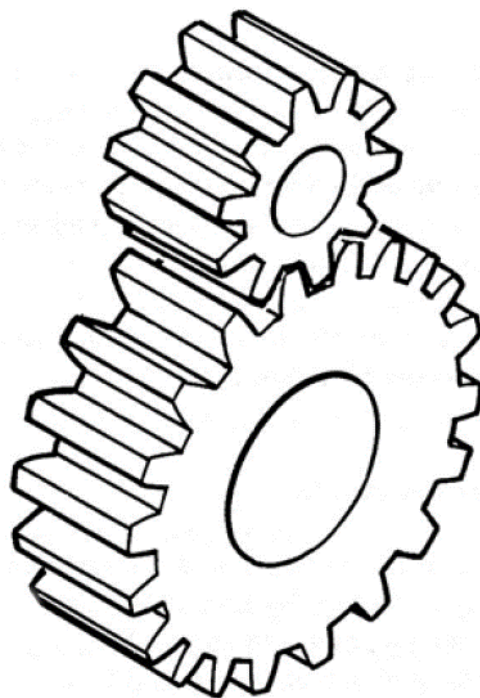


# Introduction à la théorie des **engrenages**



Prof. Simon Henein

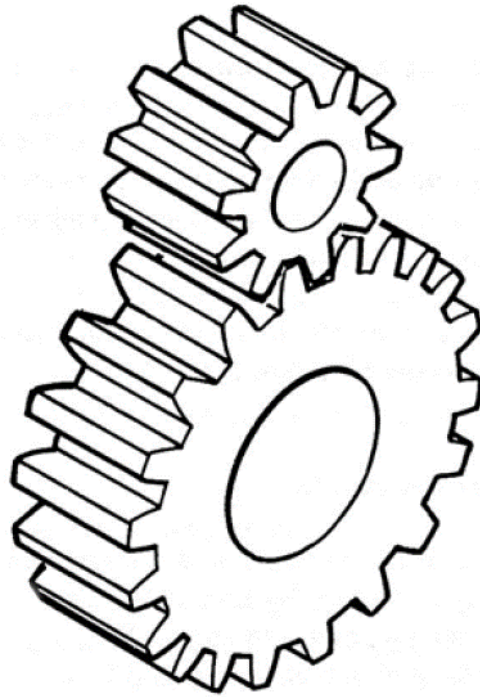
Billy Nussbaumer

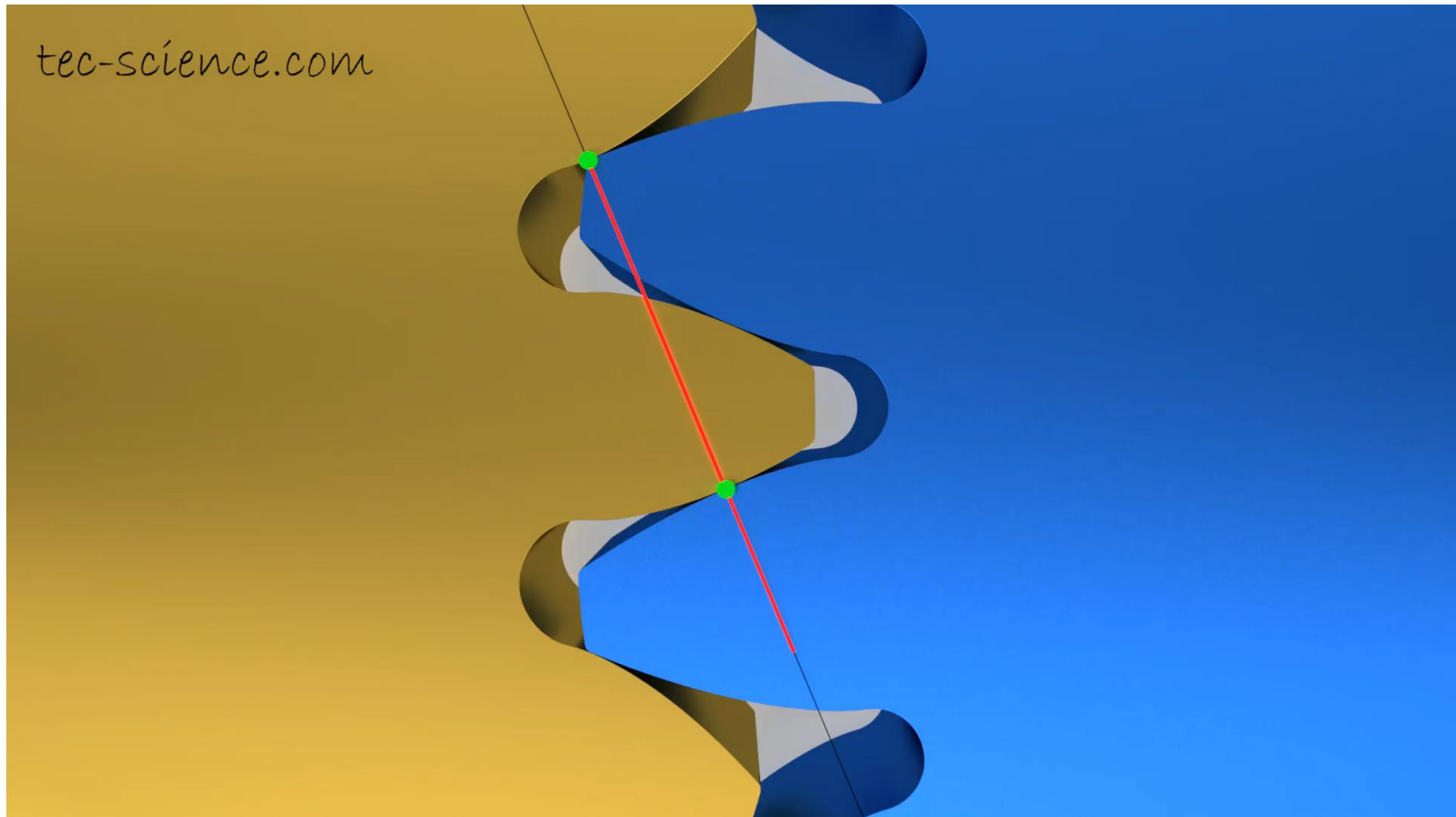
Patrick Flückiger

Décembre 2023

De nombreuses illustrations sont tirées de: *Composants de la microtechnique*, R. Clavel, EPFL, 2010

# Engrenages à profil en développante





Sur un diamètre primitif donné "d", nous voulons placer un certain nombre entier de dents "z". La longueur d'arc qui sépare chaque dent, pris sur le diamètre primitif, s'appelle le *pas primitif* ou le *pas* "p".

On a donc:

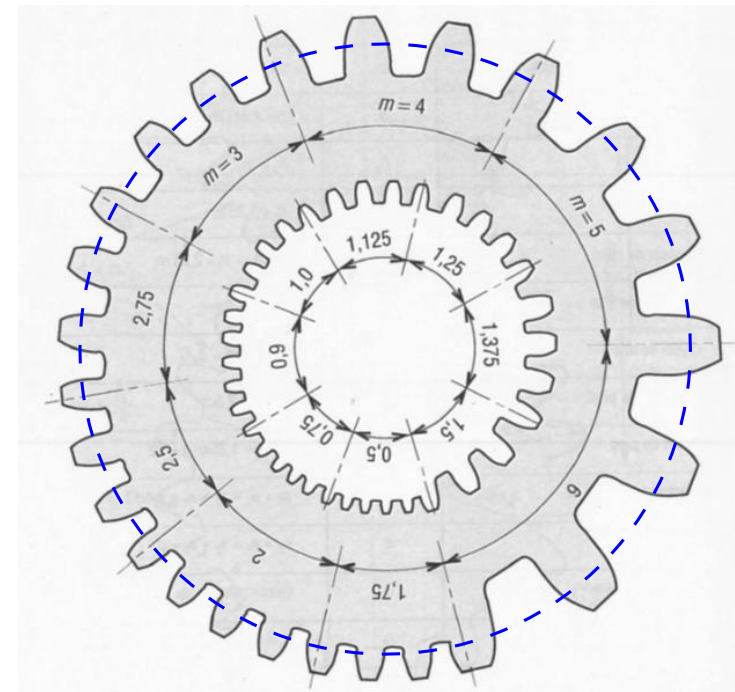
$$\pi d = pz \Leftrightarrow d = \frac{p}{\pi} z$$

