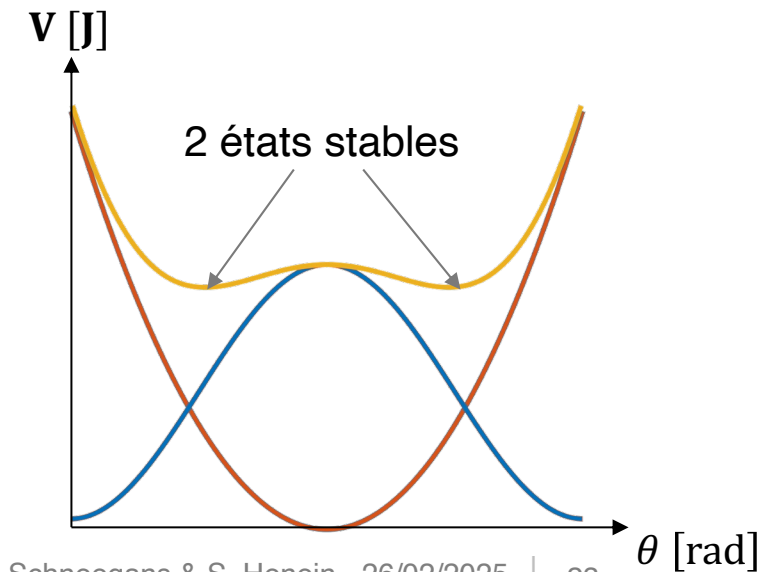
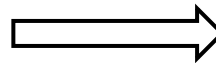
Si on réduit la rigidité totale du mécanisme au-delà de la rigidité nulle, celle-ci devient alors négative et on obtient un comportement appelé **bistable** :



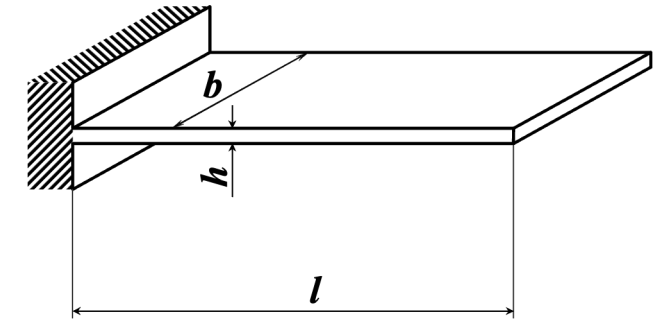
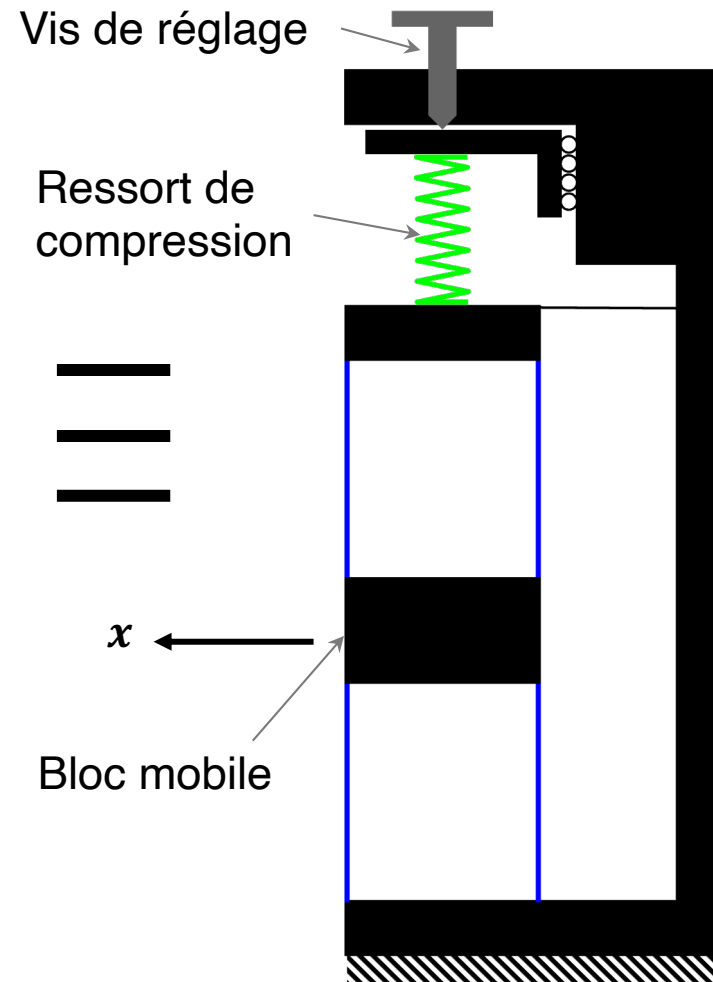
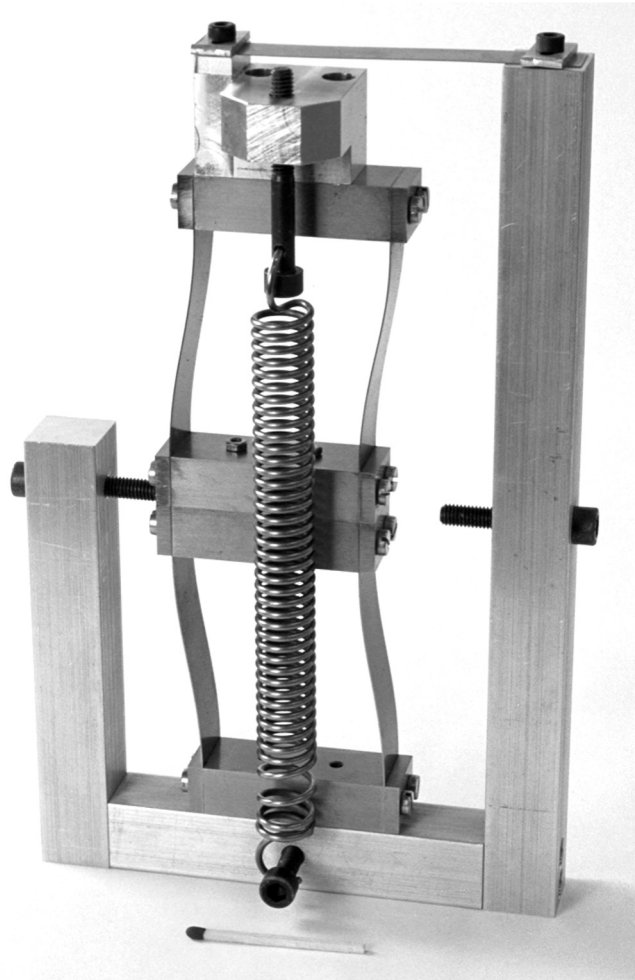
YouTube. (2018, July 12), Bistable Mechanism - Marble Machine X #44, retrieve from <https://www.youtube.com/watch?v=3v5xfWkp9Ys>



Augmentation de k_L



Equilibrage statique: exemple de la table préchargée



K_r : Rigidité du ressort de compression
 $K_{guidage}$: Rigidité du guidage flexible

Avec

$$K_{guidage} = \frac{48EI}{l^3}$$
$$I = \frac{bh^3}{12}$$

Valeurs numériques utilisées pour générer les différents graphiques :

$$l = 60 \text{ mm}$$

$$h = 0,4 \text{ mm}$$

$$b = 15 \text{ mm}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$K_r = 10\,000 \text{ N/m}$$

Equilibrage statique: exemple de la table préchargée

Energie potentielle élastique du mécanisme

Energie dans le ressort de précharge :

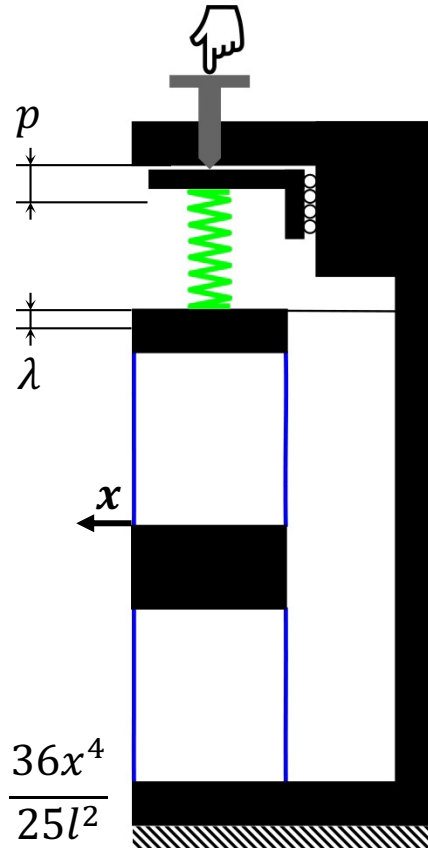
$$V_r = \frac{1}{2} K_r (p - \lambda)^2$$

Energie dans le guidage :

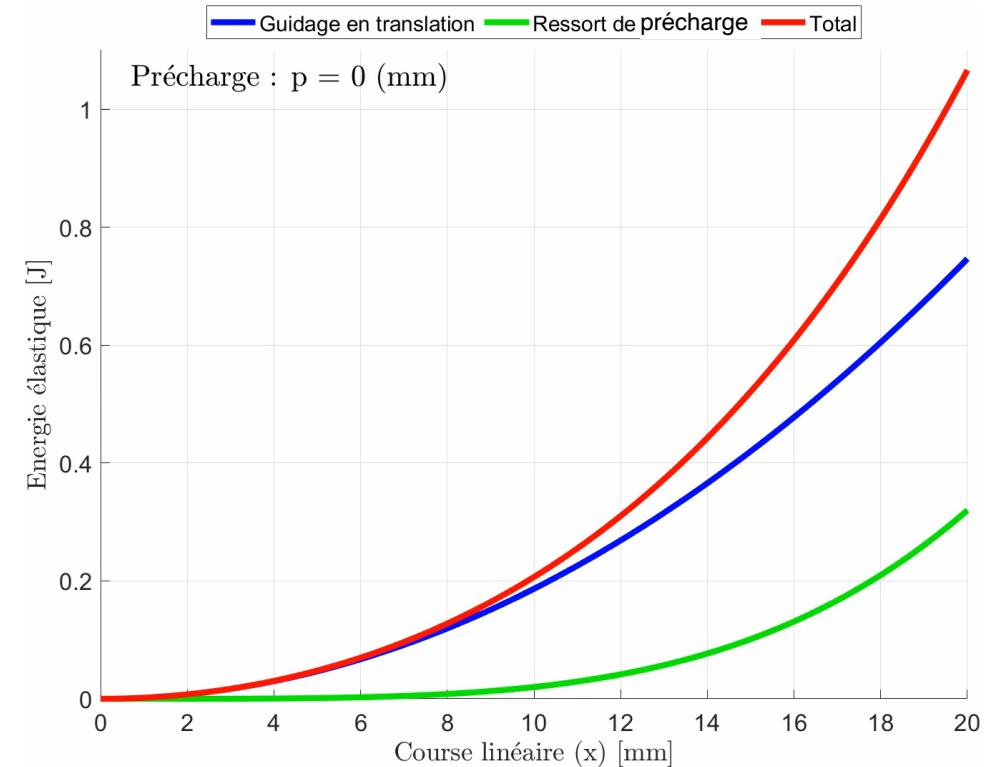
$$V_{\text{guidage}} = \frac{1}{2} K_{\text{guidage}} x^2$$

Avec $K_{\text{guidage}} = \frac{48EI}{l^3}$ et $\lambda = \frac{6x^2}{5l}$ on obtient :

$$\begin{aligned} V_{\text{tot}} &= V_r + V_{\text{guidage}} \\ &= \frac{1}{2} K_r p^2 + \frac{1}{2} \left(K_{\text{guidage}} - K_r \frac{12p}{5l} \right) x^2 + \frac{1}{2} K_r \frac{36x^4}{25l^2} \end{aligned}$$



Energie potentielle élastique



Equilibrage statique: exemple de la table préchargée

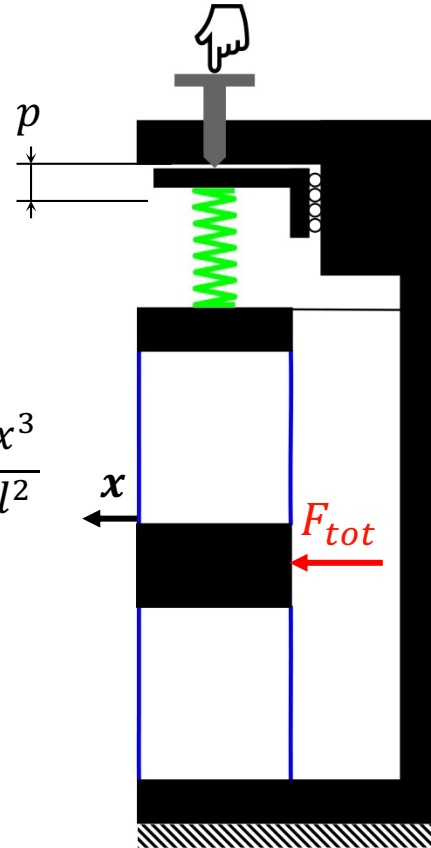
Caractéristique force-déformation du mécanisme

Par définition on a:

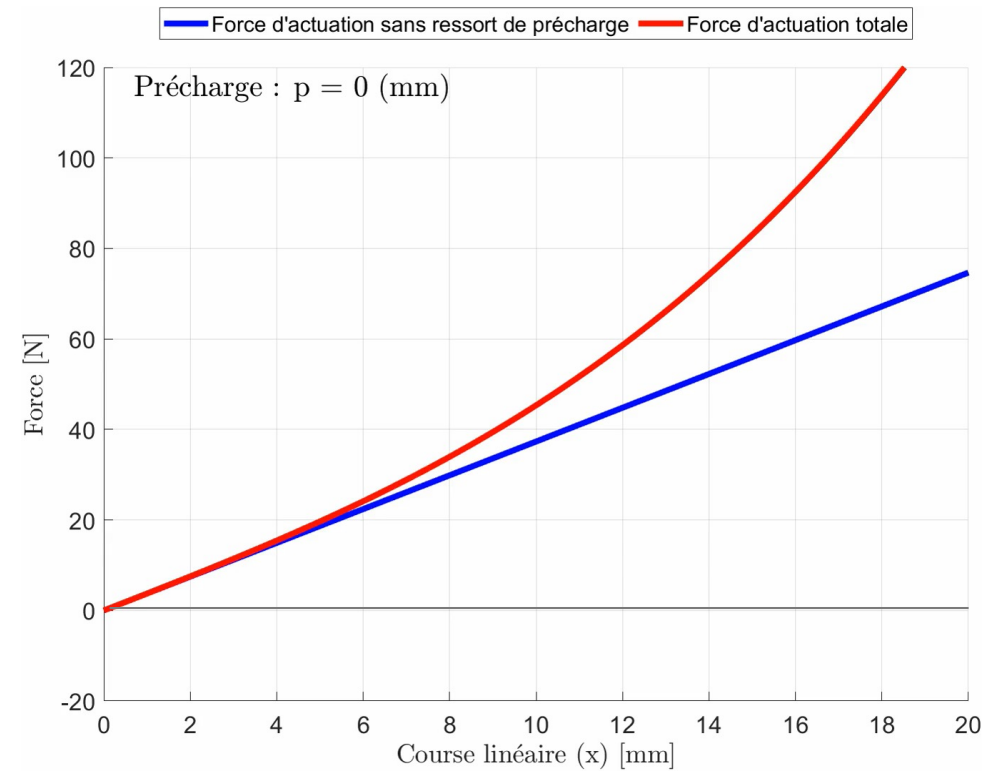
$$F_{tot} = \frac{\partial V_{tot}}{\partial x}$$

Pour ce mécanisme on obtient:

$$F_{tot} = \left(K_{guidage} - K_r \frac{12p}{5l} \right) x + 2K_r \frac{36x^3}{25l^2}$$



Caractéristique force-déformation



Equilibrage statique: exemple de la table préchargée

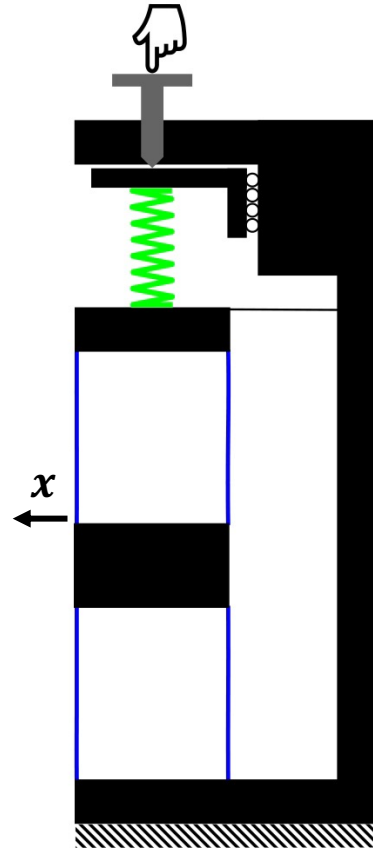
Rigidité du mécanisme

Par définition on a:

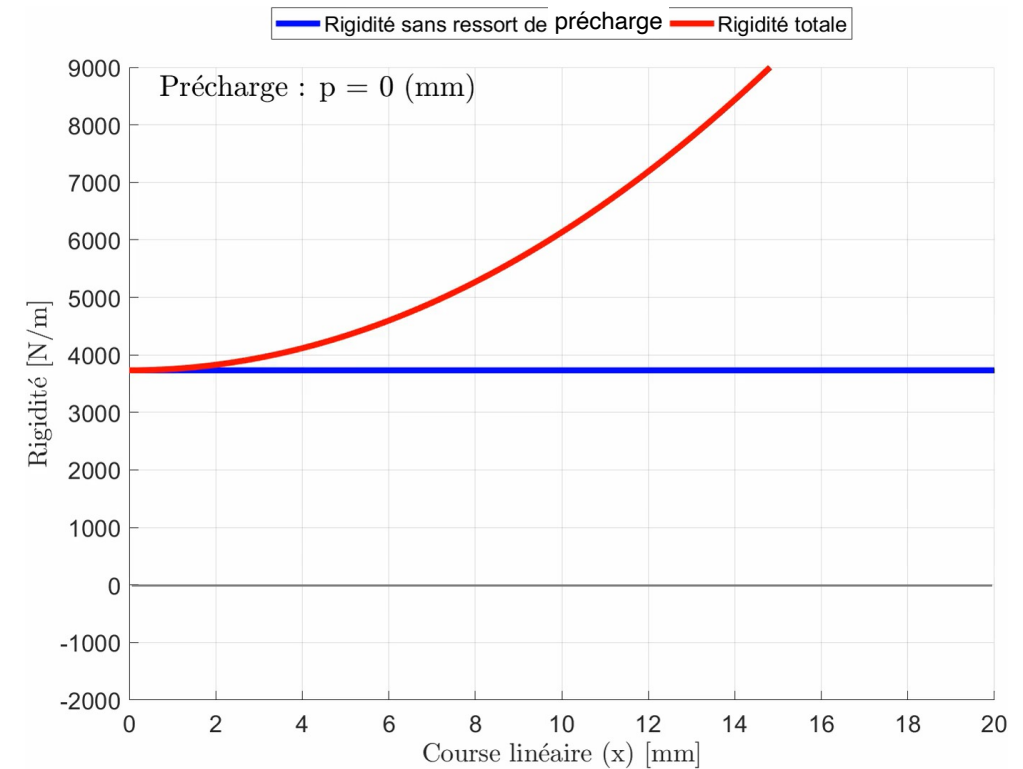
$$K_{tot} = \frac{\partial F_{tot}}{\partial x}$$

On a donc :

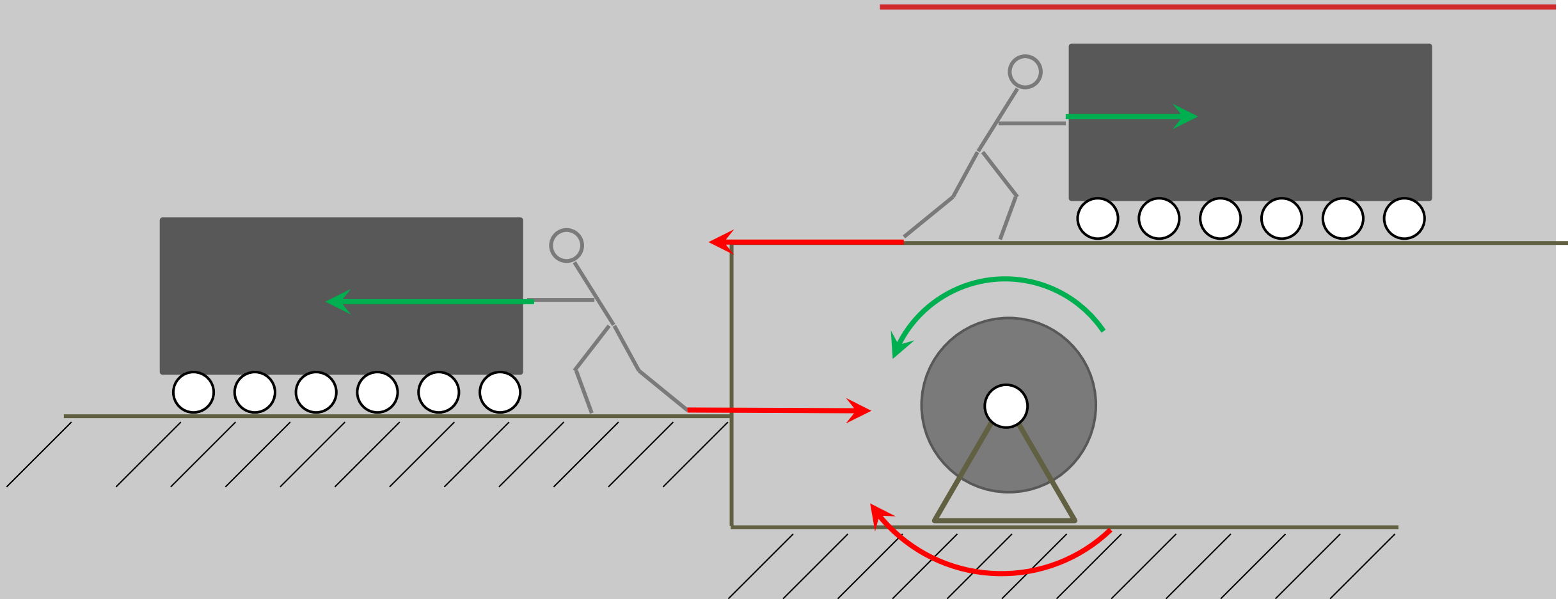
$$K_{tot} = \left(K_{guidage} - K_r \frac{12p}{5l} \right) + 6K_r \frac{36x^2}{25l^2}$$



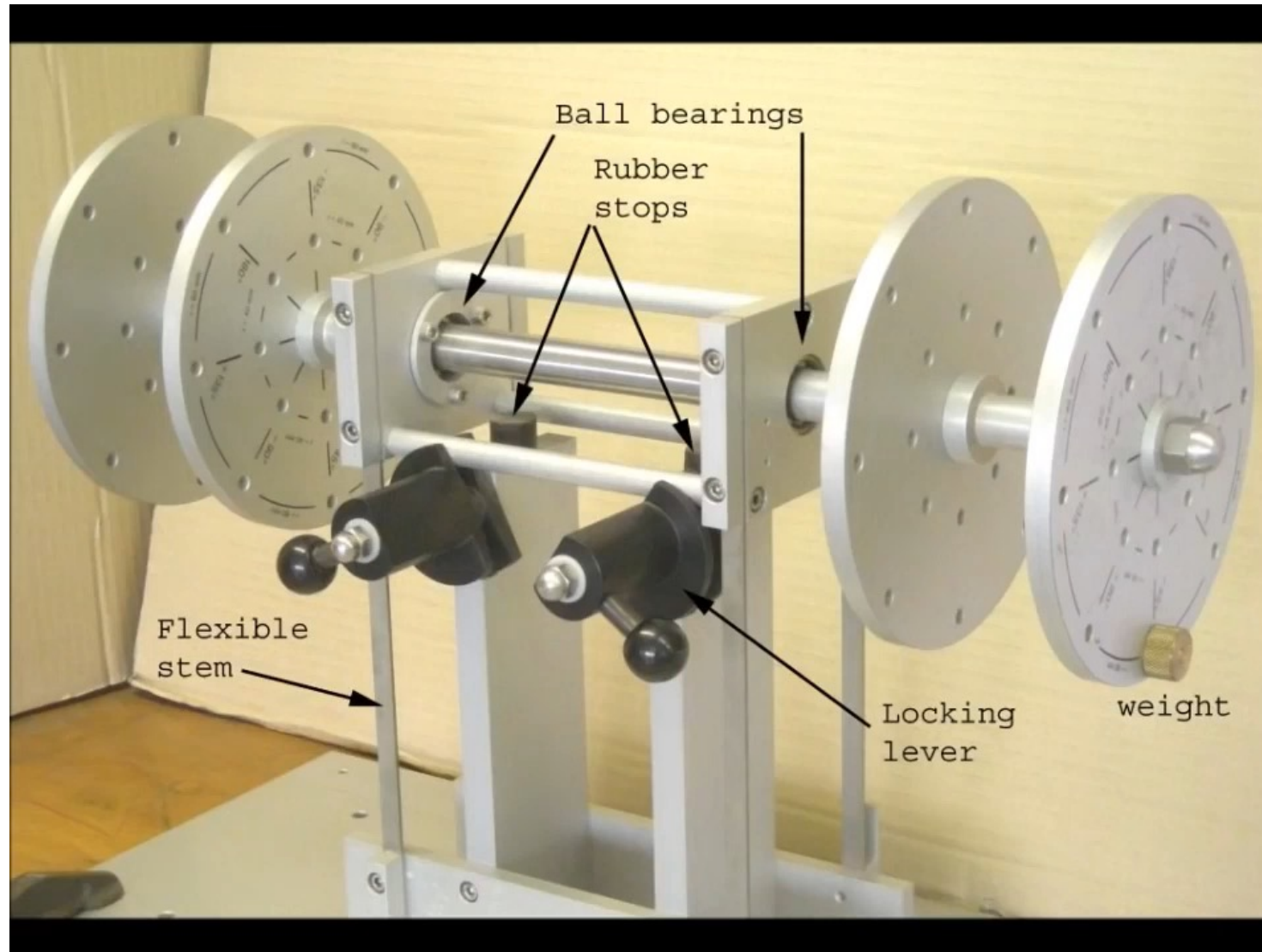
Rigidité



Rappels sur les forces et moments exportés



Rappel : Forces et moments exportés



YouTube. (2012, August 1), Unbalanced rotor behaviour, retrieved from <https://www.youtube.com/watch?v=R2hO--TlijA>

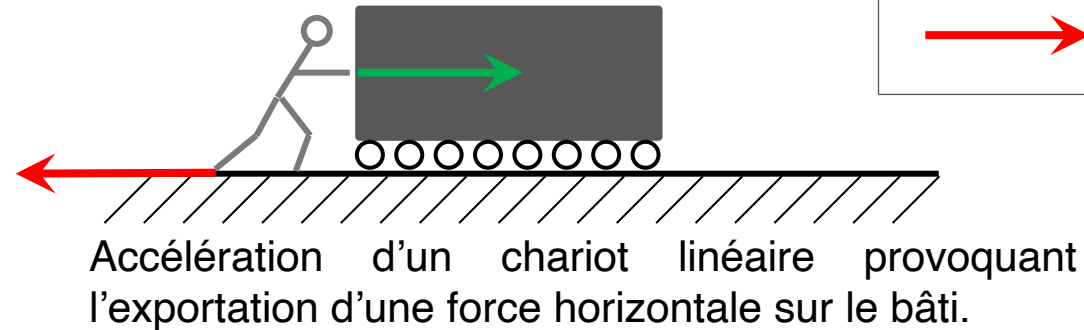
Rappel : Forces et moments exportés



YouTube. (2015, June 21), Motocross How To: Mid Air Adjustments, retrieved from <https://www.youtube.com/watch?v=cv345HMqwFI>

Rappel : Forces et moments exportés

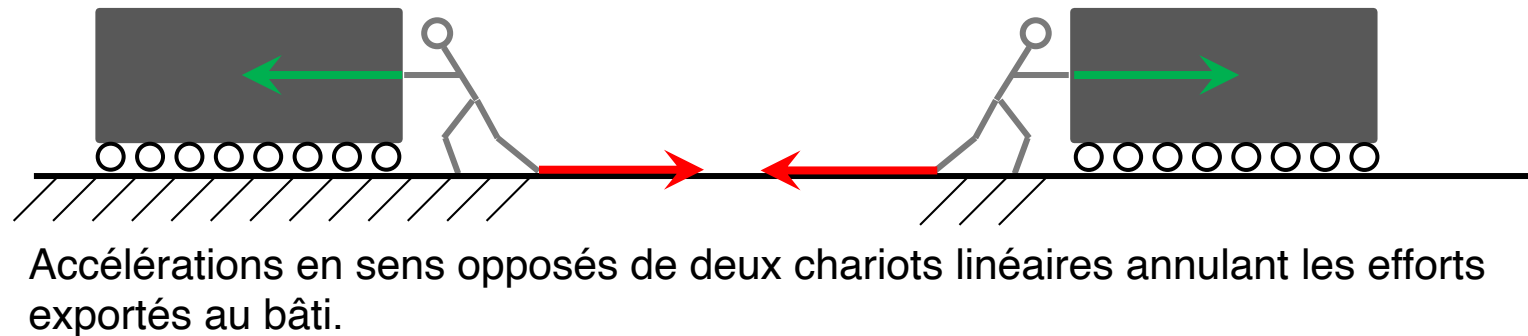
— Exportation de forces



→ Forces exercées sur la masse afin de l'accélérer.

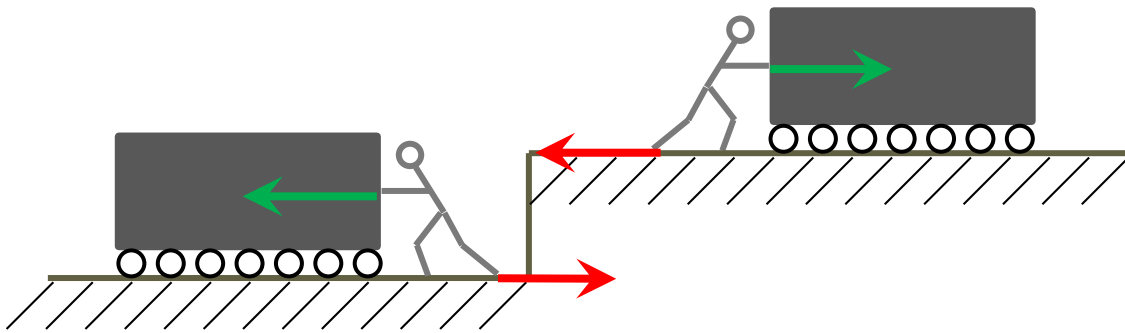
→ Forces exportées sur le bâti

— Annulation des forces exportées

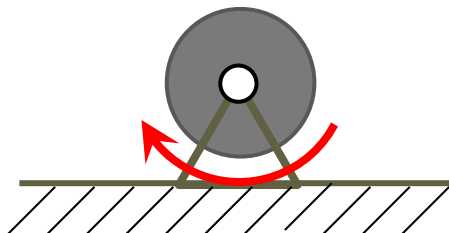


Rappel : Forces et moments exportés

Exportation de moment

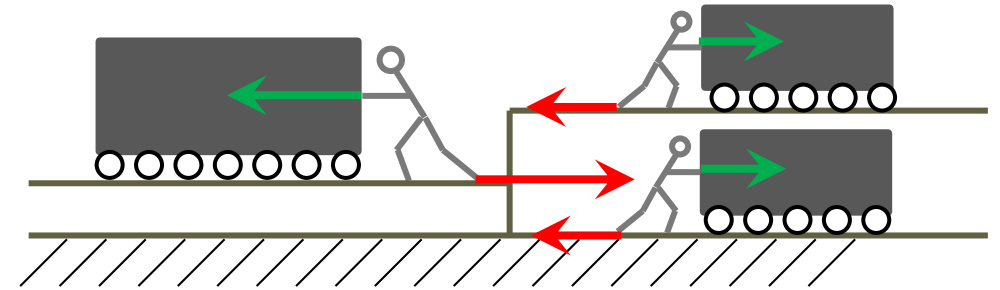


Accélérations en sens opposés de deux chariots linéaires annulant les efforts exportés au bâti mais générant un **moment de force**.

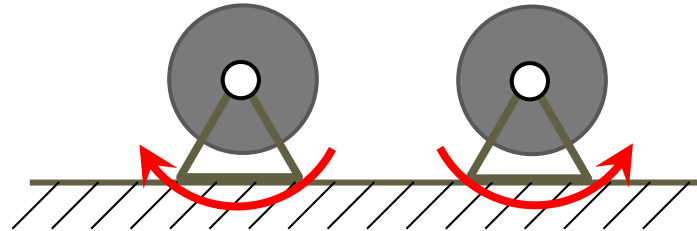


Accélération angulaire d'une roue d'inertie n'exportant pas de forces au bâti mais générant un **moment de force**.

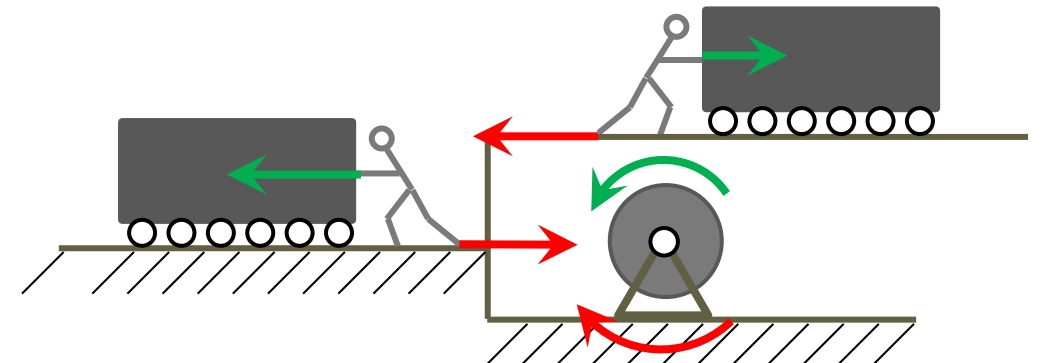
Annulation des moments exportés



Annulation d'un moment de force par un moment de force.

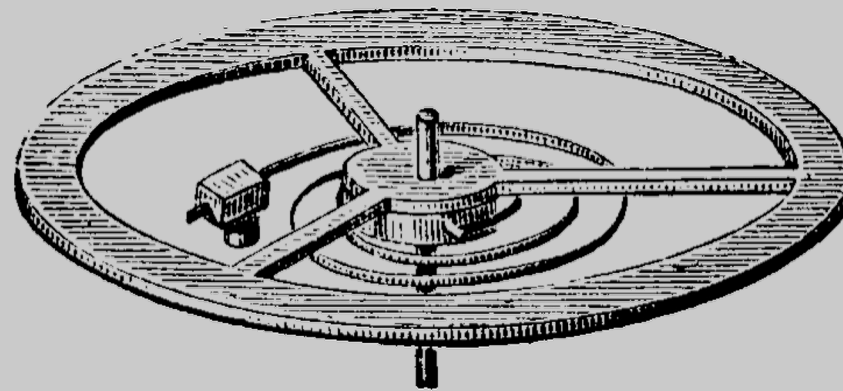
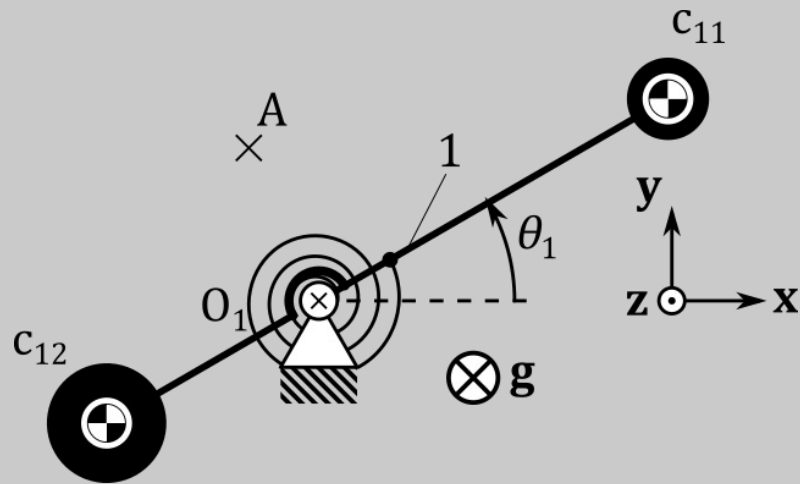


Annulation d'un moment pur par un moment pur.

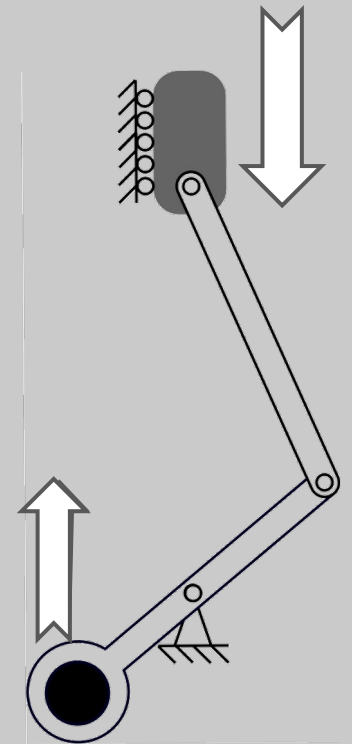


Annulation d'un moment de force par un moment pur.

Equilibrage en force (\mathbf{F}^*)



Un balancier spiral

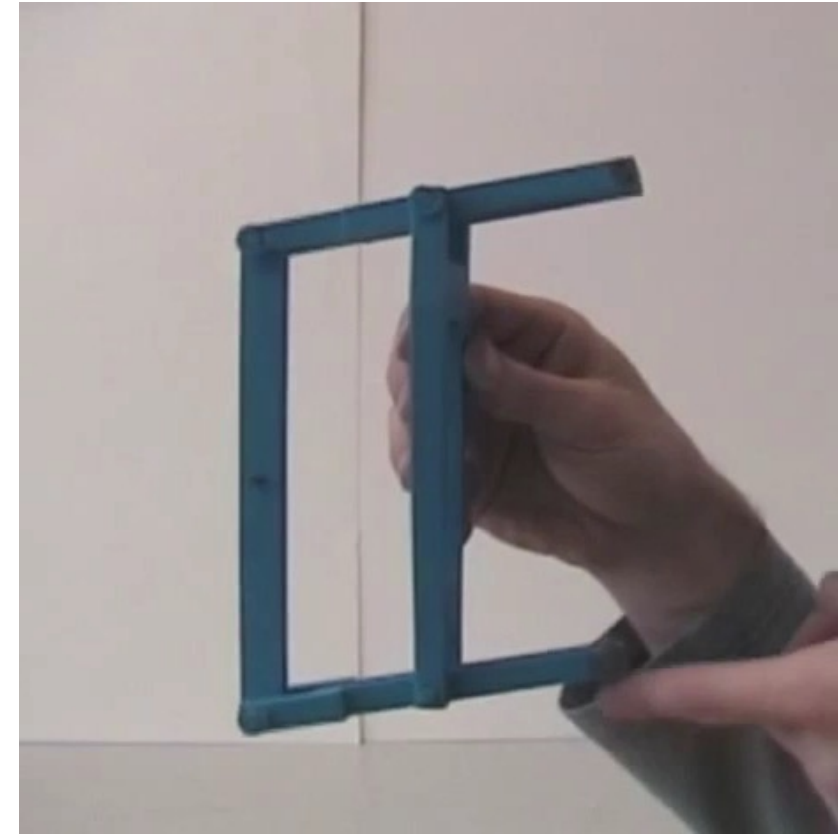


Un assemblage piston-bielle-maneton

Equilibrage en force (F^*)



YouTube. (2018, November 12), Static balancing demonstration of a family of 5-DOF parallel mechanisms, retrieve from https://www.youtube.com/watch?v=fjMf8rAbgxE&list=RDQMFpVp4vtfd7A&start_radio=1.