On définit le module  $m = \frac{p}{\pi}$ , de sorte que:

$$d = mz$$

On définit également le pas de base  $p_b$ :  
(correspond à la longueur d'arc sur le cercle de base qui sépare chaque dent)

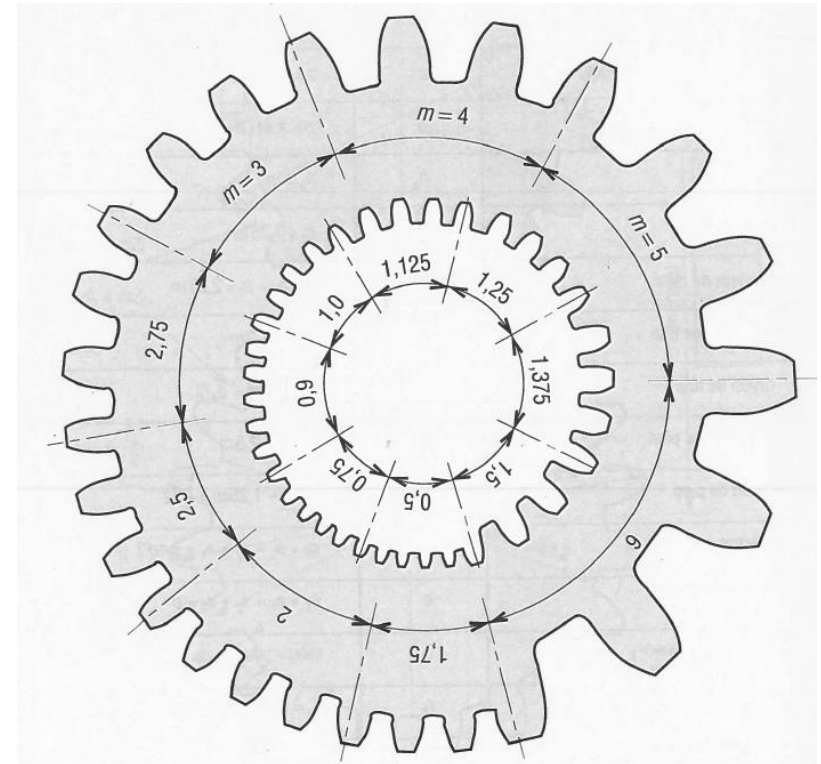
$$p_b = p \cos(\alpha)$$



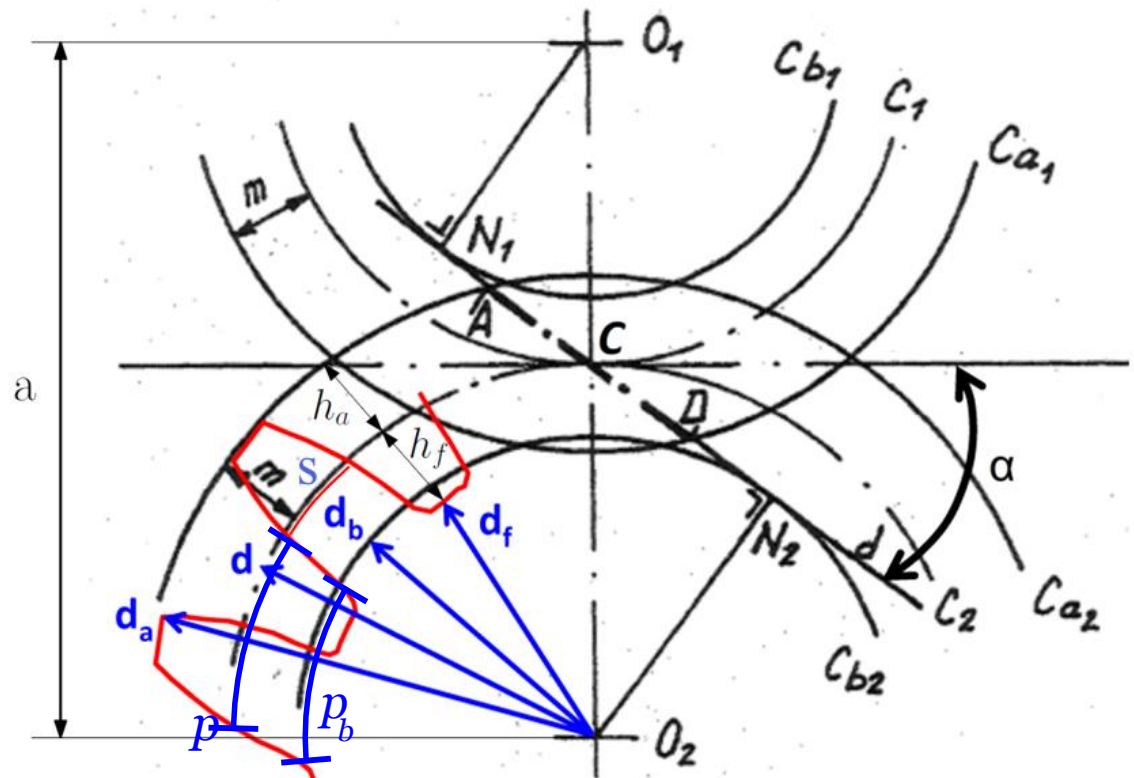
Modules recommandés (VSM):

|     |      |      |     |      |     |     |
|-----|------|------|-----|------|-----|-----|
| 0,1 | 0,12 | 0,16 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,4 |
| 0,5 | 0,6  | 0,75 | 1   | 1,25 | 1,5 | 2   |
| 2,5 | 3    | 4    | 5   | 6    | 8   |     |

unités: mm



$d$  diamètre primitif  
 $d_f$  diamètre de pied  
 $d_b$  diamètre de base  
 $d_a$  diamètre de tête  
 $h_f$  creux  
 $h_a$  saillie  
 $a$  entraxe de référence  
 $d_b = d \cos(\alpha)$   
 $s = p/2$  épaisseur curviligne de dent sur cercle primitif, avec  $p$  le pas primitif  
 $p = \pi d/z$  pas primitif  
 $p_b = p \cos(\alpha)$  pas de base



Source: Systèmes mécaniques, Schiffmann, EPFL, 2018

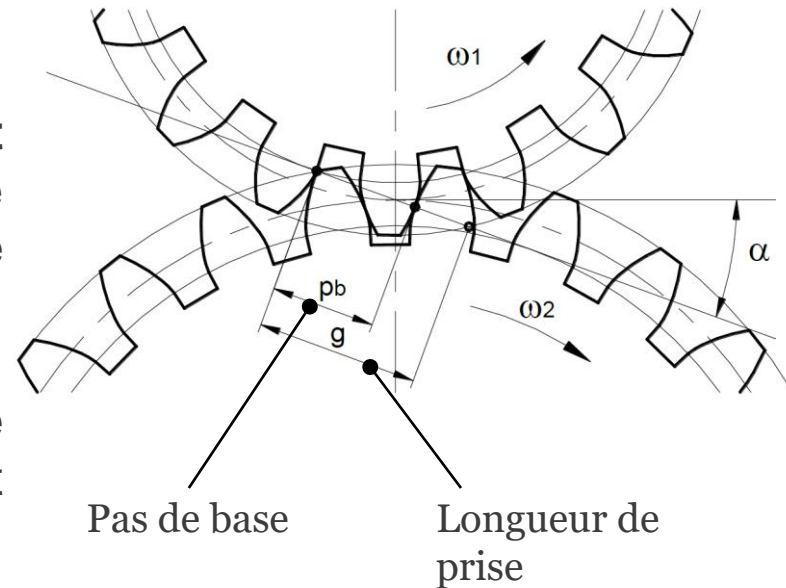
Les dimensions des dents sont rapportées au module et sont normalisées (VSM 15524):

$$h_a = 1 \cdot m$$

$$h_f = 1.25 \cdot m$$

$$h = h_a + h_f = 2.25 \cdot m$$

- Pour obtenir une transmission sans à-coups, il faut que les deux engrenages soient en contact à tout moment.
- Avant qu'une paire de dents ne se sépare, une deuxième paire doit entrer en contact
- Rappel: On définit la **ligne d'engrènement** comme le lieu des points de contact d'une paire de dents. Elle est limitée par les cercles de tête des engrenages
- Définition: On définit comme **longueur de prise** la longueur de la ligne d'engrènement
- Pour avoir une transition lisse, il faut:  
**longueur de prise  $\geq$  pas de base**