YouTube. (2015, June 4), Dynamic and static balancing, retrieved from https://www.youtube.com/watch?v=f7_7jJSz8Kg.

Equilibrage en force (F^*)

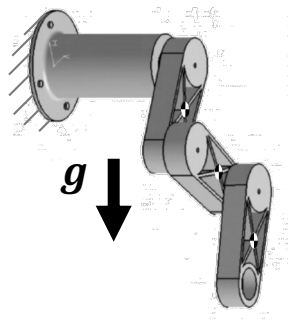
- La nécessité d'avoir des mécanismes équilibrés en force remonte au début de l'ère industrielle avec l'émergence des premières machines à vapeur et des engins à combustion à hautes vitesses.
 - Les conséquences d'un déséquilibre dans un mécanisme ayant de hautes dynamiques sont:
 - La création de vibrations transmises au bâti.
 - La création de bruit.
 - Une usure prématurée des articulations.
 - Un contrôle dynamique péjoré.
- } Perte d'énergie
- Les premiers exemples de structures spécifiquement étudiées sont les machines agricoles et les moteurs à piston. Cependant, le problème existait déjà sans avoir été clairement formulé au début du XVI^e siècle avec l'apparition des premières montres de poche.

Equilibrage en force (F^*)

Définition : Un mécanisme est équilibré en force quand sa **quantité de mouvement reste nulle** dans tout son espace de travail.

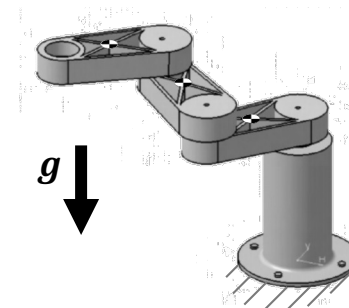
Si un mécanisme est équilibré en force de manière *passive* alors :

- Son centre de masse à une vitesse nulle.
 - Son énergie potentielle de pesanteur est constante dans tout son espace de travail.
 - Il n'exporte pas de forces vers son bâti.
 - Il est insensible aux accélérations linéaires externes (par exemple si son bâti est dans un référentiel non-inertiel accéléré en translation).
- Remarque : Un mécanisme peut être équilibré statiquement ET/OU équilibré en force.



Bras robot :

- Non-équilibré statiquement
- Non-équilibré en force



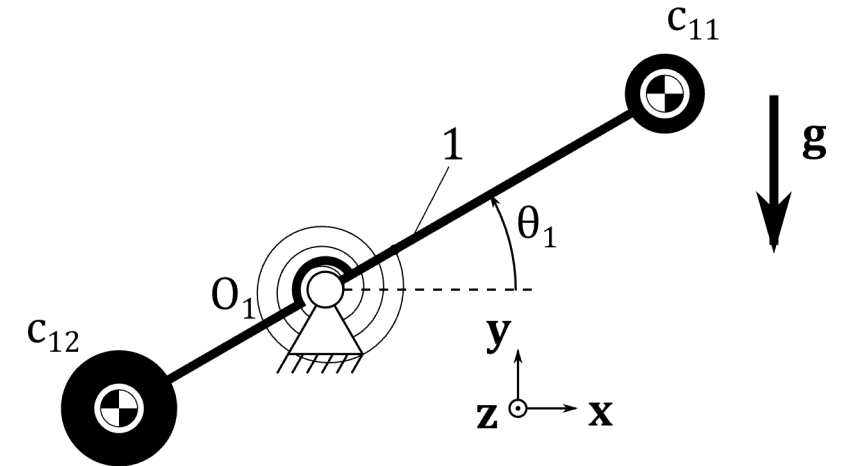
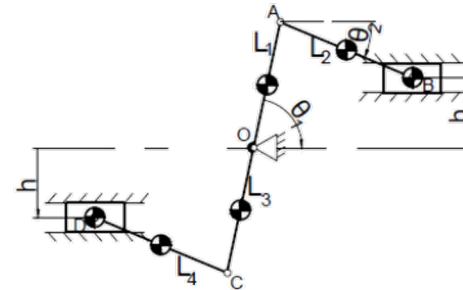
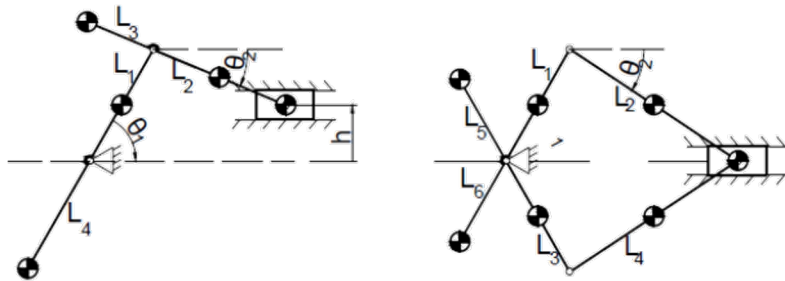
Bras robot :

- Équilibré statiquement
- Non-équilibré en force

Equilibrage en force (F^*)

Equilibrage en force *passif*

- Redistribution de la masse du mécanisme pour que son centre de masse soit fixe dans l'espace.
- Rajout de mécanismes ou de liaisons (symétrisation du mécanisme)
- Aucun actionneur supplémentaire requis pour l'équilibrage



Weeke, SL, Tolou, N, Semon, G, & Herder, JL. "A Fully Compliant Force Balanced Oscillator." *Proceedings of the ASME 2016 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Volume 5A: 40th Mechanisms and Robotics Conference*. Charlotte, North Carolina, USA. August 21–24, 2016. V05AT07A008. ASME. <https://doi.org/10.1115/DETC2016-59247>

Équilibrage en force (F^*)

Pour équilibrer en force un mécanisme, il faut que sa quantité de mouvement en translation soit nulle. La quantité de mouvement en translation d'un mécanisme composé de n solides S_i (i allant de 1 à n) s'écrit :

$$m_{\text{tot}} \dot{\mathbf{c}}_{\text{tot}/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{c}}_{i,S_i/\mathcal{R}} = \mathbf{0}.$$

Une fois la vitesse considérée comme nulle, cela ramène la notion d'équilibrage en force à la notion d'équilibrage statique «poids-contrepoids» :

$$m_{\text{tot}} \mathbf{c}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{c}_i = \mathbf{0}.$$

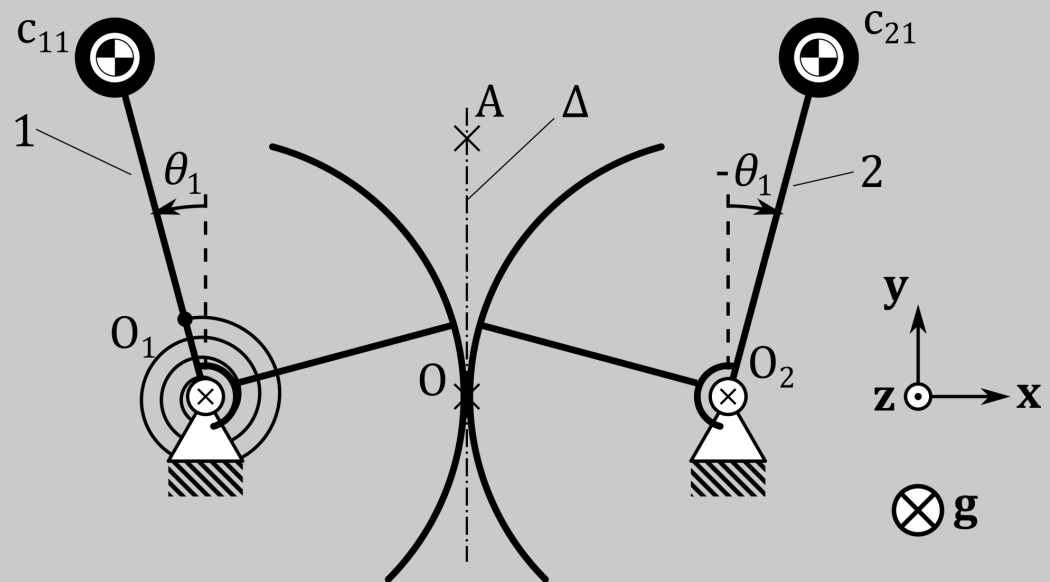
Les efforts dynamiques qui s'exerceront sur le bâti découlent de la dérivée de la quantité de mouvement en translation et s'écrivent :

$$\mathbf{F}_{\text{dyn}} = m_{\text{tot}} \frac{d\dot{\mathbf{c}}_{\text{tot}/\mathcal{R}}}{dt} = m_{\text{tot}} \ddot{\mathbf{c}}_{\text{tot}/\mathcal{R}}$$

Avec

- m_{tot} la masse totale du mécanisme.
- \mathbf{c}_{tot} , $\dot{\mathbf{c}}_{\text{tot}/\mathcal{R}}$ et $\ddot{\mathbf{c}}_{\text{tot}/\mathcal{R}}$ les vecteurs position, vitesse et accélération du centre de masse total du mécanisme.
- m_i la masse du i -ème solide du mécanisme.
- \mathbf{c}_i et $\dot{\mathbf{c}}_{i,S_i/\mathcal{R}}$ les vecteurs position et vitesse du centre de masse du i -ème solide du mécanisme.
- \mathcal{R} un repère de l'espace.

Equilibrage en moment (\mathbf{M}^*)



Equilibrage en moment (M^*)

Définition : Un mécanisme est équilibré en moment au point A quand son **moment cinétique en A reste nul** dans tout son espace de travail.

Si un mécanisme est équilibré en moment au point A de manière *passive* alors:

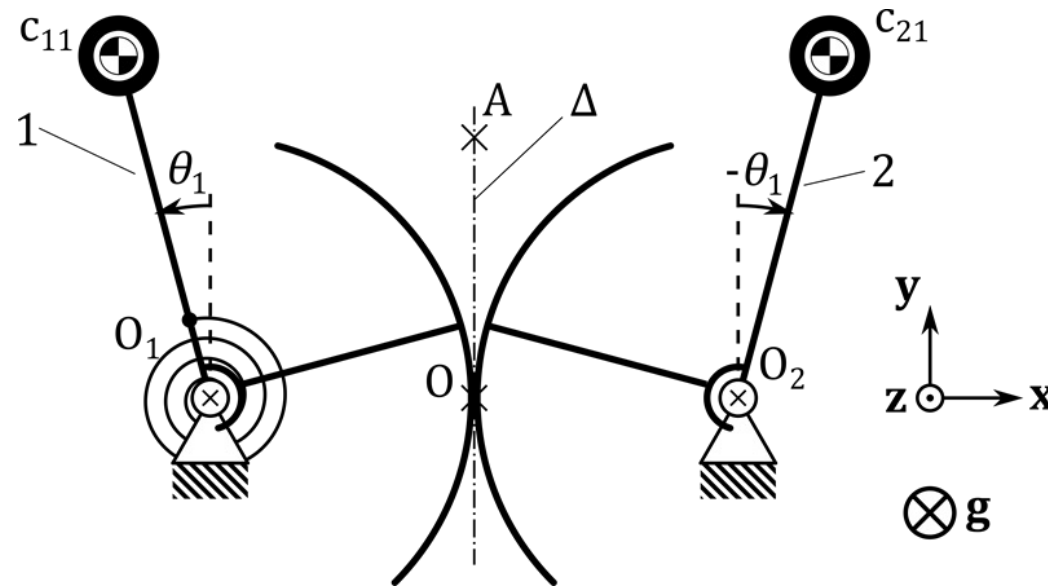
- Il n'exporte pas de couple vers son bâti en A.
- Le mécanisme est sensible aux accélérations linéaires et angulaires externes, sauf les accélérations angulaires autour de A, mais reste sensible aux vitesses angulaires externes.

Remarque: Un mécanisme peut être équilibré statiquement ET/OU en moment.

Equilibrage en moment (M^*)

Equilibrage en moment passif

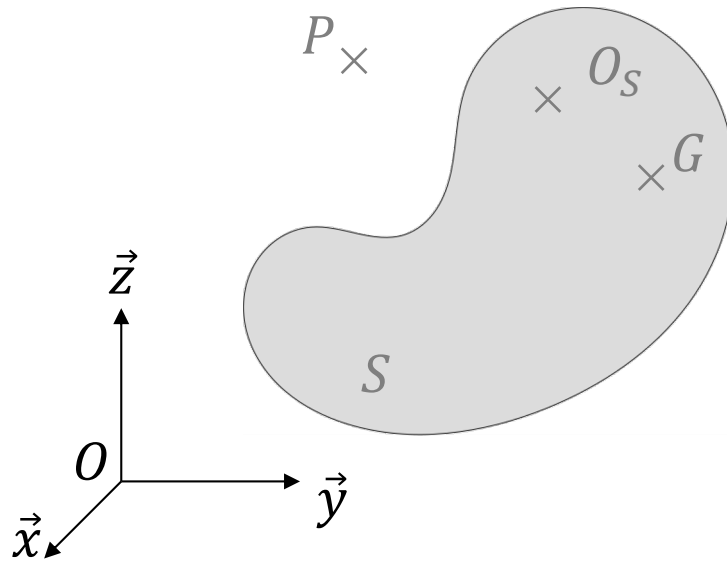
- Redistribution de la masse du mécanisme pour que son moment cinétique soit nul en un point ou groupe de points spécifique.
- Rajout de mécanismes ou de liaisons / symétrisation du mécanisme.



Equilibrage en moment (M^*)

La relation générale du moment cinétique pour un solide S s'écrit :

$$\sigma_{A,S/\mathcal{R}} = m\mathbf{c}_{AG} \times \dot{\mathbf{c}}_{O_S,S/\mathcal{R}} + m\mathbf{c}_{AO_S} \times (\boldsymbol{\omega}_{S/\mathcal{R}} \times \mathbf{c}_{O_S G}) + \mathbf{J}_{O_S}(S)\boldsymbol{\omega}_{S/\mathcal{R}}$$



$m, G, \mathbf{J}_{O_S}(S)_B$: caractéristiques d'inertie,
 O_S : point du solide S ,
 G : centre de masse du solide S ,
 A : point quelconque (fixe ou mobile dans l'espace),
 B, \mathcal{R} : base et repère de l'espace.

Cas particuliers :

- Si $O_S = G$ alors $\sigma_{A,S/\mathcal{R}} = m\mathbf{c}_{AG} \times \dot{\mathbf{c}}_{G,S/\mathcal{R}} + \mathbf{J}_G(S)\boldsymbol{\omega}_{S/\mathcal{R}}$
- Si $A = O_S$ alors $\sigma_{O_S,S/\mathcal{R}} = m\mathbf{c}_{O_S G} \times \dot{\mathbf{c}}_{O_S,S/\mathcal{R}} + \mathbf{J}_{O_S}(S)\boldsymbol{\omega}_{S/\mathcal{R}}$
- Si $A = O_S = G$ alors $\sigma_{A,S/\mathcal{R}} = \mathbf{J}_G(S)\boldsymbol{\omega}_{S/\mathcal{R}}$

Equilibrage en moment (M^*)

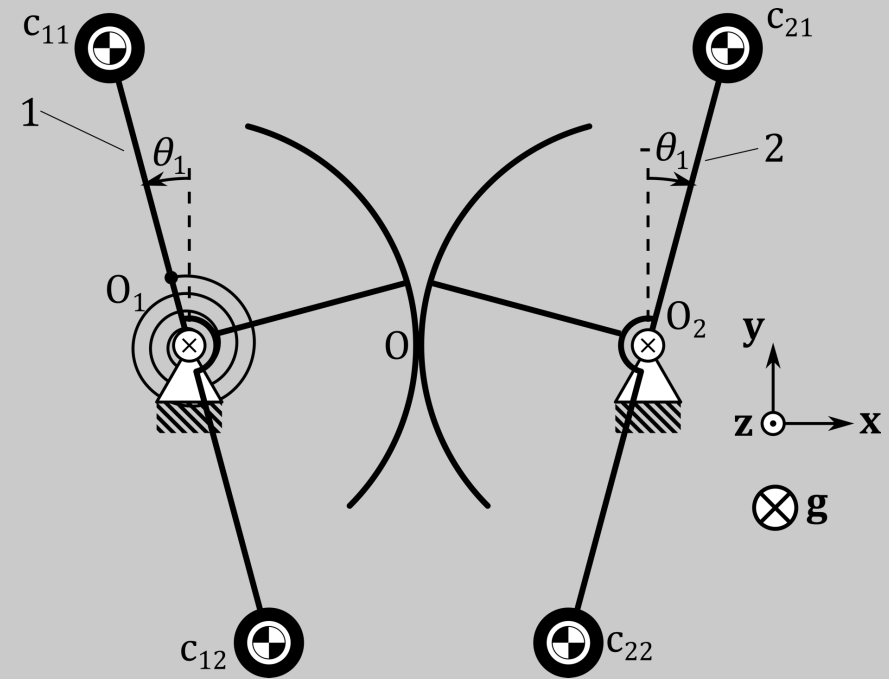
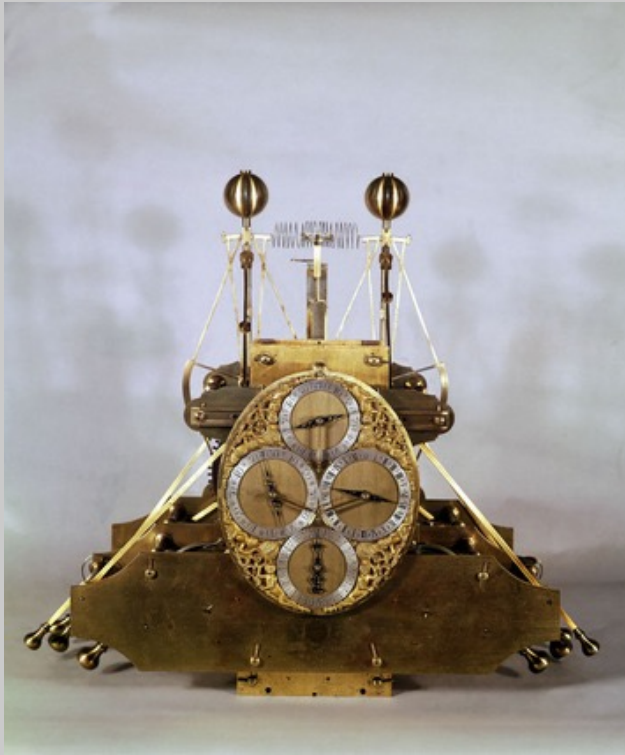
Le moment cinétique total d'un mécanisme équilibré en moment au point A est la somme de tous les moments cinétiques des n solides S_i ($i = 1$ à n) qui le compose évalué à cet unique point A :

$$\sigma_{A,\text{tot}/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^n \sigma_{A,S_i/\mathcal{R}} = \mathbf{0}.$$

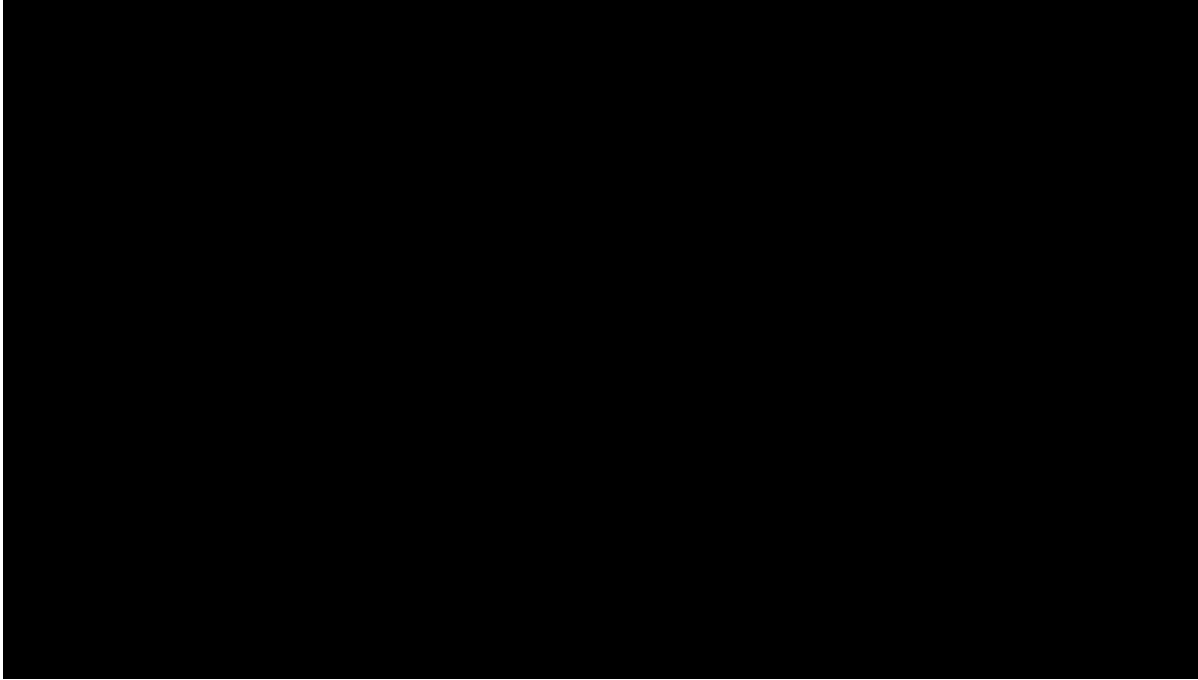
La relation du moment dynamique représentant les couples dynamiques transmis au bâti au point A s'écrit :

$$\delta_{A,\text{tot}/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \sigma_{A,S_i/\mathcal{R}} + m_i \dot{\mathbf{c}}_{A/\mathcal{R}} \times \dot{\mathbf{c}}_{G_i,S_i/\mathcal{R}} = \mathbf{0}.$$

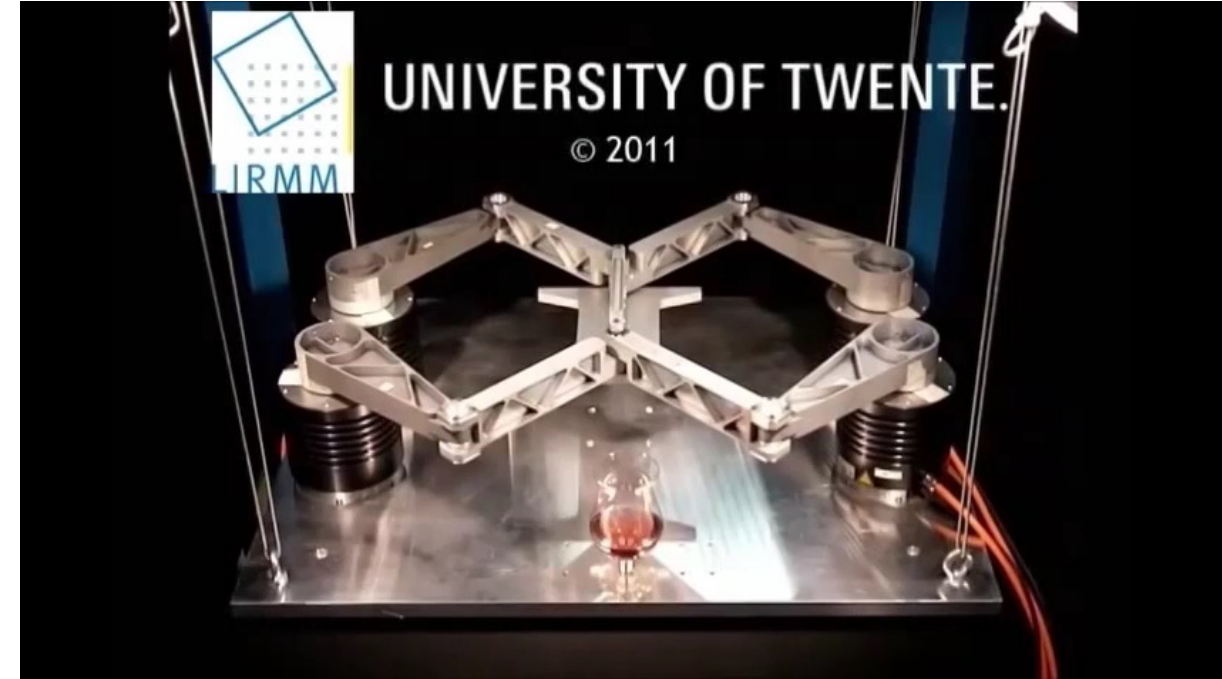
Equilibrage dynamique (FM*)



Equilibrage dynamique (FM*)



YouTube. (2015, July 30), Dynamic Balancing of a Two-degrees-of-freedom Parallel Mechanism Using a Counter-Mechanism, retrieve from <https://www.youtube.com/watch?v=AYrFFcbBm94>.



YouTube. (2013, August 9), DUAL V - A balanced robot invented by Lirrm and University of Twente, Retrieved from <https://www.youtube.com/watch?v=Ofg21LDNxdU>

Equilibrage dynamique (FM*)

Définition : Un mécanisme est équilibré dynamiquement quand sa **quantité de mouvement** et son **moment cinétique** **restent nuls** dans tout son espace de travail.

Si un mécanisme est équilibré dynamiquement de manière *passive* alors:

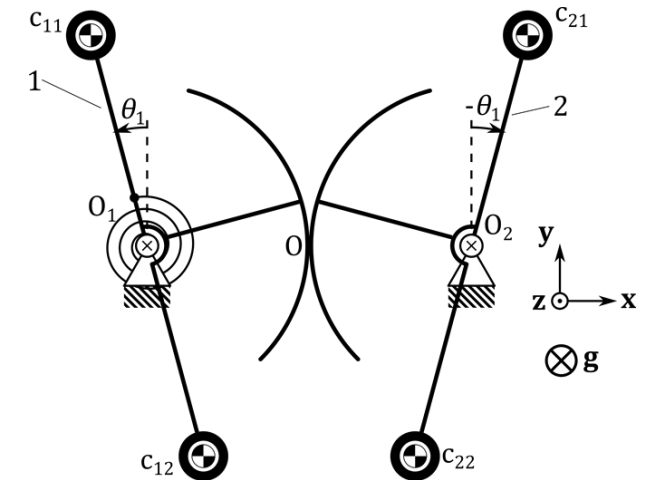
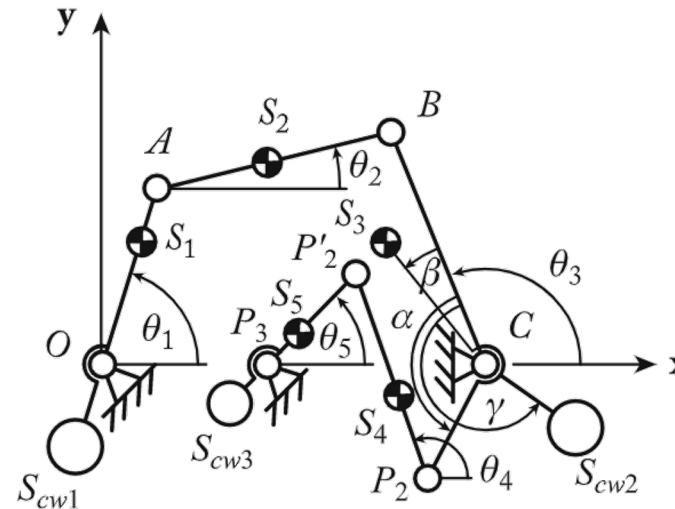
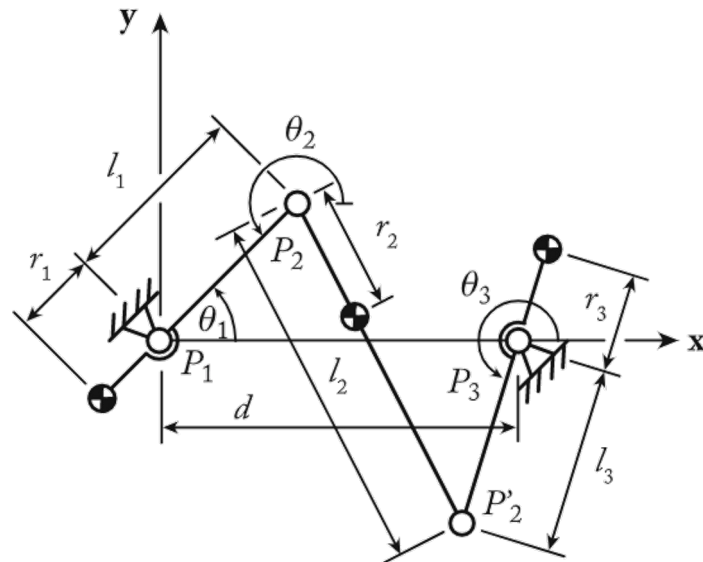
- Il n'exporte pas de forces ni de couples vers son bâti.
- Le mécanisme est insensible aux accélérations linéaires et angulaires externes, mais reste sensible aux vitesses angulaires externes.

Remarque: Un mécanisme peut être équilibré statiquement ET/OU dynamiquement.

Equilibrage dynamique (FM*)

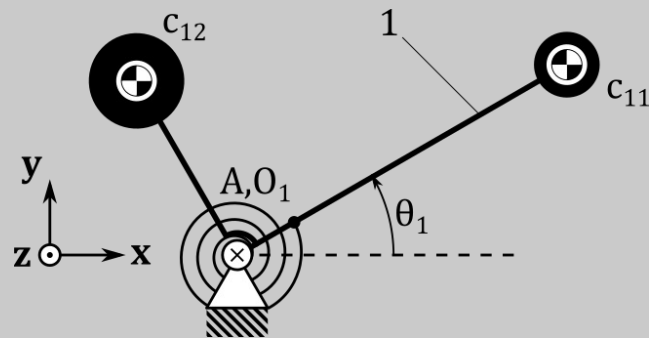
Equilibrage dynamique passif

- Redistribution de la masse du mécanisme pour que son centre de masse soit fixe dans l'espace et que son moment cinétique soit nul.
- Rajout de mécanismes ou de liaisons / symétrisation du mécanisme.

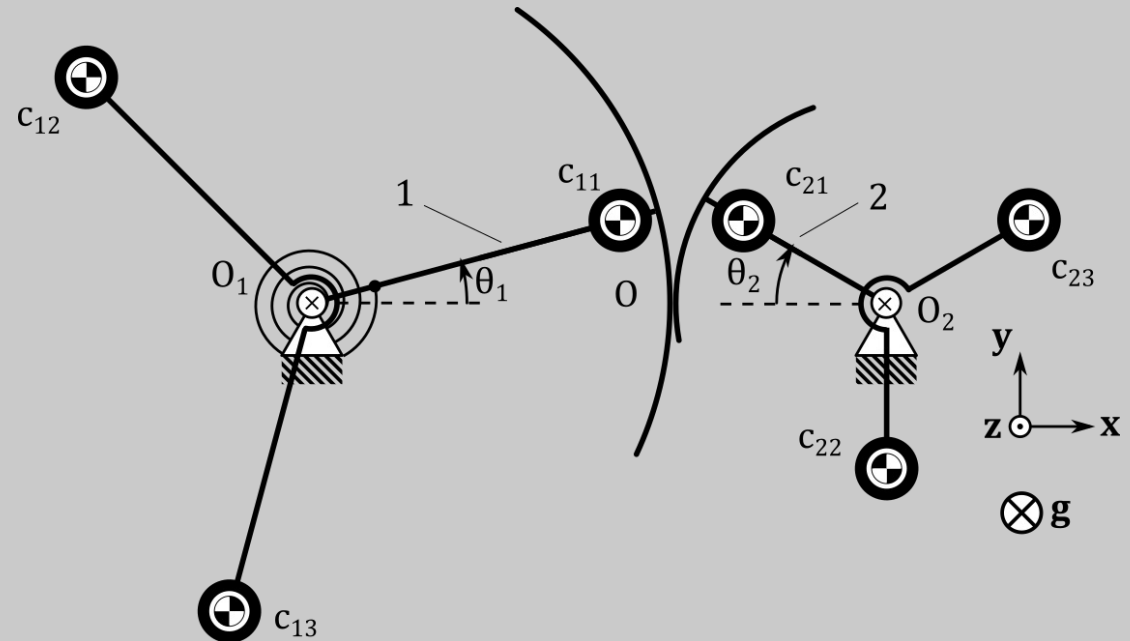


Briot S, Arakelian V. Complete shaking force and shaking moment balancing of in-line four-bar linkages by adding a class-two RRR or RRP Assur group. Mechanism and Machine Theory. 2012 Nov 1;57:13-26.
<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2012.06.004>.

Invariance inertielle (\mathbf{I}^*) & Equilibrage inertiel (\mathbf{FMI}^*)

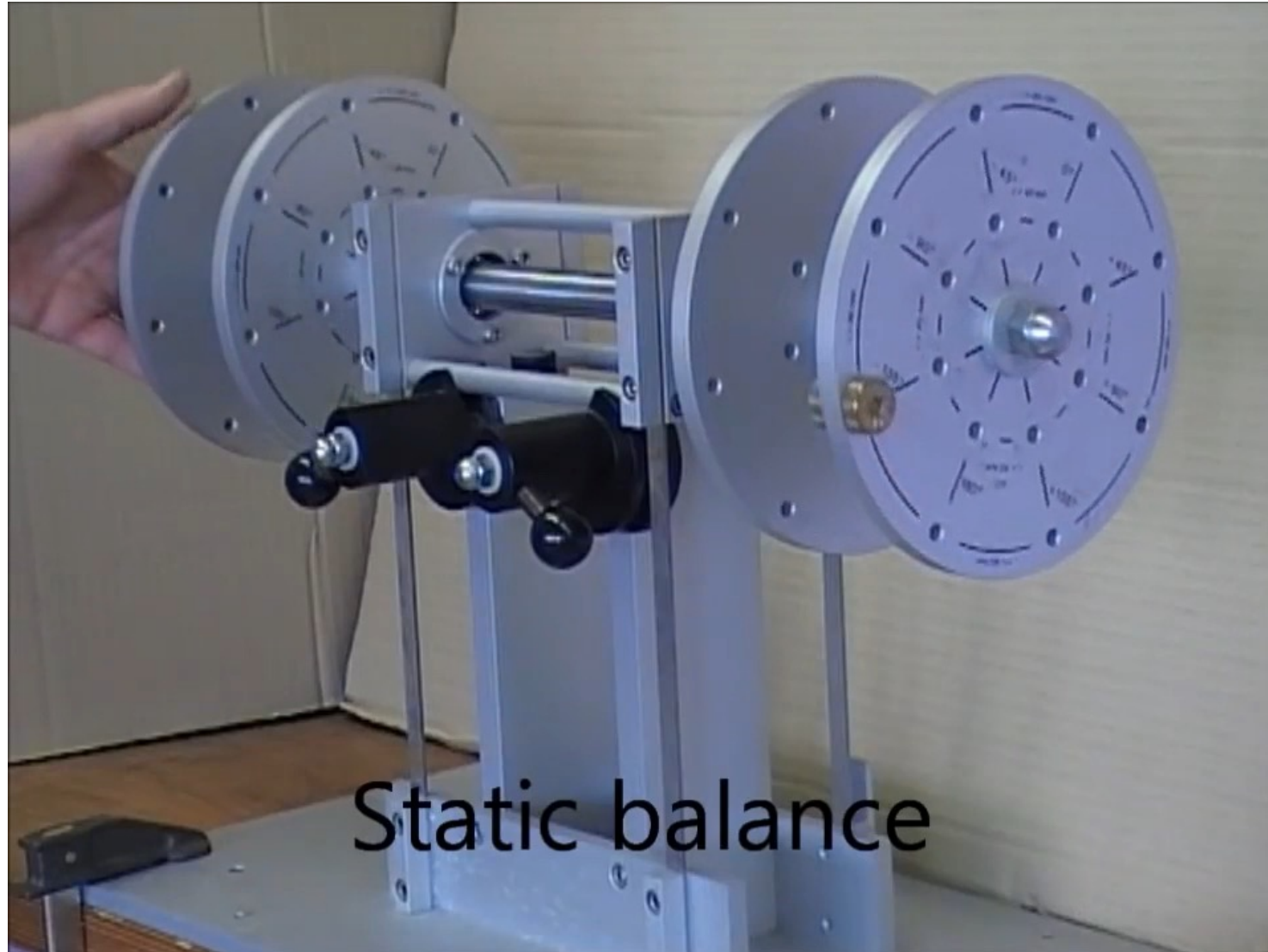


Mécanisme invariant inertiellement en A



Mécanisme équilibré inertiellement

Invariance inertielle (I^*)

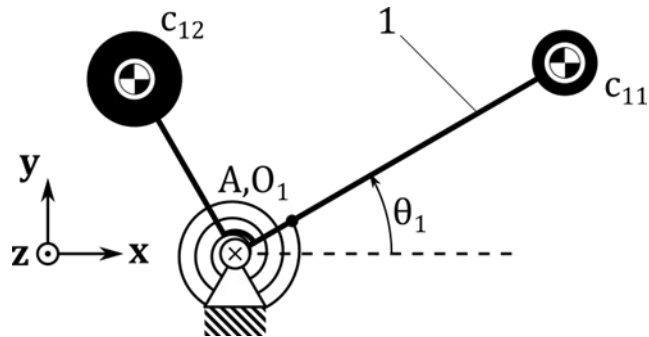


YouTube. (2012, August 1), Unbalanced rotor behaviour, retrieved from <https://www.youtube.com/watch?v=R2hO--TljjA>

Invariance inertielle (I^*)