- Définition: On définit le **rapport de conduite**  $\varepsilon_\alpha$  comme le ratio longueur de prise/pas de base. Il représente le nombre moyen de dents en contact

- Pour avoir une transition lisse, il faut: **rapport de conduite  $\geq 1$**

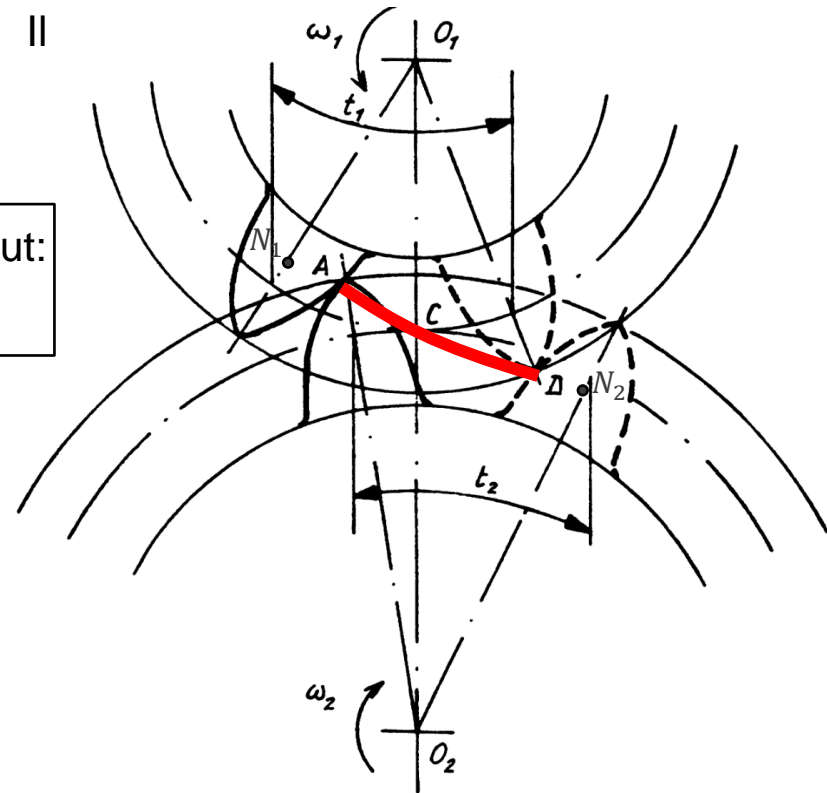
(En pratique, on veut que  $\varepsilon_\alpha > 1.1$  )

La ligne d'engrènement est **délimitée par les diamètres de tête**. Pour un profil en développante de cercle, il s'agit d'une droite coïncidente avec la ligne d'action.

Calcul de  $\varepsilon_\alpha$  pour un profil à développante :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\overline{AD}}{p_b} = \frac{1}{p_b} (N_1 D + AN_2 - N_1 N_2)$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{p_b} \left[ \sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} + \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} - a \sin \alpha \right]$$



$$d_{ai} = d_i + 2m = m(z_i + 2)$$

$$d_{bi} = d_i \cos \alpha$$

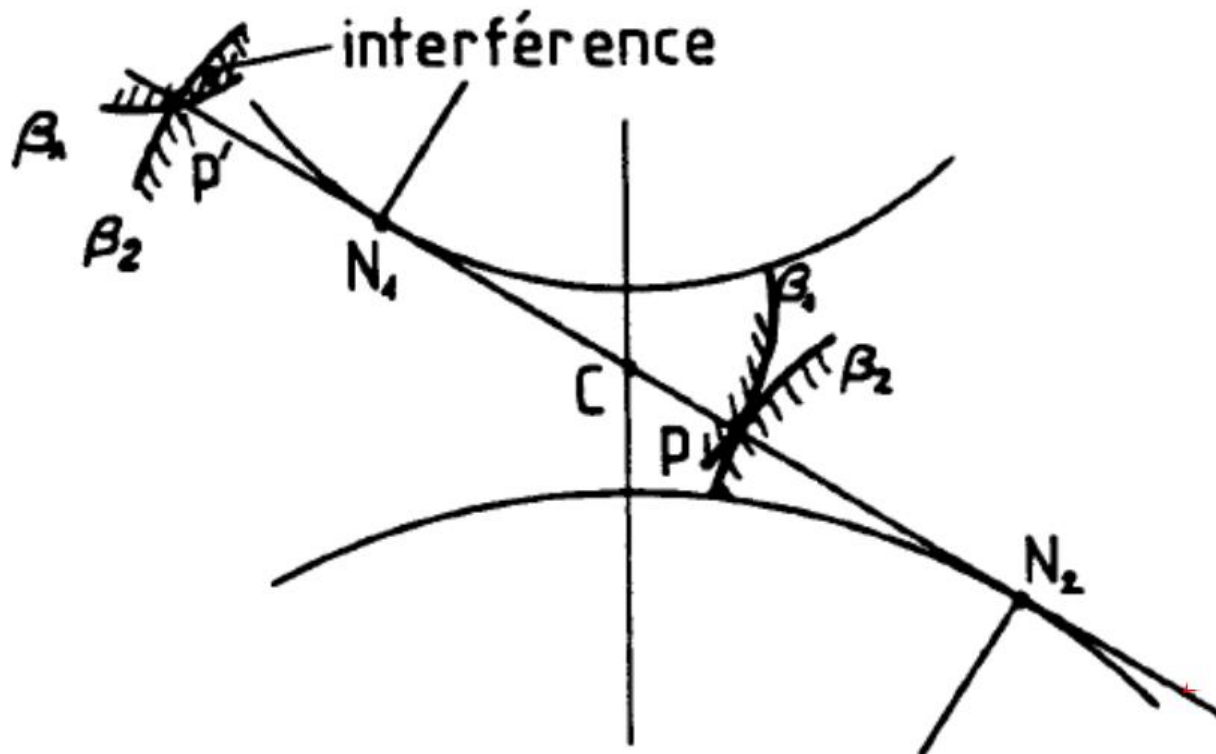
Diamètre de tête  
Diamètre de base



Les profils doivent être tels qu'il n'y ait pas d'interférence, c'est-à-dire:

- que le contact entre dents doit toujours s'effectuer tangentiellement,
- et que les profils ne doivent pas pénétrer l'un dans l'autre.

Dans le cas particulier du profil à développante de cercle, il faut que la ligne d'engrènement soit limitée entre  $N_1$  et  $N_2$  (c'est-à-dire que le cercle de tête d'un engrenage ne pénètre pas dans le cercle de base de l'autre).