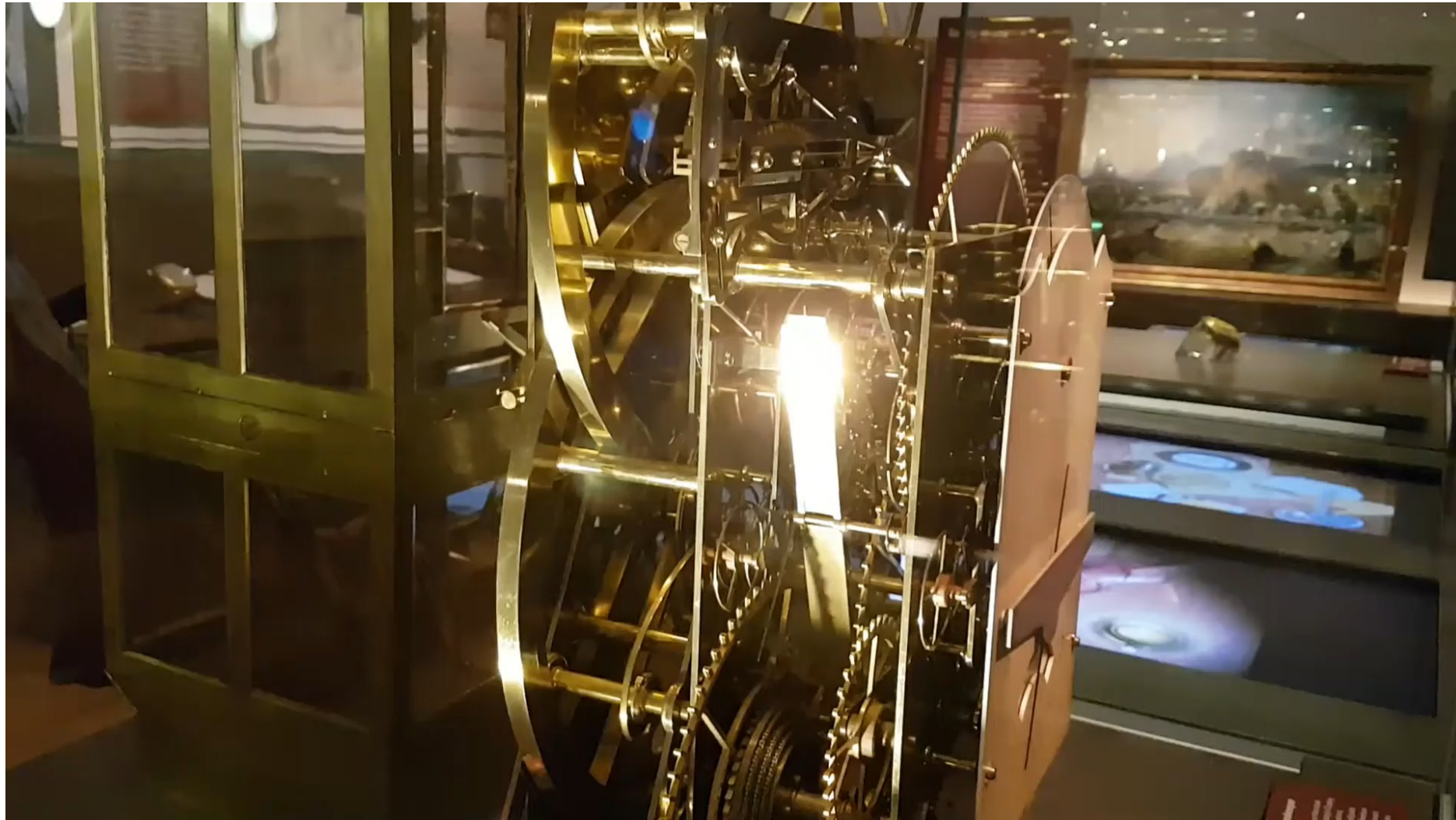
Définition : Un mécanisme est inertiellement invariant au point A quand son tenseur d'inertie au point A **reste constant** dans tout son espace de travail.

Remarque : Un mécanisme peut être équilibré statiquement ET/OU inertiellement invariant.



Source: Youtube - James Fuhrman

Equilibrage inertiel (FMI*)



YouTube. (2016, September 7), HARRISON CLOCK H3, retrieve from <https://www.youtube.com/watch?v=9yZXm3zx-R4>.

Équilibrage inertiel (FMI*)

Définition : Un mécanisme est équilibré inertiellement quand sa **quantité de mouvement**, son **moment cinétique** sont nuls et que son **tenseur d'inertie** **reste constant** dans tout son espace de travail.

Si un mécanisme est équilibré inertiellement de manière *passive* alors:

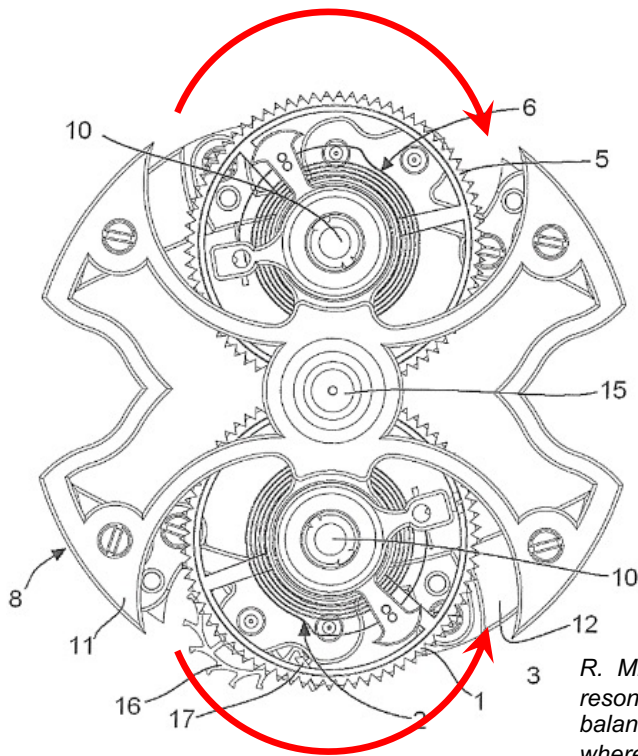
- Il n'exporte pas de forces ni de couples vers son bâti.
- Le mécanisme est insensible aux accélérations linéaires et angulaires externes ainsi qu'aux vitesses angulaires externes.

Remarque : Un mécanisme peut être équilibré statiquement ET/OU inertiellement.

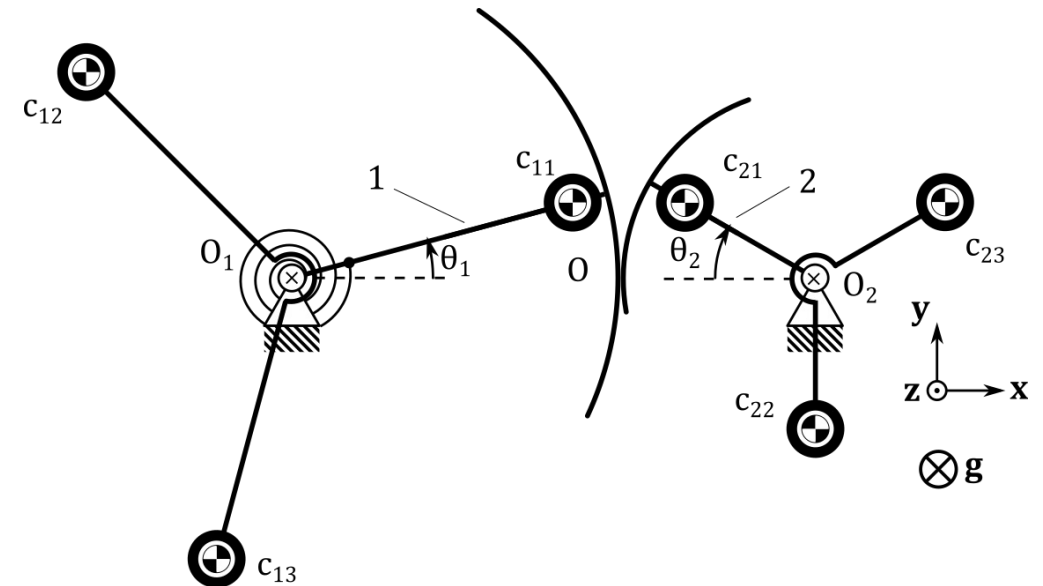
Equilibrage inertiel (FMI*)

Equilibrage inertiel passif

- Redistribution de la masse du mécanisme pour que son centre de masse soit fixe dans l'espace, que son moment cinétique soit nul et que son tenseur d'inertie soit constant.
- Rajout de mécanismes ou de liaisons / symétrisation du mécanisme.

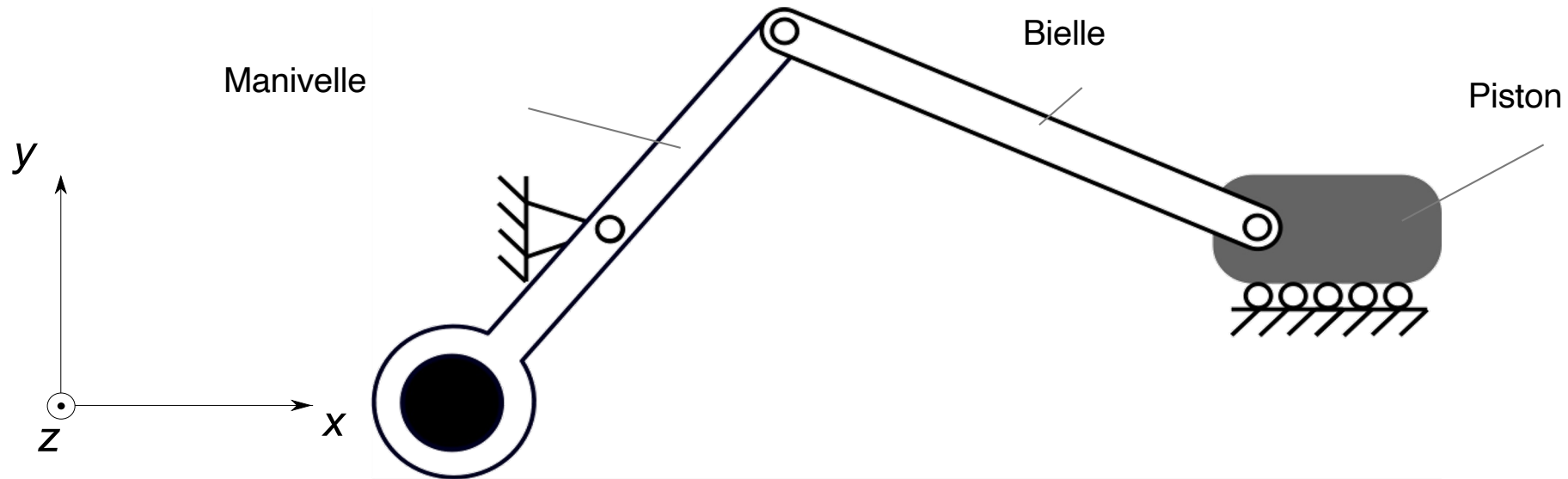


R. Mika, "Mechanical oscillator for use in mechanical resonator of horological movement of wristwatch, has balance wheels associated with respective hairsprings, where balance wheels are toothed and arranged in engagement with each other," CH700747(B1), Jul. 31, 2014.



Equilibrage partiel

Certains mécanismes ne sont équilibrés que *partiellement*, c'est-à-dire que les conditions d'équilibrages ne sont pas satisfaites de manière exacte.

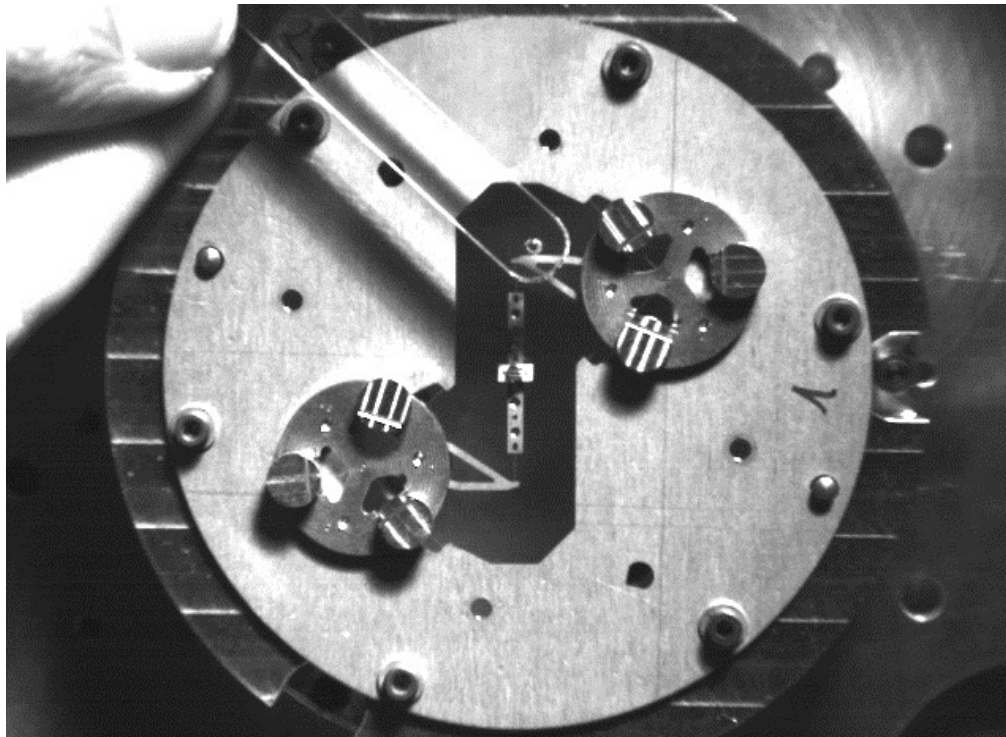


Exemple d'un mécanisme piston-bielle-manivelle partiellement équilibré en force grâce à un contrepoids attaché à la manivelle.

Equilibrage local

Certains mécanismes ne sont équilibrés que *localement*, c'est-à-dire uniquement au voisinage d'une position donnée (généralement appelée position nominale).

Pour des grands débattements, les conditions d'équilibrage ne sont plus satisfaites de manière exacte, ils sont alors équilibrés *partiellement*.



Exemple de mécanisme équilibré localement en inertiellement (FMI).

Vidéo (ralentit x40) de l'oscillateur Wattone en oscillations libre.

Résumé des notions traitées

Types d'équilibrage :

- Equilibrage statique : énergie potentielle totale du mécanisme qui est invariante.
- Equilibrage en force: centre de masse du mécanisme qui est à vitesse nulle.
- Equilibrage en moment : moment cinétique du mécanisme nul en un point ou groupe de points.
- Equilibrage dynamique : mécanisme équilibré en force et en moment.
- Invariance inertielle : tenseur du mécanisme qui reste constant en un point ou groupe de points.
- Equilibrage inertiel : mécanisme équilibré dynamiquement et invariant inertiellement.

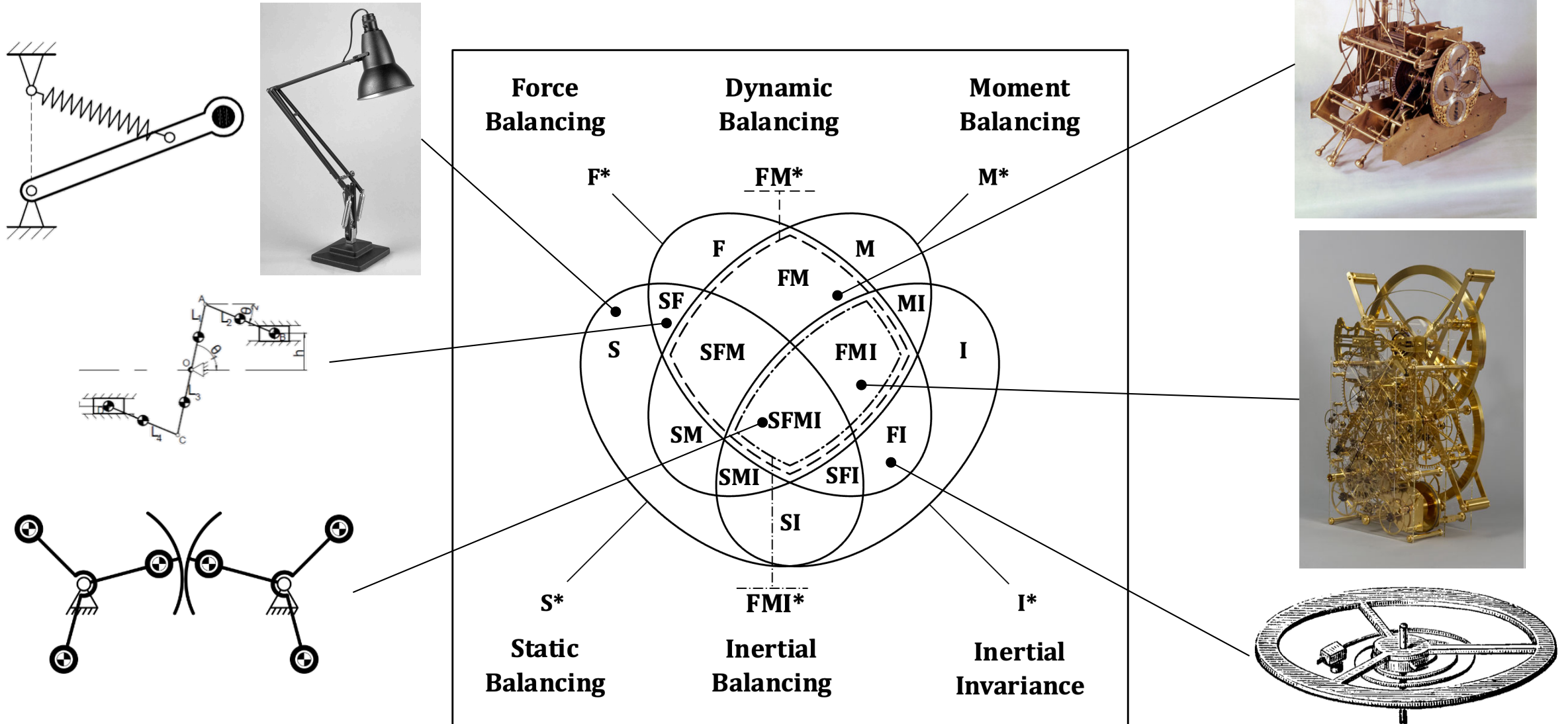
Validité de l'équilibrage dans l'espace de travail du mécanisme:

- Equilibrage global: propriété conservée dans tout l'espace de travail.
- Equilibrage local: propriété conservée dans l'espace proche d'un point de fonctionnement (hypothèse des faibles déplacements).
- Equilibrage partiel: équilibrage approximatif

Implémentation :

- Equilibrage passif: distribution de la masse, couplage cinématique.
- (Equilibrage actif: actionneur découplé ajouté au châssis du mécanisme).

Classification des équilibrages



Projet FLYFORCE

Cahier des charges :

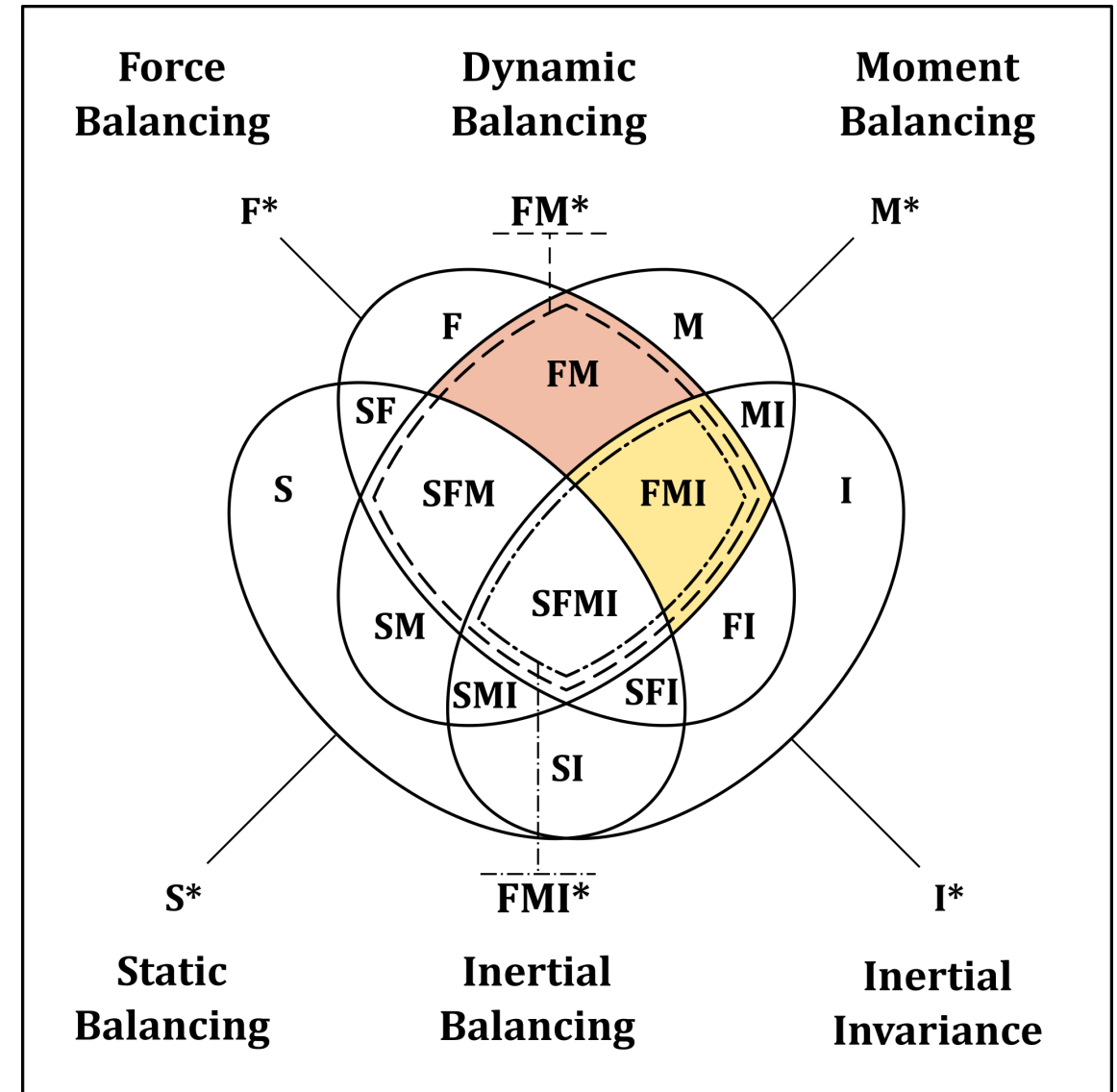
- **FM** : Equilibrage dynamique
- **FMI**: Equilibrage inertiel (optionnel)

En pratique :

F*: « Centre de gravité immobile lorsque le mécanisme bouge ».

M*: « Toute inertie “horaire” a son homologue “antihoraire” ».

I*: « Les moments d’inertie du mécanisme sont invariables quelque soit sa position ».



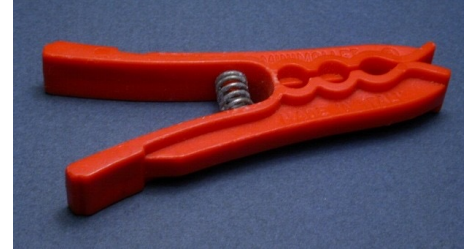
Quizz : Indiquer le type d'équilibrage (S,F,M,I)



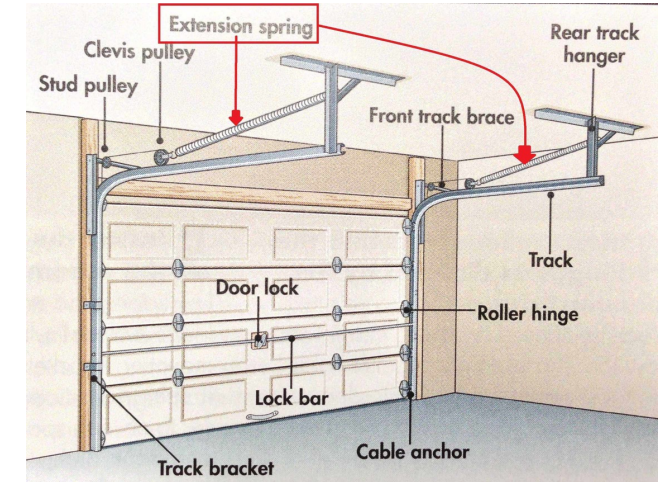
Porte
(gonds verticaux)



Trappe



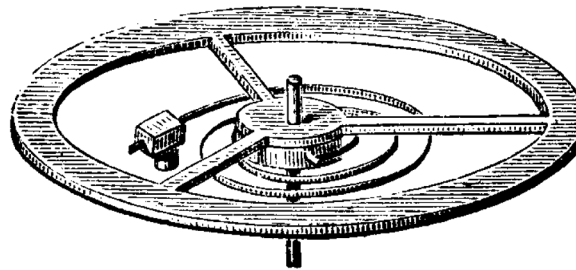
Pince à linge



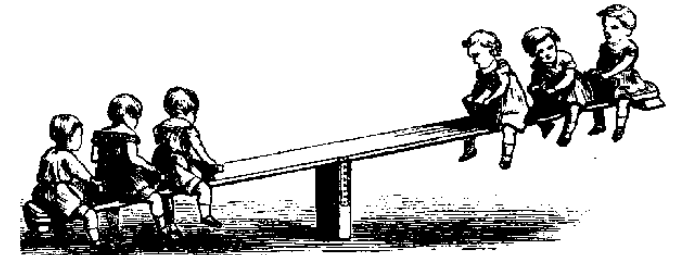
Porte de garage avec contre-poids



Diapason



Balancier spiral



Balançoire à bascule

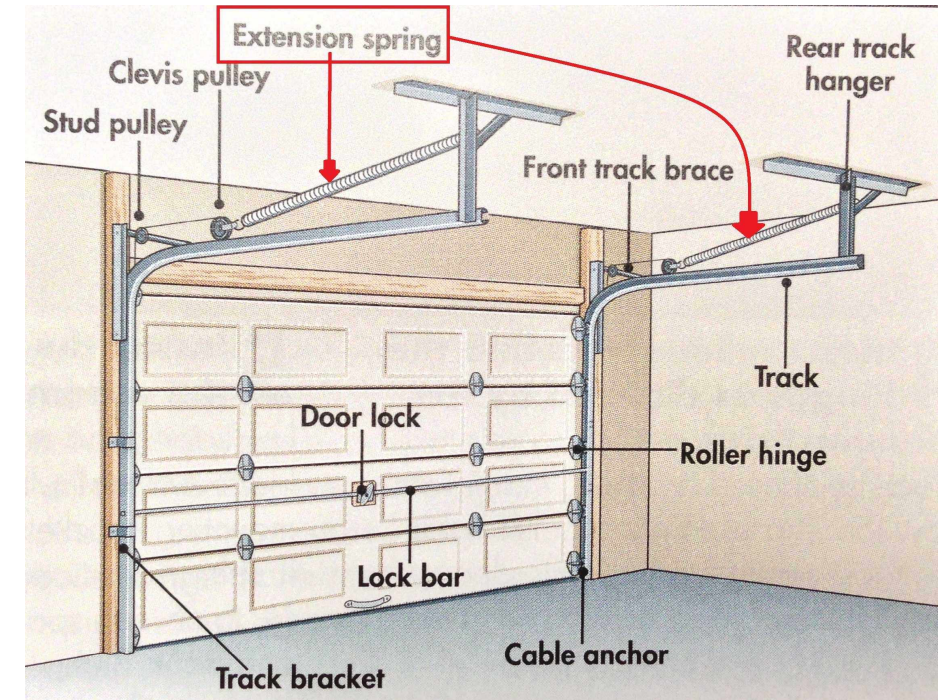
Quizz : solutions



Porte : **S**



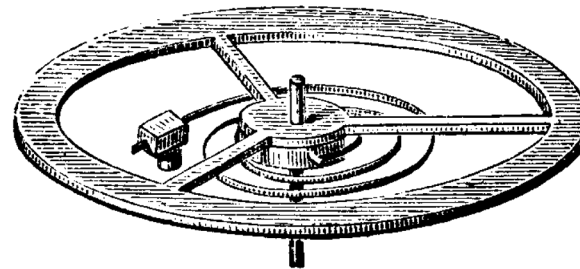
Trappe : -



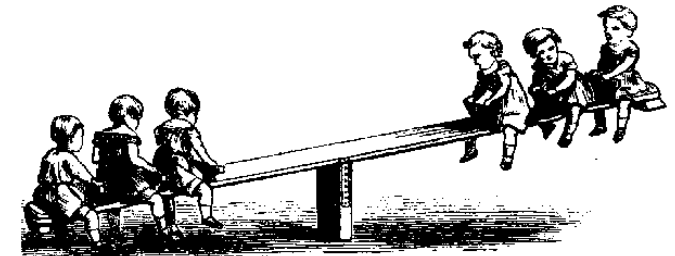
Porte de garage avec ressorts: **S**



Diapason: **F: local**
M: gobal



Balancier spiral: **FI**



Balançoire à bascule: **SF**

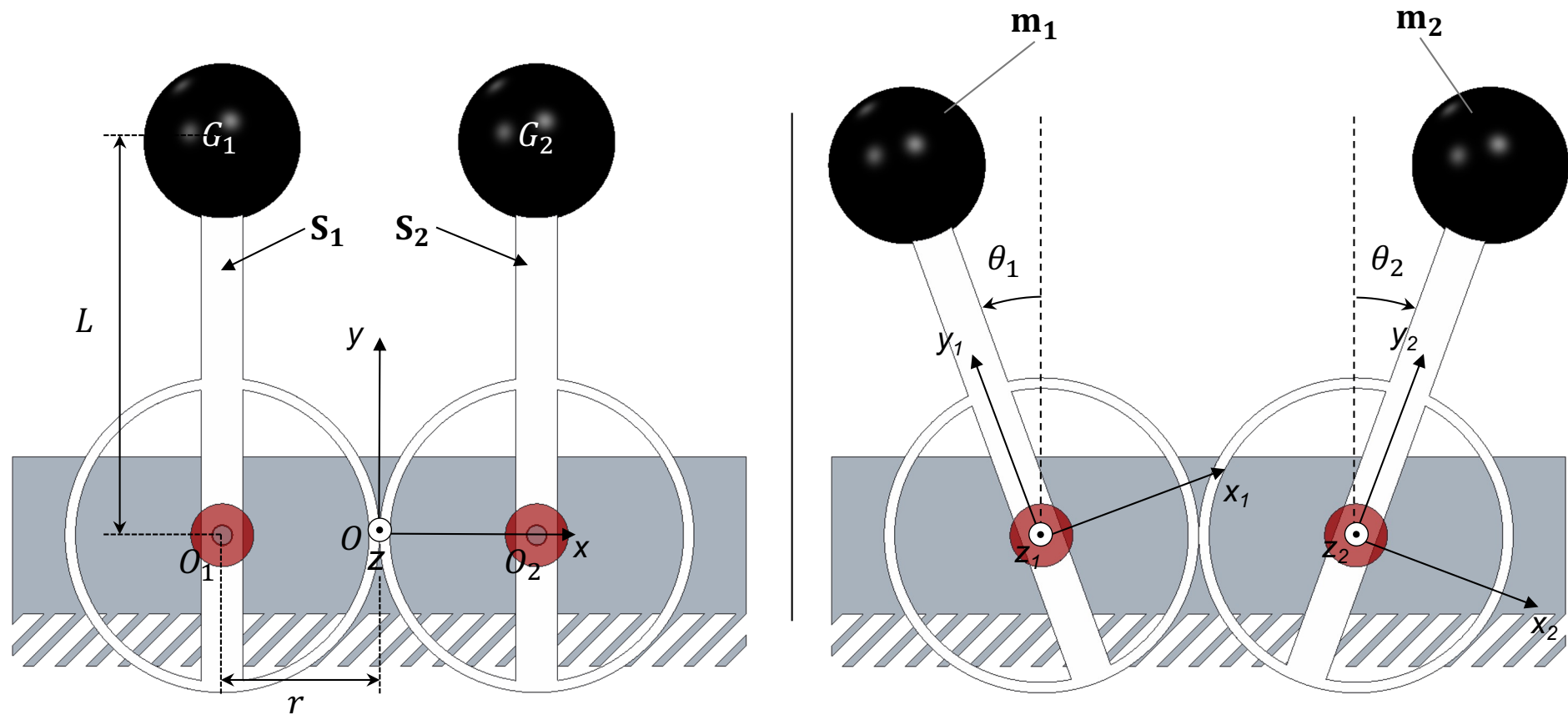
Exercices

Pour chaque mécanisme, indiquer:

- S'il est équilibré en force : Type **F** globalement¹, localement¹ ou non suivant les axes x, y ou z .
- S'il est équilibré en moment : Type **M** globalement¹, localement¹ ou non suivant les axes x, y ou z .
- S'il est équilibré dynamiquement : Type **FM** globalement¹, localement¹ ou non suivant les axes x, y ou z .
- S'il est invariant inertiellement : Type **I** globalement¹, localement¹ ou non suivant les axes x, y ou z .
- S'il est équilibré inertiellement : Type **FMI** globalement¹, localement¹ ou non suivant les axes x, y ou z .

¹Indiquer les conditions à remplir (masses, inerties, longueurs) pour garantir l'équilibrage.

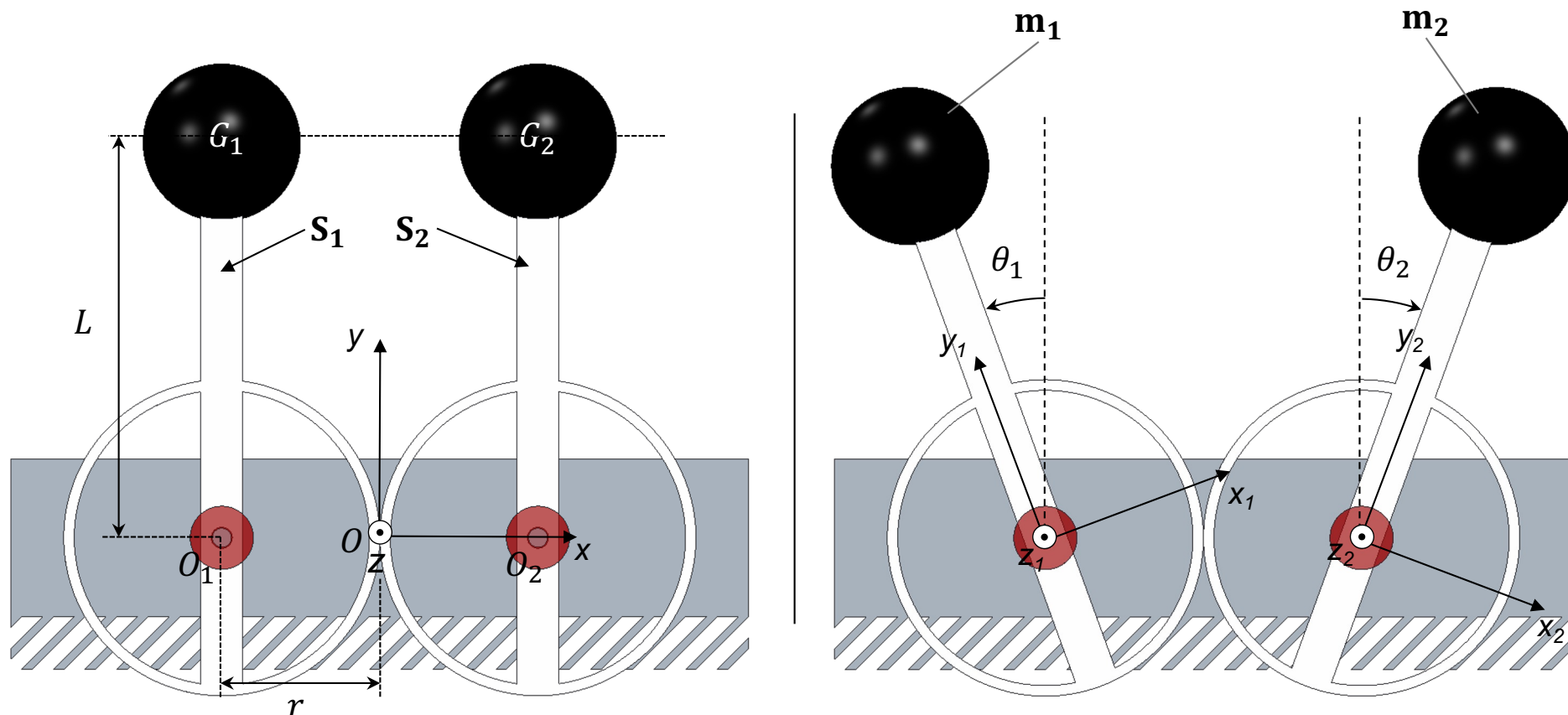
1.



Roulement sans glissement en O entre les solides S_1 et S_2 .

Type d'équilibrage	F*			M*			FM*			I*			FMI*		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
Global															
Local															
Impossible															

1.



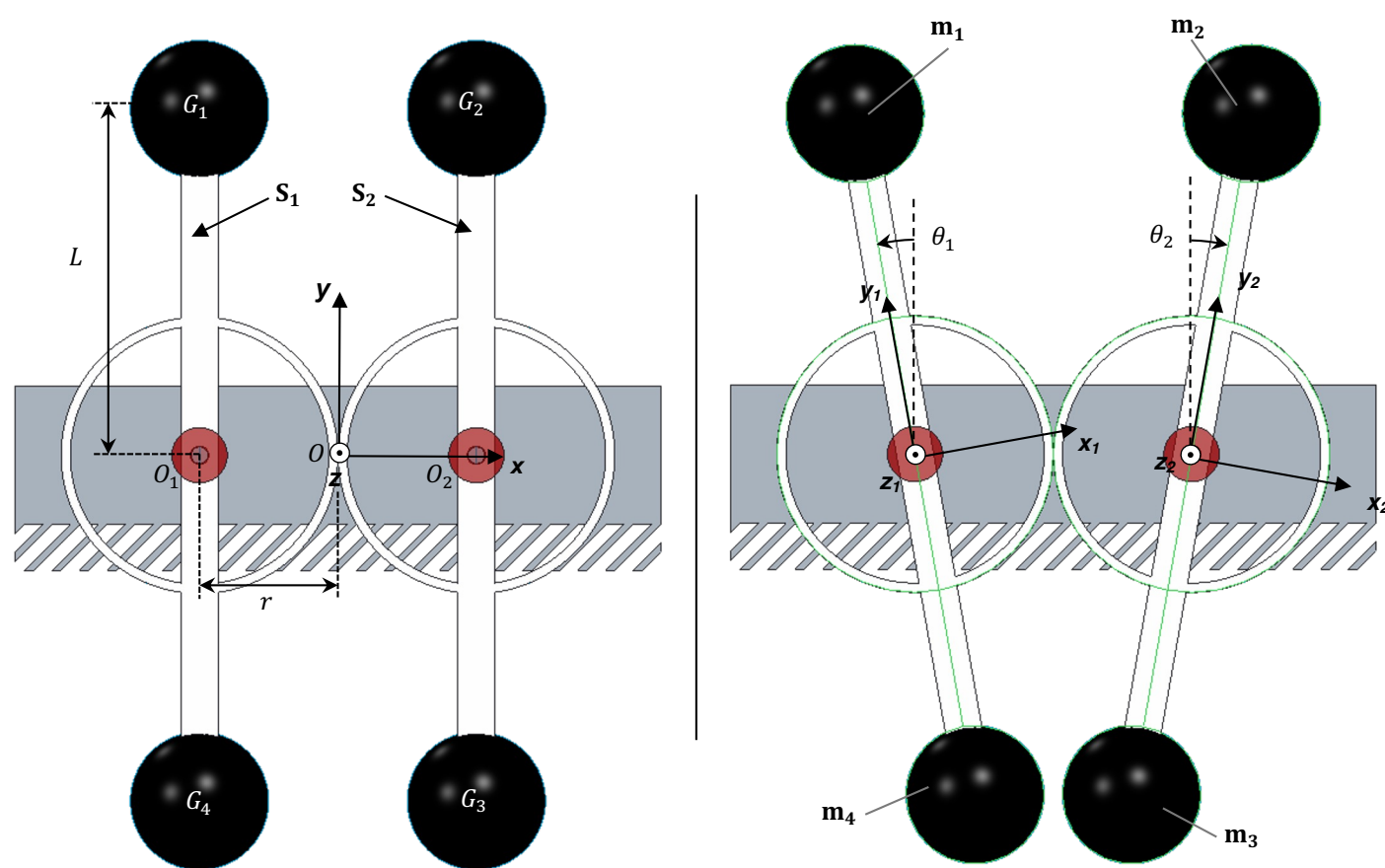
Roulement sans glissement en O entre les solides S_1 et S_2 .