Avec un premier engrenage avec  $z_1$  dents, il existe une roue 2 avec un nombre de dent min et max pour éviter l'interférence:

$$z_{2 \max} = \frac{\left(\frac{z_1}{2} \sin \alpha\right)^2 - 1}{1 - \frac{z_1}{2} \sin^2 \alpha}$$

$$z_{2 \min} = \sqrt{z_1^2 + 4 \frac{1 + z_1}{\sin^2 \alpha}} - z_1$$

Cas particulier: Nombre minimal de dents pour un système pignon-crémaillère:

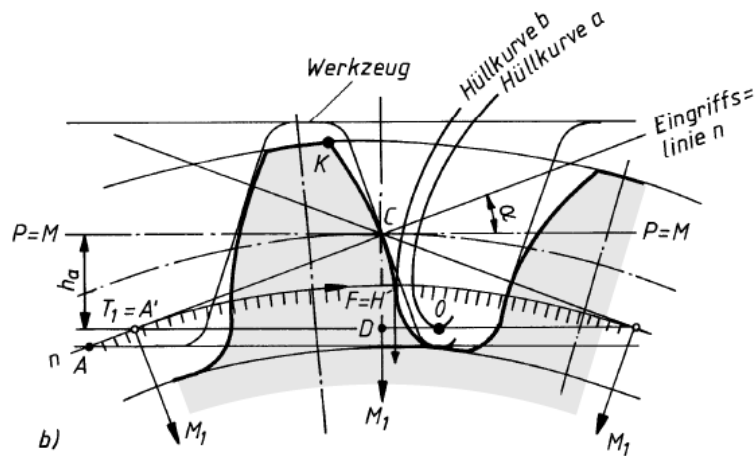
$$z_{\min} = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$$

Avec  $\alpha = 20^\circ$ :  $z_{\min} = 17.1$

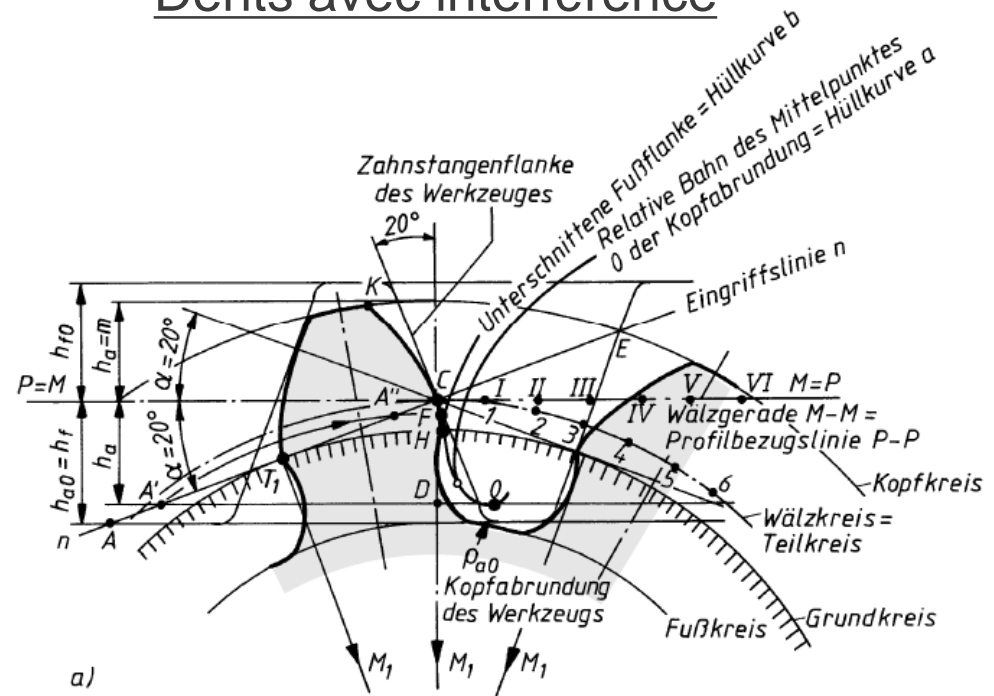
Avec  $\alpha = 15^\circ$ :  $z_{\min} = 30$

L'interférence au taillage est à éviter puisqu'elle affaiblit les dents:

#### Dents sans interférence



#### Dents avec interférence



D. Muhs., Roloff / Matek Maschinenelemente, Vieweg, Wiesbaden 2007

- Condition 1:** les profils de dents doivent être conjugués afin de produire un mouvement homocinétique.
- Condition 2 :** les dentures doivent avoir le même pas et donc le même module.
- Condition 3 :** l'arc d'engrènement doit être supérieur au pas pour assurer la continuité de l'engrènement.
- Condition 4:** les profils doivent être tels qu'il n'y ait pas d'interférence, c'est à dire que le contact entre dents doit toujours s'effectuer tangentiellement et que les profils ne doivent pas pénétrer l'un dans l'autre.

L'engrenage menant est soumis à un couple et entraîne l'engrenage mené, via une force de contact

Cette force de contact sollicite les dents et les paliers des engrenages.

Sollicitation des dents:

- En flexion
- En pression

Sollicitation des paliers:

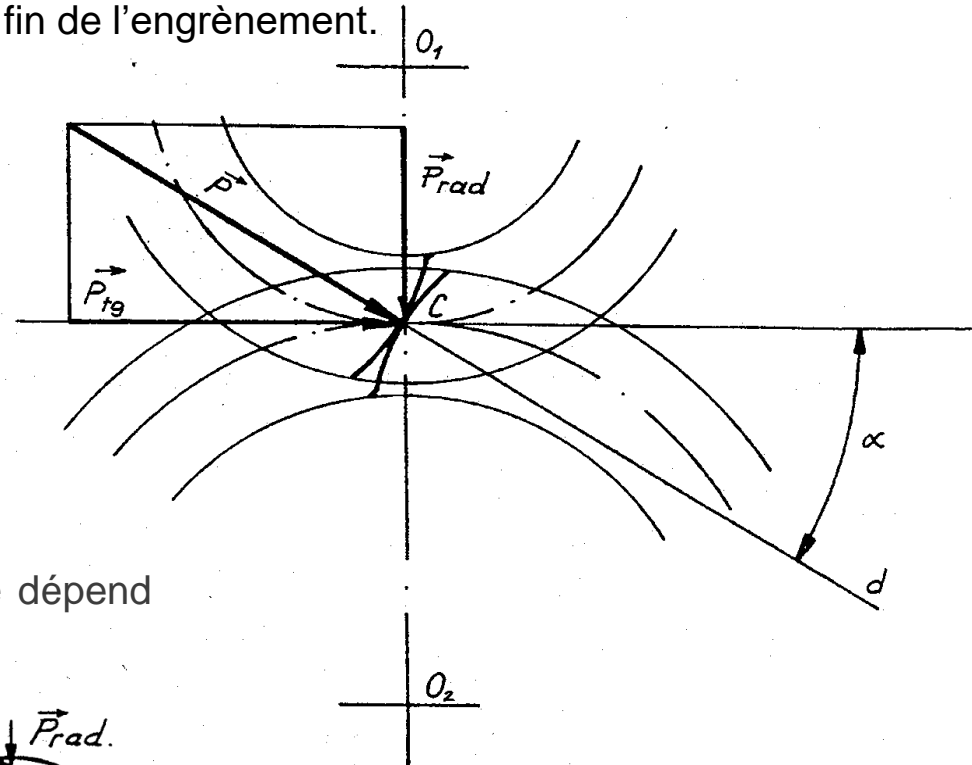
- Charge radiale
- Charge tangentielle
- (Charge axiale si engrenages hélicoïdales)

La roue menante est soumise au couple  $M_1 = P_{tg} \frac{d_1}{2}$

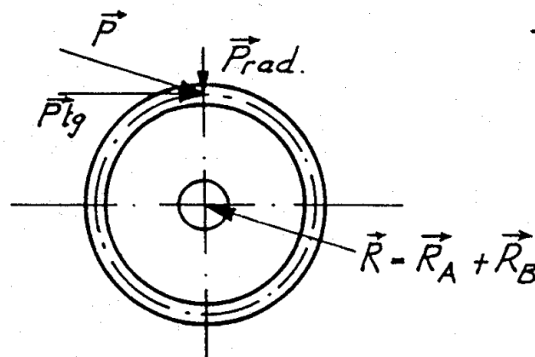
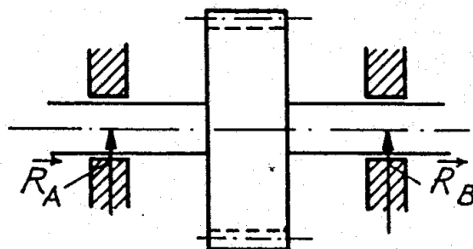
La roue menée a donc comme couple  $M_2 = i M_1 = M_1 \frac{d_2}{d_1}$  (pour un rendement de 100%)

La force  $P$  transmettant le couple est inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à la normale à la ligne des centres. L'angle  $\alpha$  reste invariable du début à la fin de l'engrènement.