Condition:
 $m_1 = m_2$

Type d'équilibrage	F*			M*			FM*			I*			FMI*		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
Global	✓		✓	✓ _#	✓	✓ _{##}									
Local															
Impossible		✓					✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Seulement en $z = 0$.
Seulement en $x = 0$.

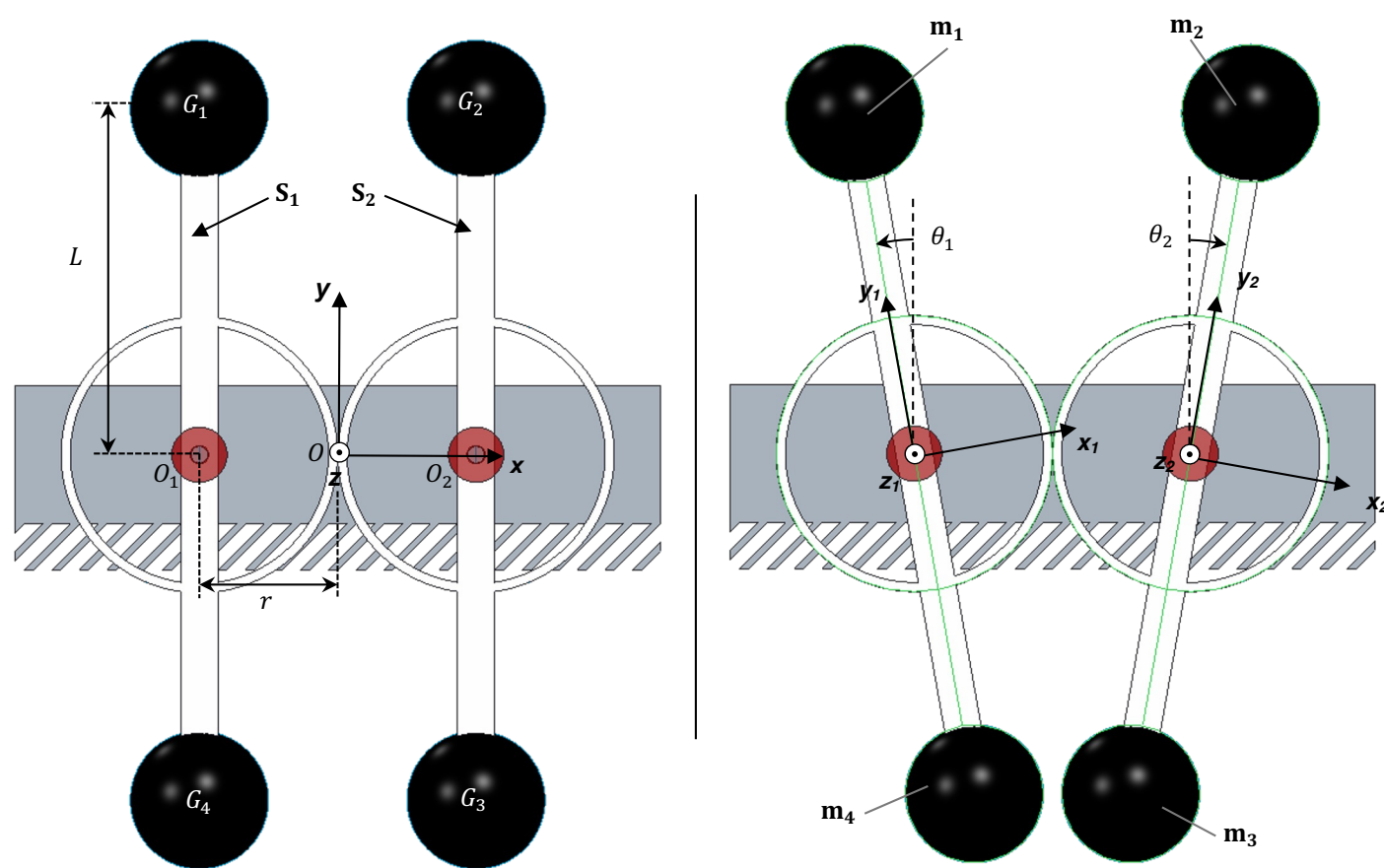
2.



Roulement sans glissement en O entre les solides S_1 et S_2 .

Type d'équilibrage	F*			M*			FM*			I*			FMI*		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
Global															
Local															
Impossible															

2.



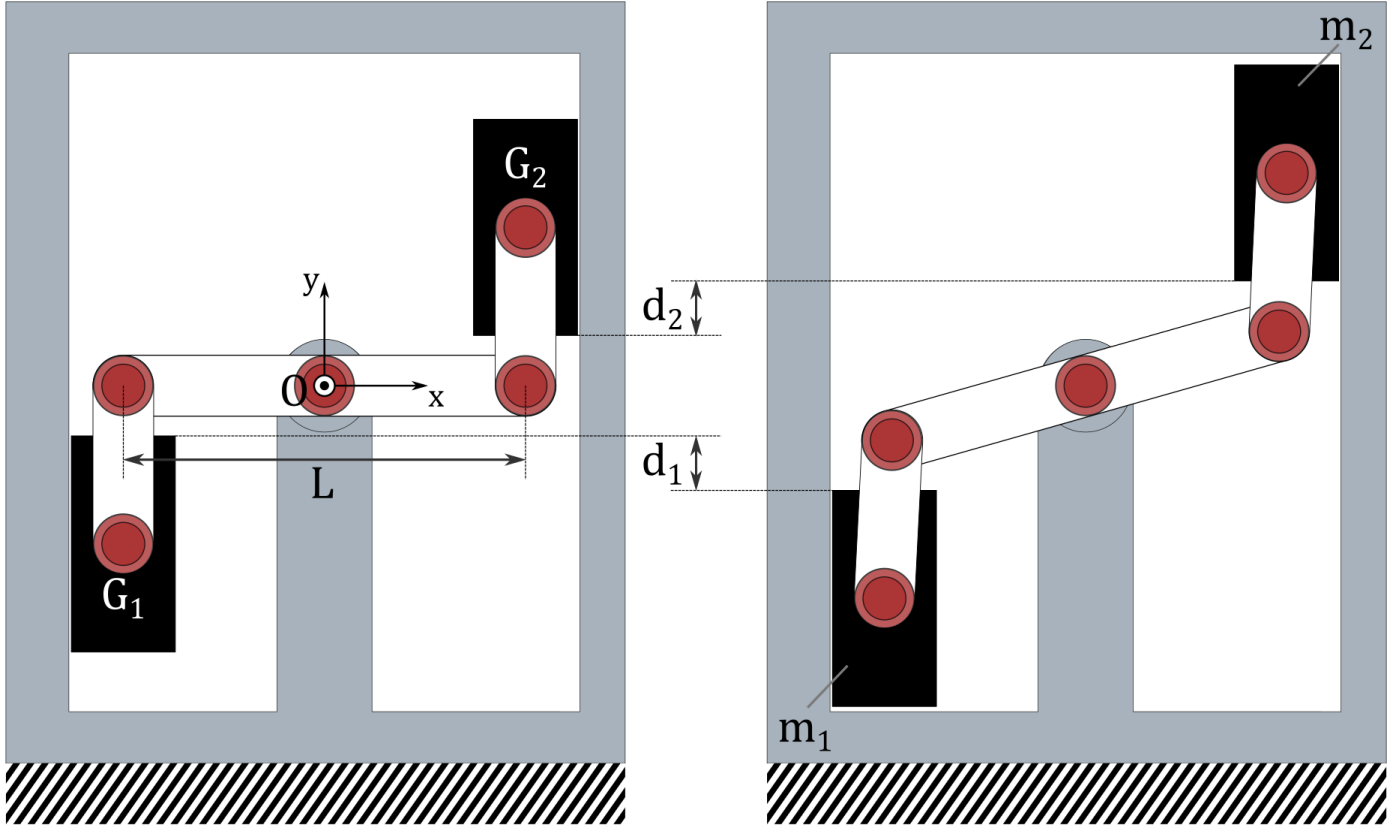
Roulement sans glissement en O entre les solides S_1 et S_2 .

Condition:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4$$

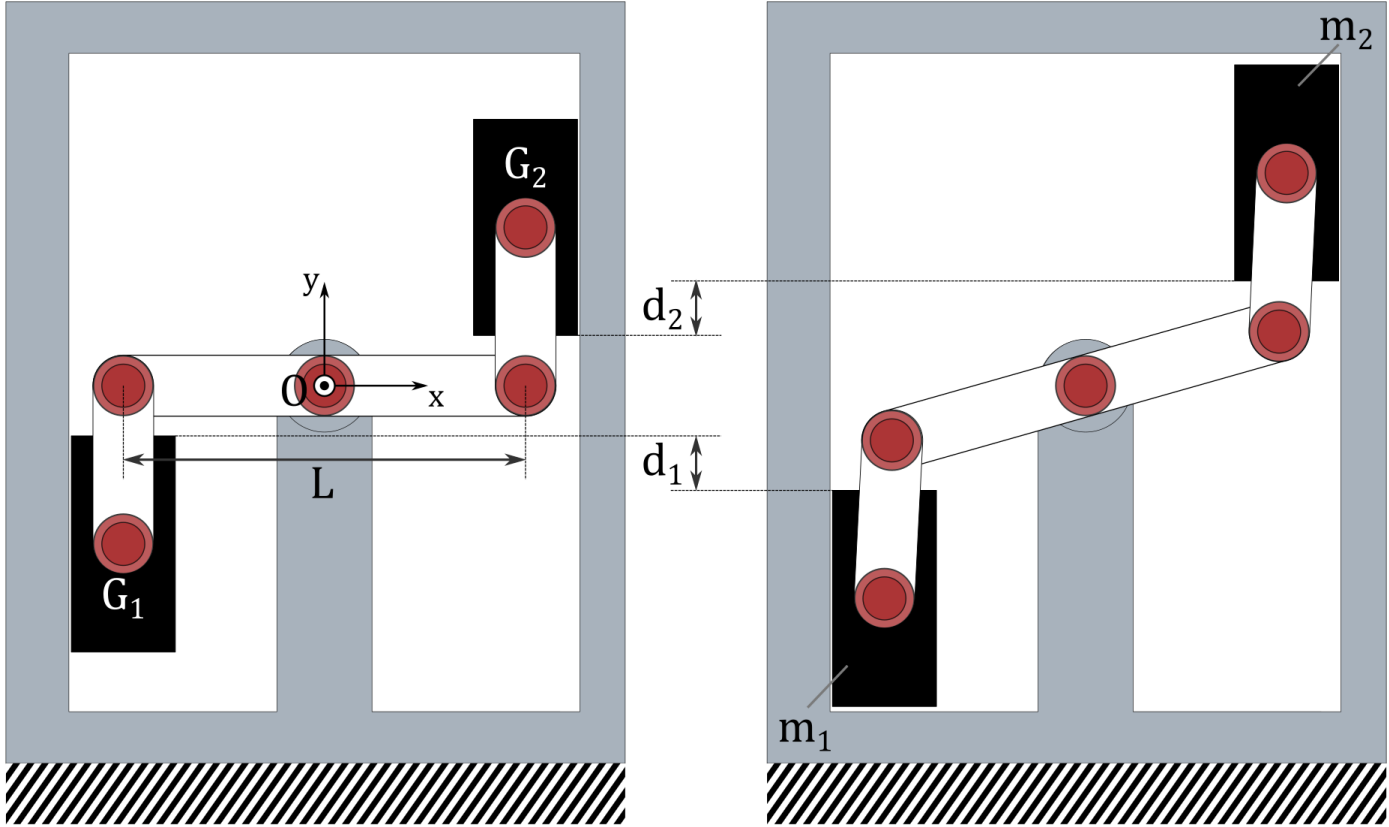
Type d'équilibrage	F*			M*			FM*			I*			FMI*		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
Global	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓			✓
Local															
Impossible										✓	✓		✓	✓	

3.



Type d'équilibrage	F*			M*			FM*			I*			FMI*		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
Global															
Local															
Impossible															

3.

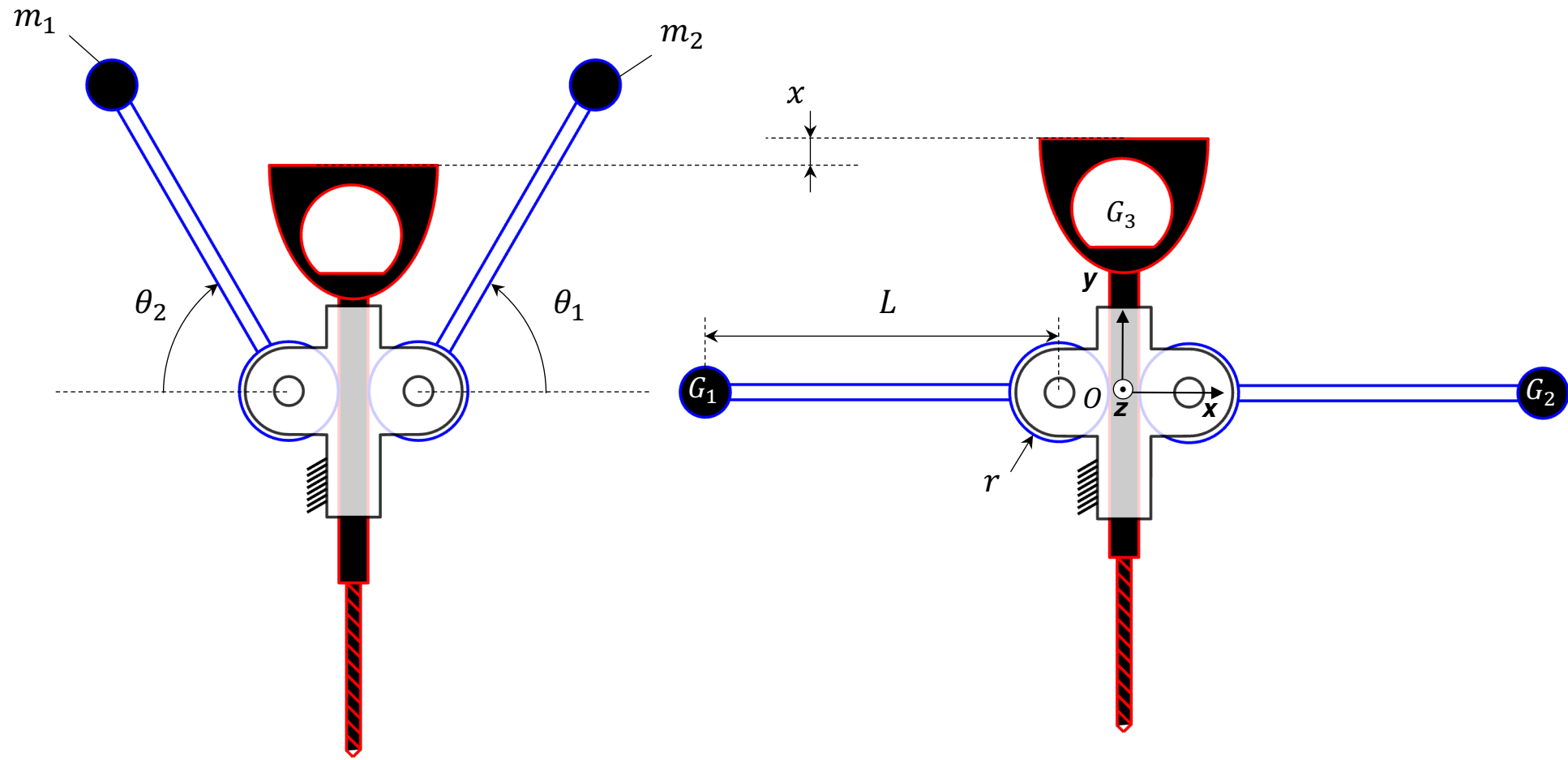


Condition:

$$m_1 = m_2$$

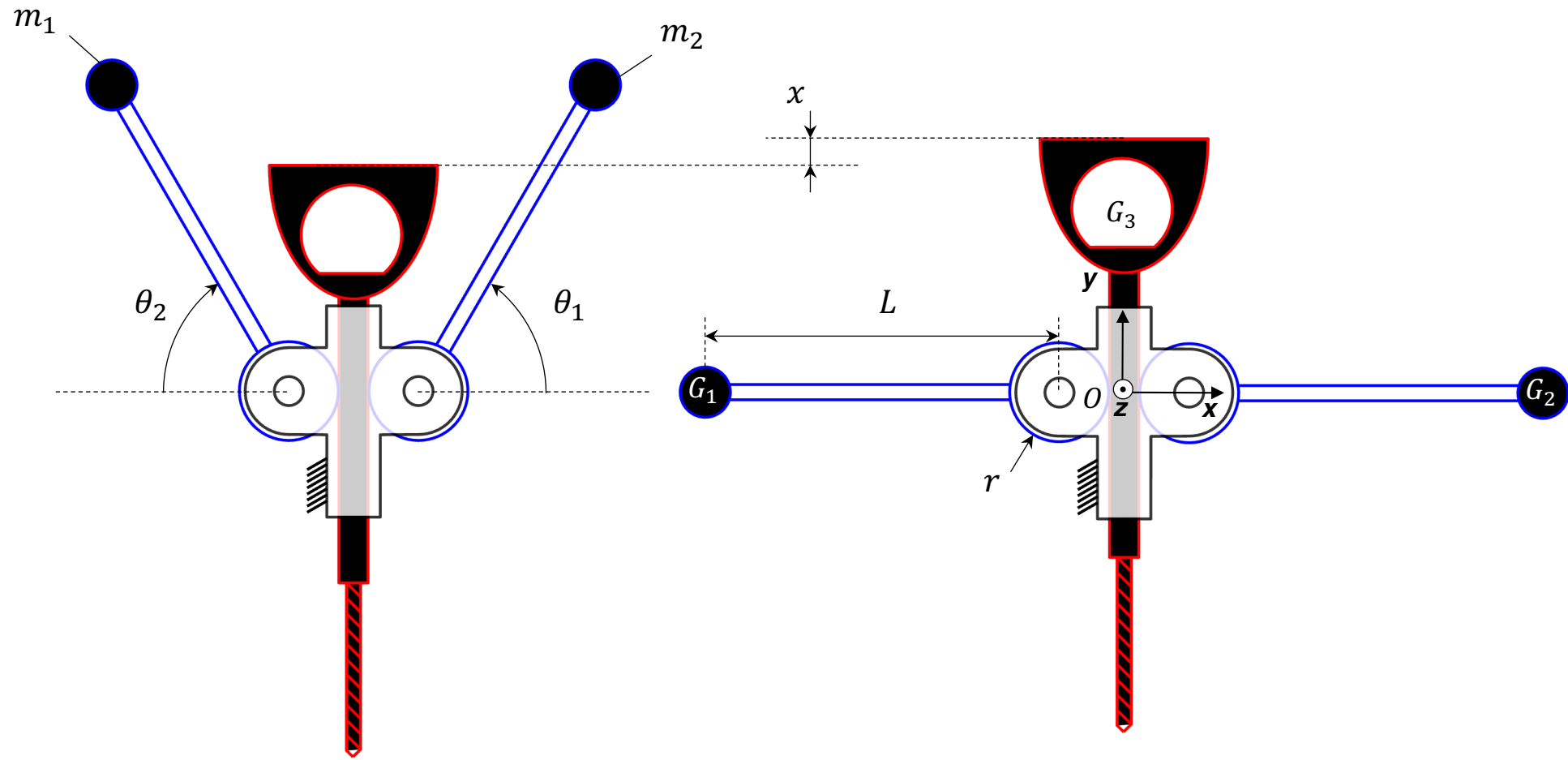
Type d'équilibrage	F*			M*			FM*			I*			FMI*		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
Global	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓			✓			✓	
Local															
Impossible						✓			✓	✓		✓	✓		✓

5.



Type d'équilibrage	F*			M*			FM*			I*			FMI*		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
Global															
Local															
Impossible															

5.

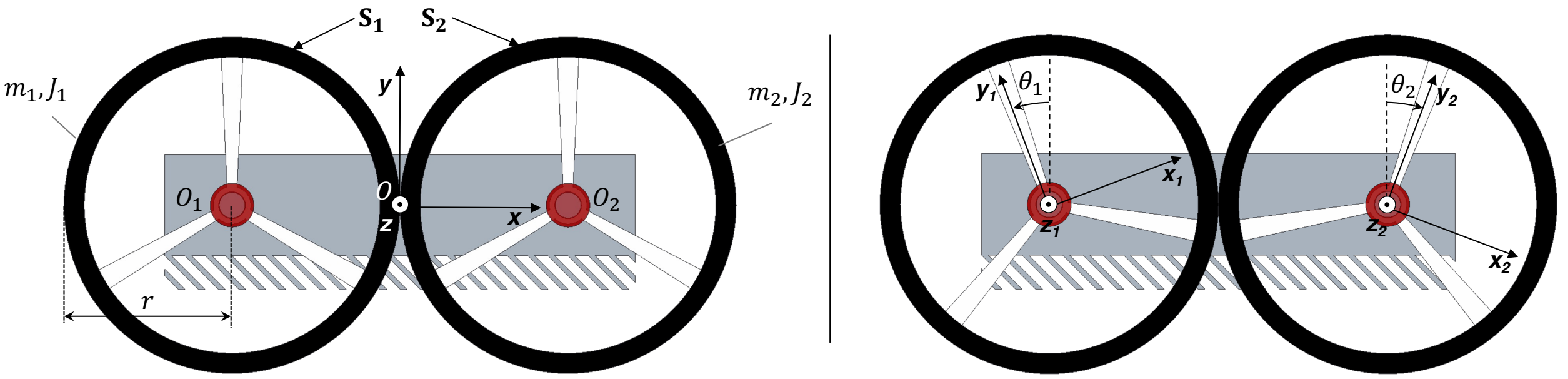


Type d'équilibrage	F*			M*			FM*			I*			FMI*		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
Global	✓		✓	✓	✓	✓	✓		✓						
Local		✓						✓							
Impossible										✓	✓	✓	✓	✓	✓

Condition:

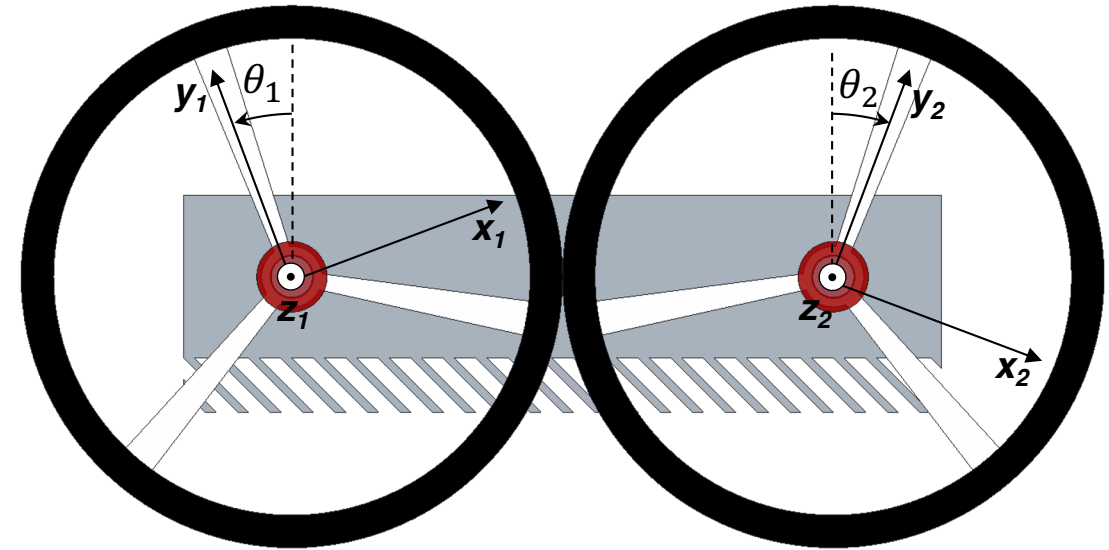
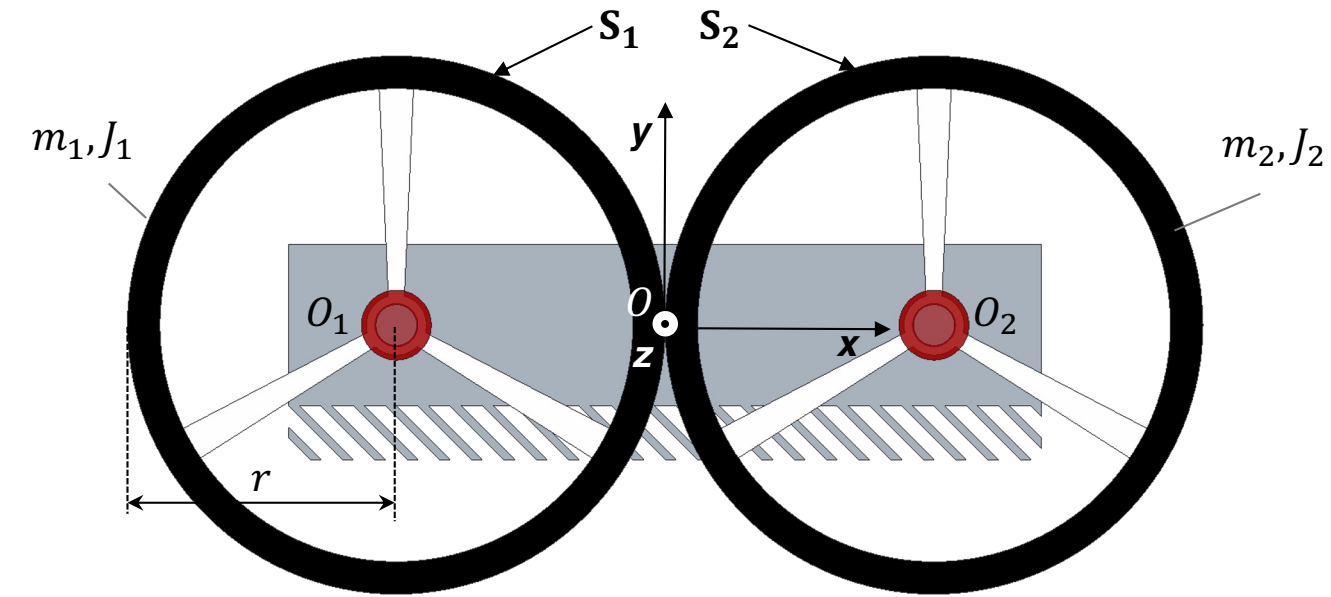
$$m_3 r = (m_1 + m_2) L$$

6.



Type d'équilibrage	F*			M*			FM*			I*			FMI*		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
Global															
Local															
Impossible															

6.



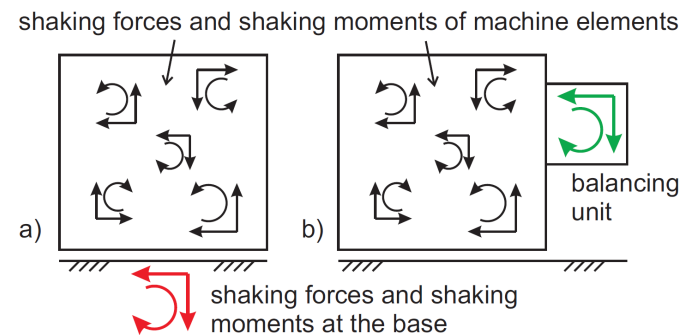
Condition:
 $J_1 = J_2$

Type d'équilibrage	F*			M*			FM*			I*			FMI*		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
Global	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Local															
Impossible															

Equilibrage actif en force et moment

Equilibrage en force et moment actif :

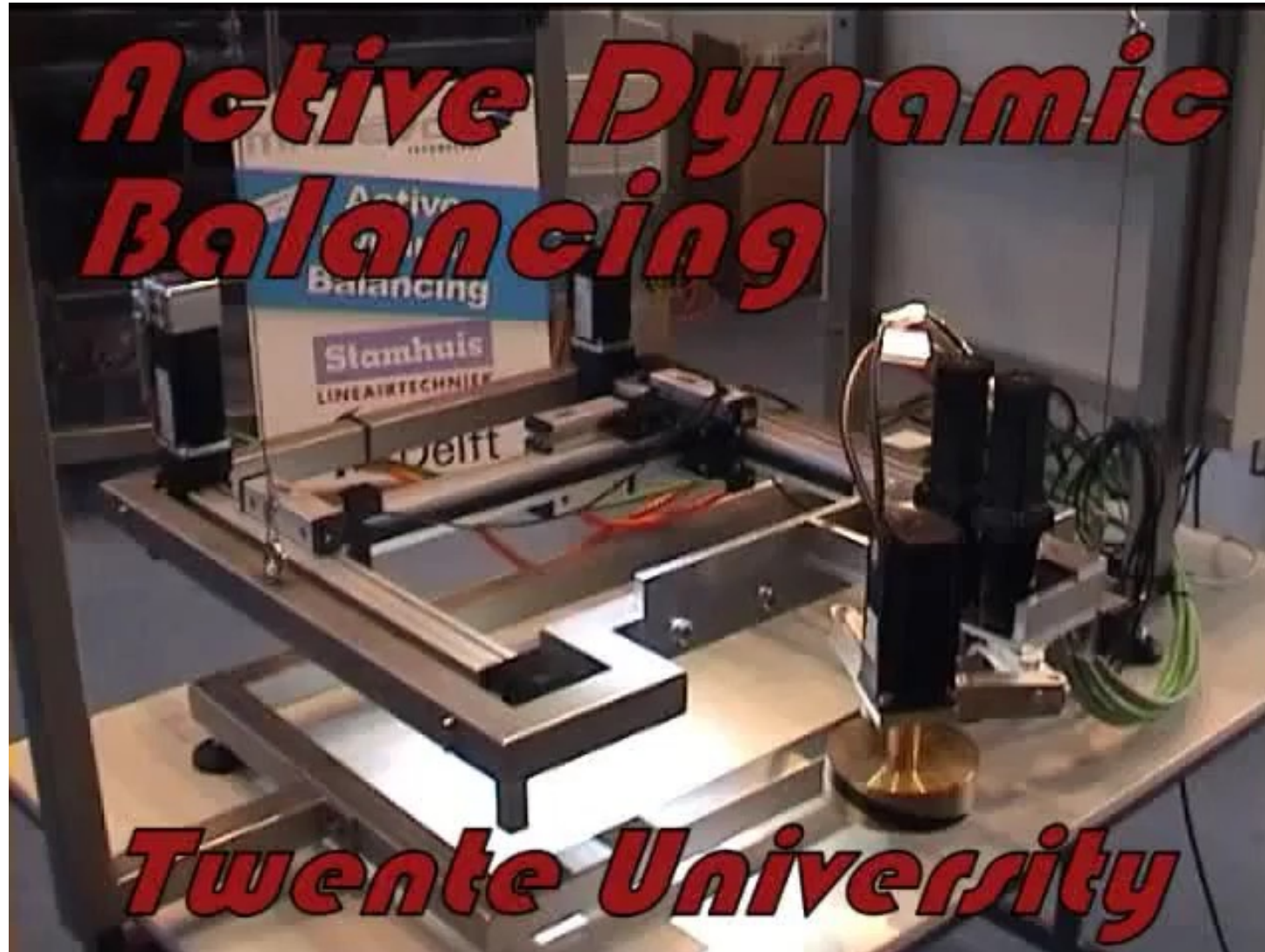
- Planification de trajectoires.
- Actionneurs supplémentaires requis pour l'équilibrage.



Si l'équilibrage en force et en moment est de type actif, alors le mécanisme reste sensible aux accélérations linéaires ET angulaires externes (par exemple si son bâti est dans un référentiel tournant).

Van der Wijk, V, & Herder, JL. "Active Dynamic Balancing Unit for Controlled Shaking Force and Shaking Moment Balancing." *Proceedings of the ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. Volume 2: 34th Annual Mechanisms and Robotics Conference, Parts A and B. Montreal, Quebec, Canada. August 15–18, 2010. pp. 1515-1522. ASME. <https://doi.org/10.1115/DETC2010-28423>

Equilibrage dynamique actif



YouTube. (2010, August 23), Active dynamic balancing - University of Twente, retrieve from <https://www.youtube.com/watch?v=ajdU7me-DKo>

Références images issues de publications

- Herder J.L. Energy-free Systems. Theory, conception and design of statically balanced spring mechanisms. 2001 Jan 1.
- Celentano L, Aschemann H. An innovative method for robots modeling and simulation. *New Approaches in Automation and Robotics*. 2008 May 1:392. DOI: 10.5772/5394
- Conception des guidages flexibles, Henein, S. (2001), Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- Weeke, SL, Tolou, N, Semon, G, & Herder, JL. "A Fully Compliant Force Balanced Oscillator." *Proceedings of the ASME 2016 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Volume 5A: 40th Mechanisms and Robotics Conference*. Charlotte, North Carolina, USA. August 21–24, 2016. V05AT07A008. ASME. <https://doi.org/10.1115/DETC2016-59247>.
- Briot S, Arakelian V. Complete shaking force and shaking moment balancing of in-line four-bar linkages by adding a class-two RRR or RRP Assur group. *Mechanism and Machine Theory*. 2012 Nov 1;57:13-26. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2012.06.004>.

Références images

Slide 33 :

- Un balancier-spiral; retrieve from https://fr.wikipedia.org/wiki/Ressort_spiral;

Slide 44 :

- Marine timekeeper H1, front, John Harrison; retrieve from <http://www.memoryprints.com/image/329107/john-harrison-marine-timekeeper-h1-front>

Slide 53 :

- R. Mika, "Mechanical oscillator for use in mechanical resonator of horological movement of wristwatch, has balance wheels associated with respective hairsprings, where balance wheels are toothed and arranged in engagement with each other," CH700747(B1), Jul. 31, 2014.

Slide 57 :

- Un balancier-spiral; retrieve from https://fr.wikipedia.org/wiki/Ressort_spiral;
- Marine timekeeper H1, front, John Harrison; retrieve from <http://www.memoryprints.com/image/329107/john-harrison-marine-timekeeper-h1-front>
- Marine timekeeper H3, back and side, John Harrison; retrieve from <http://www.memoryprints.com/image/329117/john-harrison-marine-timekeeper-h3-back-and-side>

Slide 59 :

- Une porte; retrieve from http://clipart-library.com/clipart/squeaky-cliparts_19.htm
- Une trappe ; retrieve from <https://www.mastersconcrete.com/media/products/docs/Bilco-Brochure.pdf>
- Une pince à linge; retrieve from https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/aa/Pince_a_linge_avec_ressort.jpg
- Un culbuto; retrieve from <https://store.rolandgarros.com/roland-garros-16qb-culbuto-usb-stick-white.html>
- Un téléphérique; retrieve from Par Tkseven — Travail personnel, CC BY-SA 2.5, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3536354>
- Un skateboard; retrieve from https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Globe_Skateboard.jpg
- Ressort spiral; retrieve from PRIVAT-DESCHANEL et FOCILLON, *Dictionnaire général des sciences techniques et appliquées*, 1883
- Un assemblage piston-vilebrequin; retrieve from https://www.skoda-storyboard.com/en/innovation-and-technology/powerful-and-efficient/attachment/engine_balancing/?state=NEW&aid=1e72f545-177e-4096-9231-e1cb47740120

Slide 60 :

- Un fusil; retrieve from [https://www.ebay.com/itm/293100742488?hash=item443e2a6758:g:MGgAAOSwUihc5arU](https://www.ebay.com/itm/293100742488?hash=item443e2a6758:g:MGgAAOSwUihc5arU;);
- Un diapason; retrieve from <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/ff/Tuning-fork.jpg>
- Une porte de garage; retrieve from <https://shoffdoorcoinc.com/repair/>
- Tire-bouchon à levier; retrieve from https://www.paris-prix.com/accessoire-a-vin/6150-tire-bouchon-cdg-argente.html?gclid=EAlaIqobChMImZP8i-qg9gIVx4xoCR1upwDuEAQYAIBAEgIOsvD_BwE
- Une balance à bascule; retrieve from https://fr.wikipedia.org/wiki/Balan%C3%A7oire_%C3%A0_basculer

Références vidéos

Slide 9 :

- Dailymotion. (2016, June 7), Test d'un steadicam sur une caméra à 70000\$ (Fail), retrieve from <https://www.dailymotion.com/video/x4ezcx8>

Slide 16 :

- YouTube. (2018, November 10), Spring balancing, retrieve from <https://www.youtube.com/watch?v=XKq6cP4qjY>.

Slide 23 :

- YouTube. (2018, July 12), Bistable Mechanism - Marble Machine X #44, retrieve from <https://www.youtube.com/watch?v=3v5xfWkp9Ys>

Slide 29 :

- YouTube. (2012, August 1), Unbalanced rotor behaviour, retrieved from <https://www.youtube.com/watch?v=R2hO--TljjA>.

Slide 30 :

- YouTube. (2015, June 21), Motocross How To: Mid Air Adjustments, retrieved from <https://www.youtube.com/watch?v=cv345HMqwFI>.

Slide 34 :

- YouTube. (2018, November 12), Static balancing demonstration of a family of 5-DOF parallel mechanisms, retrieve from https://www.youtube.com/watch?v=fjMf8rAbgxE&list=RDQMFPv4vtfd7A&start_radio=1
- YouTube. (2015, June 4), Dynamic and static balancing, retrieved from https://www.youtube.com/watch?v=f7_7jJSz8Kg.

Slide 45 :

- YouTube. (2015, July 30), Dynamic Balancing of a Two-degrees-of-freedom Parallel Mechanism Using a Counter-Mechanism, retrieve from <https://www.youtube.com/watch?v=AYrFFcbBm94>.
- YouTube. (2013, August 9), DUAL V - A balanced robot invented by Lirrm and University of Twente, retrieved from <https://www.youtube.com/watch?v=Ofq21LDNxdU>.

Slide 49 :

- YouTube. (2012, August 1), Unbalanced rotor behaviour, retrieved from <https://www.youtube.com/watch?v=R2hO--TljjA>.

Slide 50 :

- YouTube. (2020, September 1), IMG 44501, retrieved from <https://www.youtube.com/watch?v=FBqC6ZqzDNI>

Slide 51 :

- YouTube. (2016, September 7), HARRISON CLOCK H3, retrieve from <https://www.youtube.com/watch?v=9yZXm3zx-R4>.

Slide 62 :

- YouTube. (2010, August 23), Active dynamic balancing - University of Twente, retrieve from <https://www.youtube.com/watch?v=ajdU7me-DKo>.