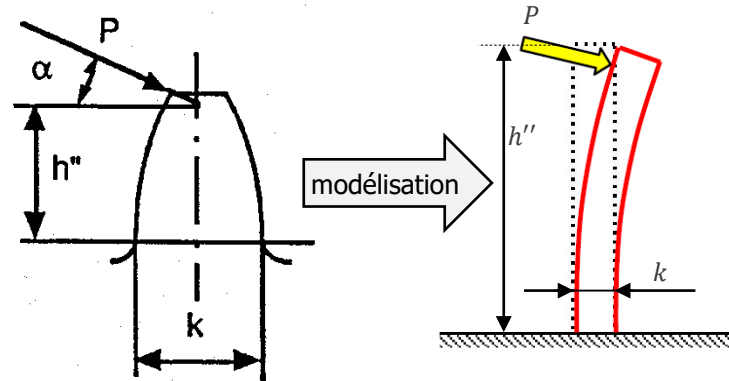
- Force tangentielle:  $P_{tg} = P \cos \alpha$
- Force radiale:  $P_{rad} = P \sin \alpha$



L'action sur les paliers supportant l'engrenage dépend directement de  $P_{tg}$  et  $P_{rad}$ .



On modélise la dent comme une poutre encastrée qui travaille en flexion.



Hypothèses:

- un seul couple de dents supporte toute la charge;
- on ne tient compte que de la flexion (la charge radiale de compression ainsi que le cisaillement sont négligés);
- on considère que la force tangentielle  $P_{tg} = P \cos \alpha$  agit sur le cercle primitif ( $M = P_{tg} \frac{d}{2}$ ), d'où  $P_{tg} = \frac{2M}{d}$ ,  $M$  étant le couple et  $d$  le diamètre primitif;
- $P$  est appliquée à la hauteur  $h'' = 2,1 \cdot m$  (rappel: la hauteur totale de la dent est  $h = 2,25 \cdot m$ ).

Calcul de la contrainte maximale de flexion  $\sigma_{max}$  :

$$\sigma_{max} = \frac{\frac{k}{2} P_{tg} h''}{I} = \frac{6 P_{tg} h''}{k^2 b}$$

Avec

$I = \frac{b k^3}{12}$ , le moment d'inertie surfacique de la poutre.

$k$  la largeur de la dent en fonction du module:  $k = \frac{p}{2}$ .

$$\Rightarrow \sigma_{max} = \frac{100,8 M}{\pi^2 m^3 z \Psi}$$

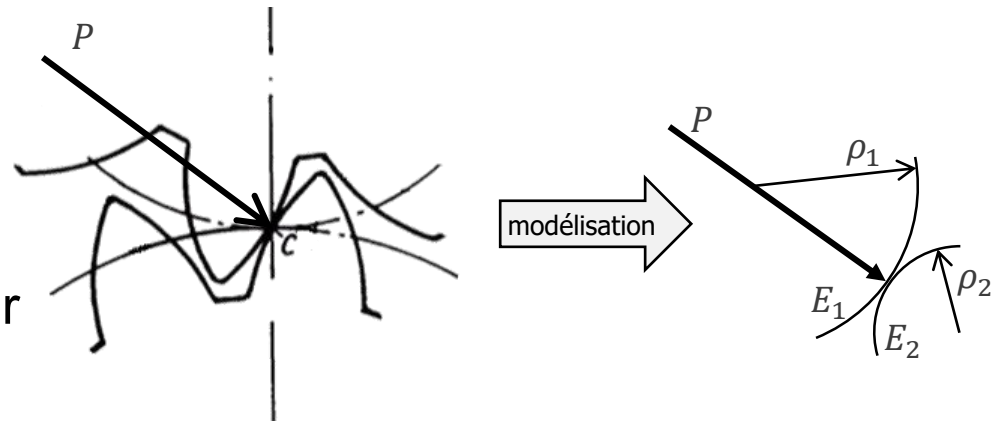
Avec  $\Psi = \frac{b}{m}$ , avec  $b$  l'épaisseur de l'engrenage

On cherche le module minimal admissible  $m_{min}$  en fonction de la contrainte admissible  $\sigma_{adm}$ :

$$m \geq m_{min} = 2,17 \cdot \sqrt[3]{\frac{M}{\sigma_{adm} z \Psi}}$$



- Modélisation des dents comme deux cylindres en contact. Ceci permet d'utiliser la théorie de Hertz
- Théorie de Hertz: permet d'étudier le contact entre deux sphères ou cylindres



$$\sigma_H = 1.18 \sqrt{\frac{M_1 E}{b m^2 z_1^2}} \sqrt{\frac{1}{\sin(2\alpha)}} \sqrt{\frac{i+1}{i}}$$

Estimation pessimiste du module nécessaire pour résister en pression hertzienne:

$$m \geq m_{min} = 1,12 \sqrt[3]{\frac{M_1 E}{\Psi z_1^2 p_{adm}^2 \sin(2\alpha)} \frac{i+1}{i}}$$

Avec:

$M_1$  = le moment appliqué au pignon

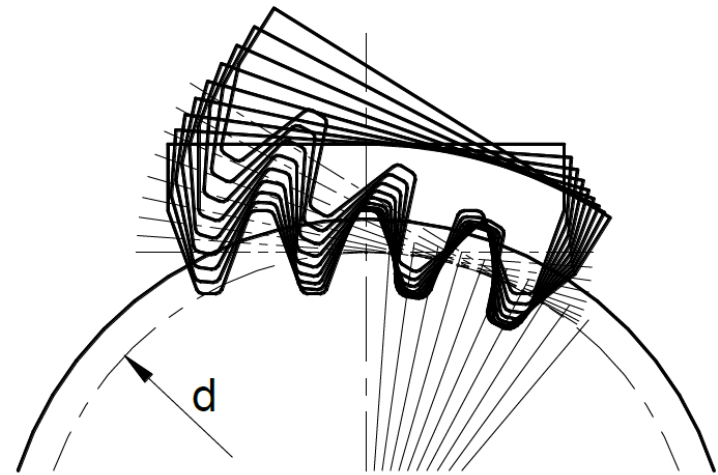
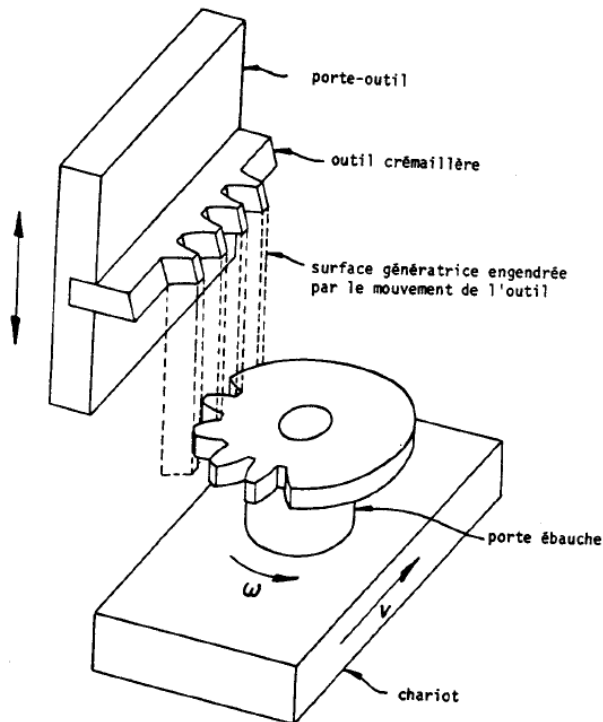
$\Psi = \frac{b}{m}$ , où  $b$  = l'épaisseur de l'engrenage

$p_{adm}$  = la contrainte de compression maximale admissible

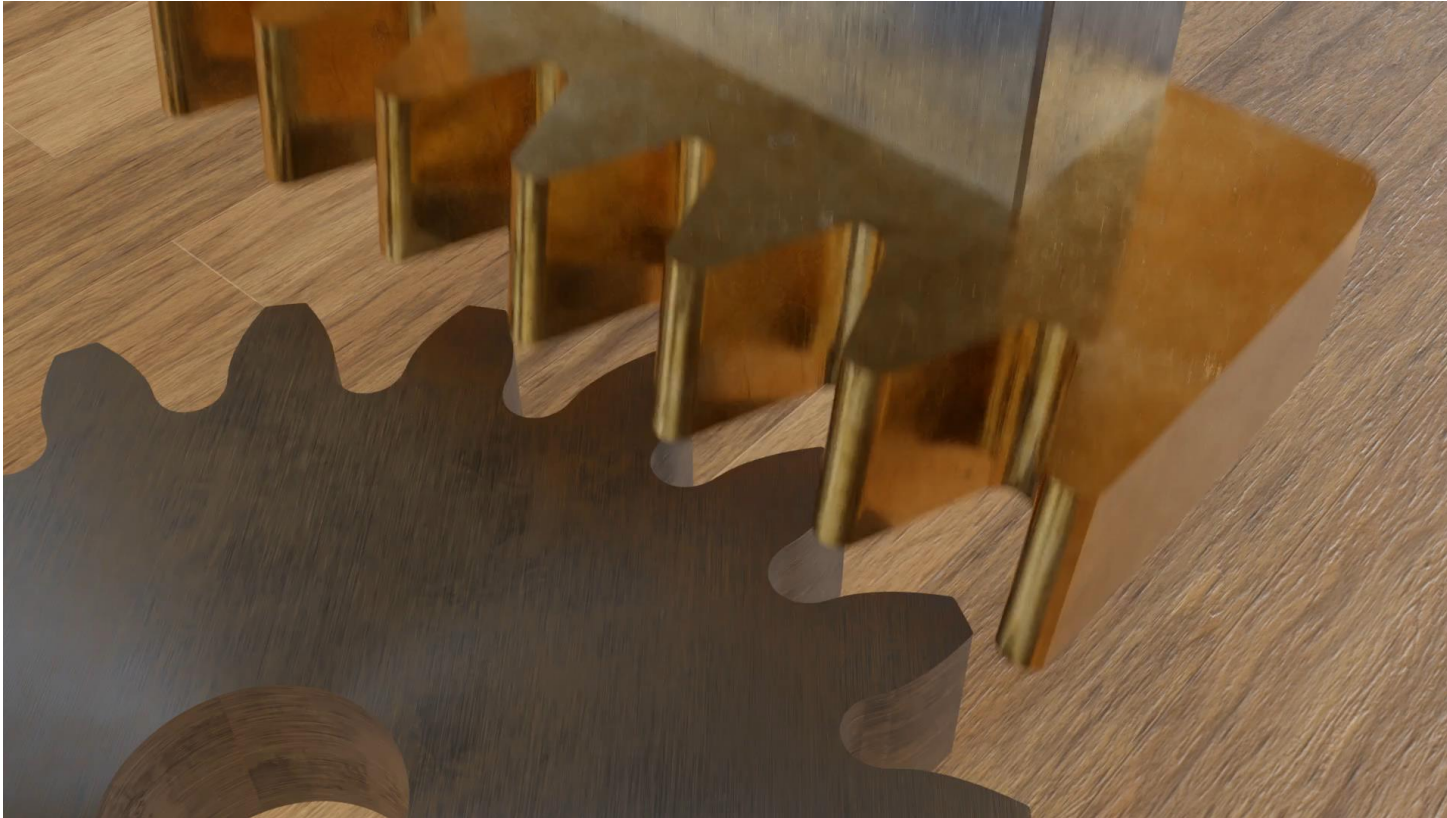
$E = \frac{2(E_1 E_2)}{E_1 + E_2}$ , le module de Young résultant

## Taillage par generation:

- crée une développante
- Avec un outil coupant avec un profil de crémaillère
- $z_{min}$  limité à 17 dents ( $\alpha = 20^\circ$ )



Taillage par generation:



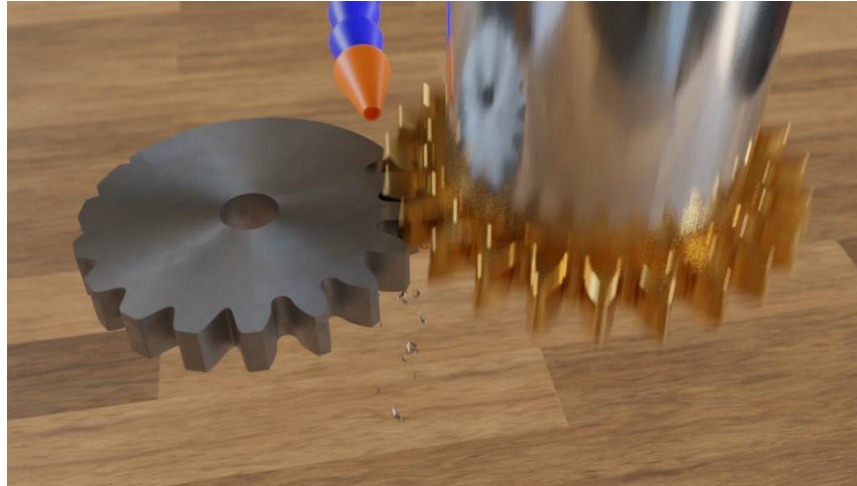
Source: <https://www.tec-science.com>

Taillage par outil pignon (procédé Fellows):

- crée une développante
- Comme la génération, mais avec outil pignon plutôt que crémaillère
- $z_{min}$  limité à 13 dents ( $\alpha = 20^\circ$ )
- Permet d'usiner des dentures intérieures



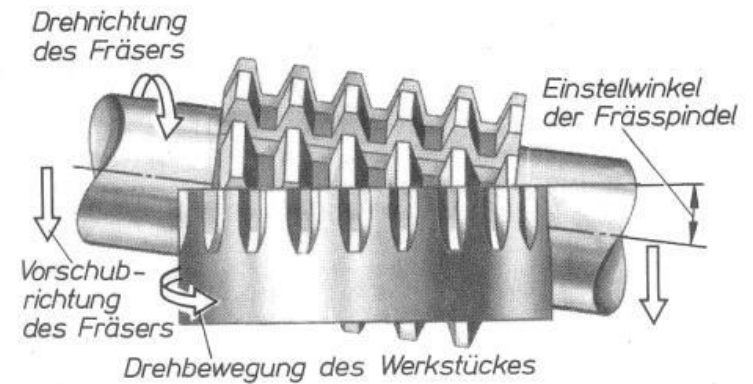
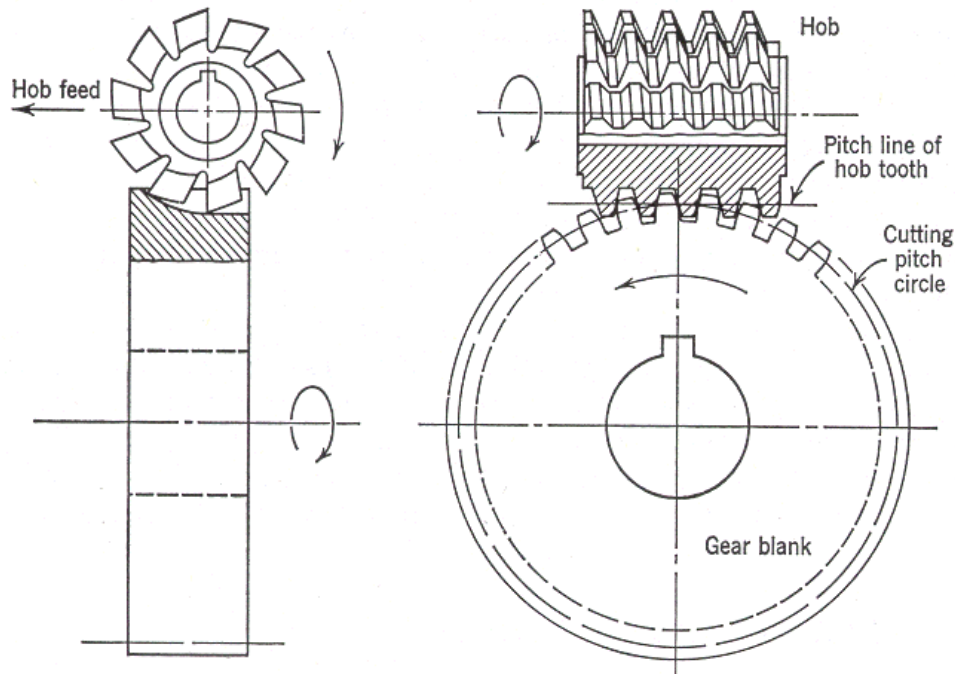
## Taillage par outil pignon (procédé Fellows):



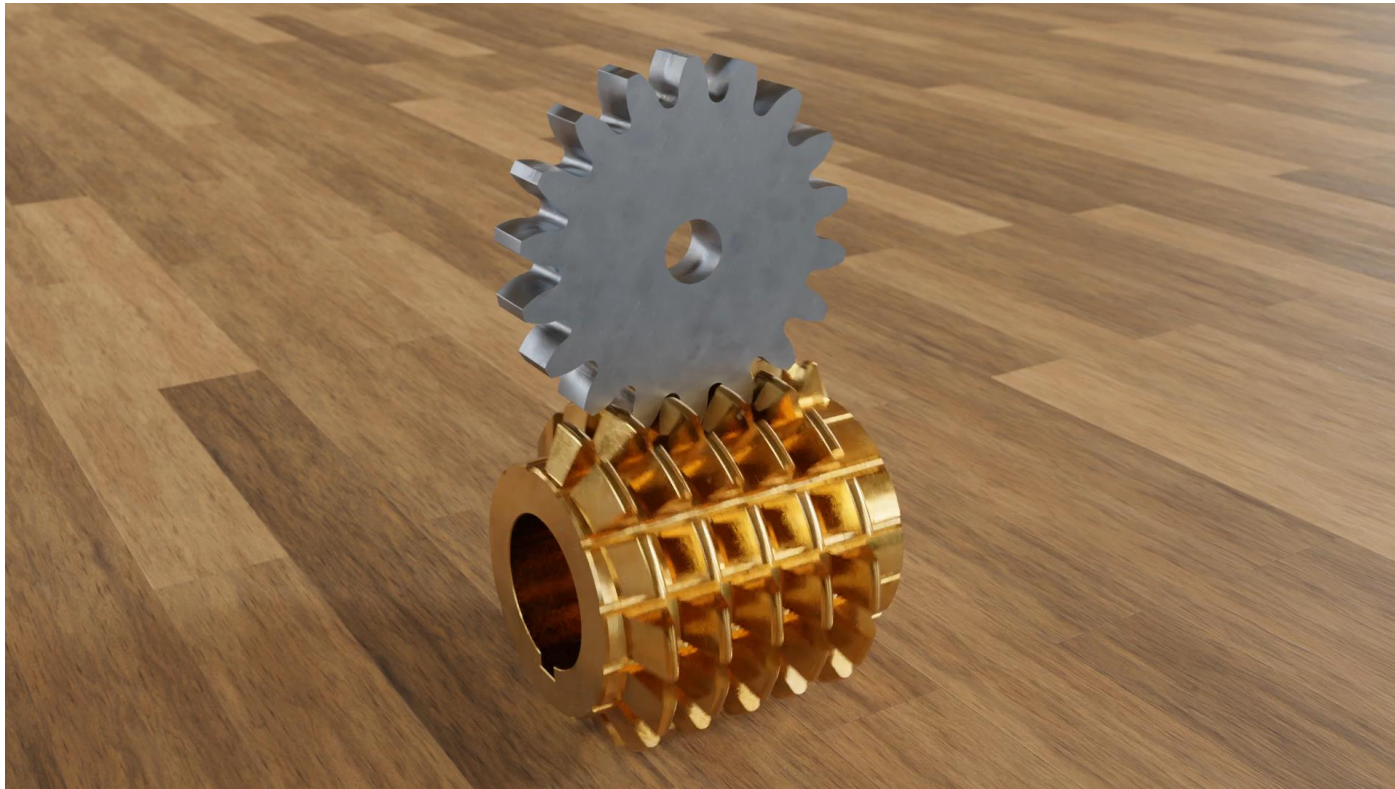
Source: <https://www.tec-science.com>



## Taillage par fraise-mère: crée une développante

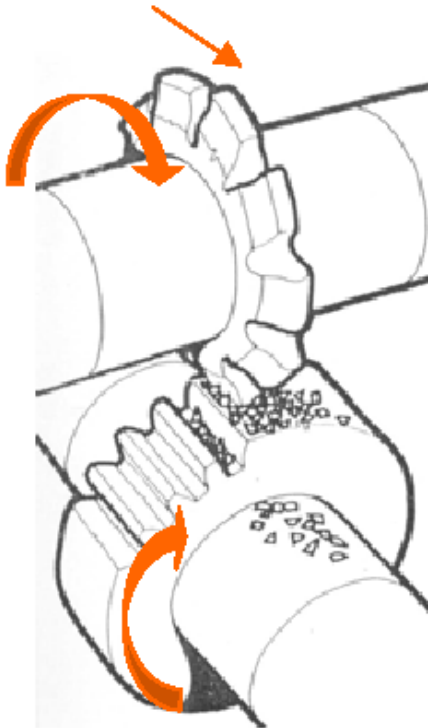


Taillage par fraise-mère:



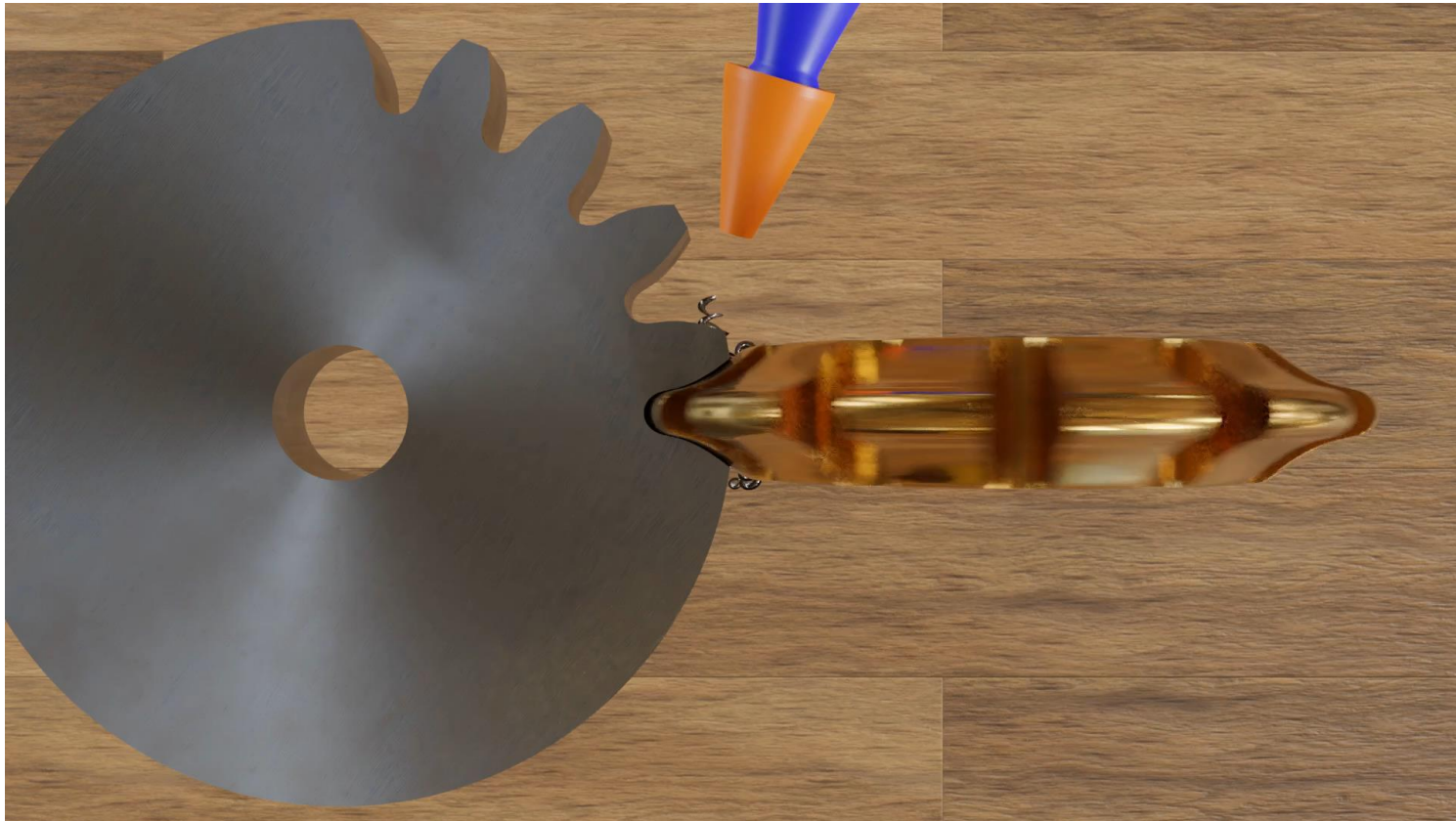
Source: <https://www.tec-science.com>

Taillage par fraise de forme (fraise module): réalise n'importe quel profil

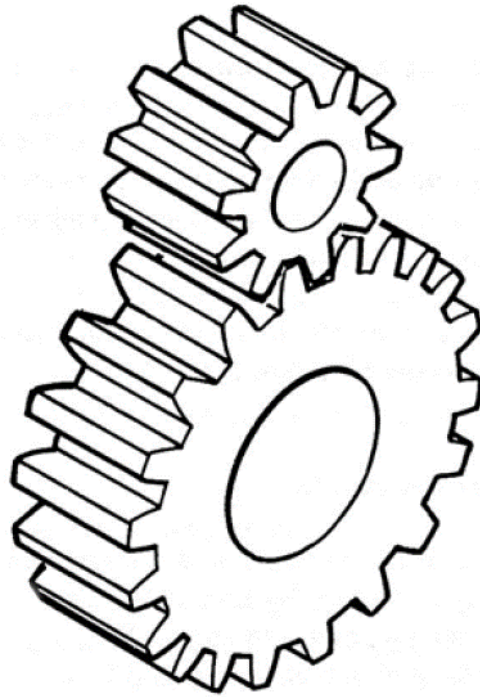


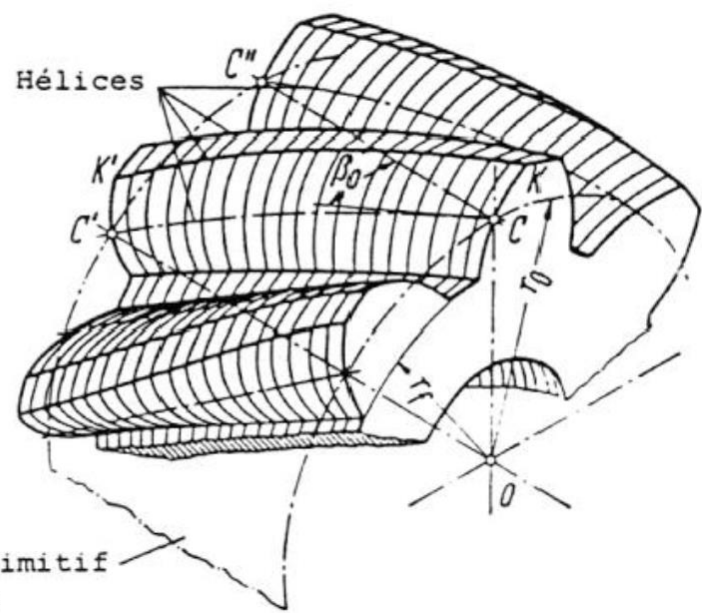
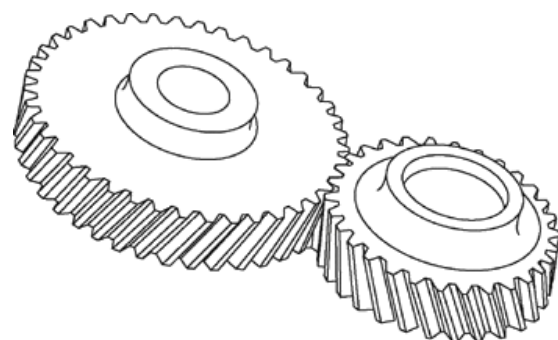


Taillage par fraise de forme (fraise module):

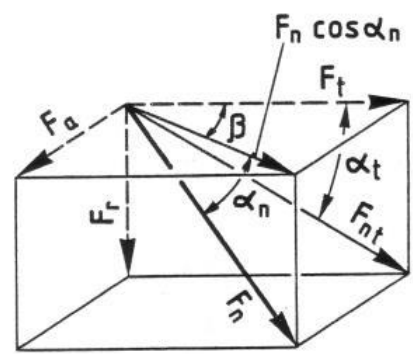
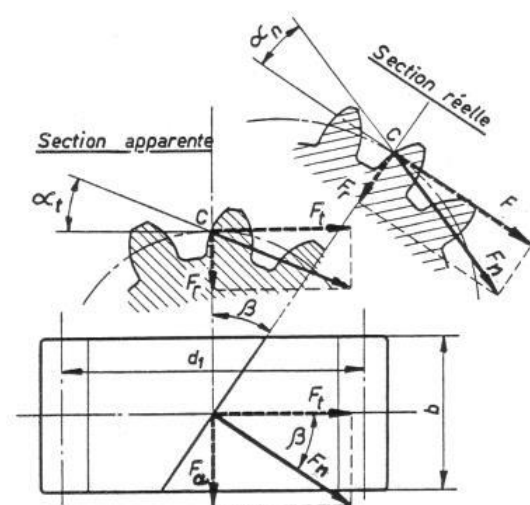
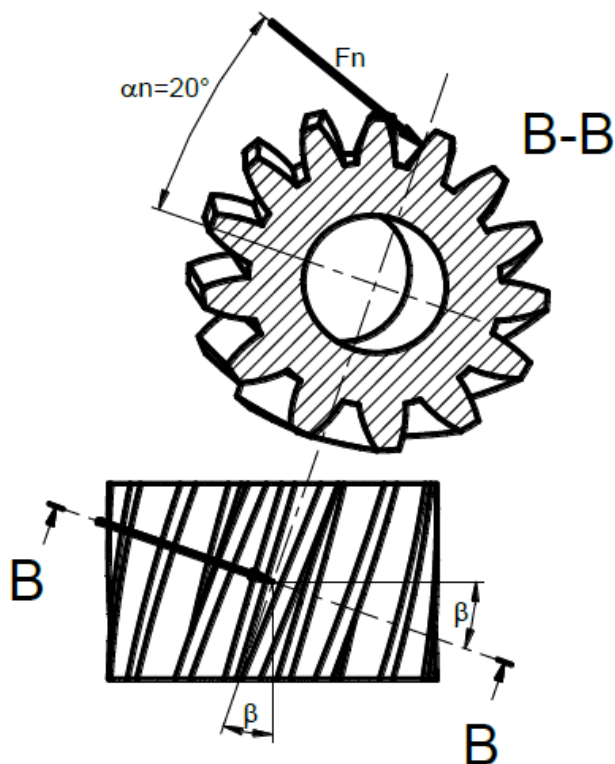


# Sélection de thèmes plus avancés

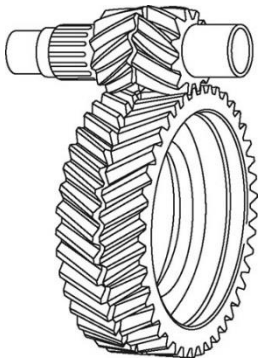
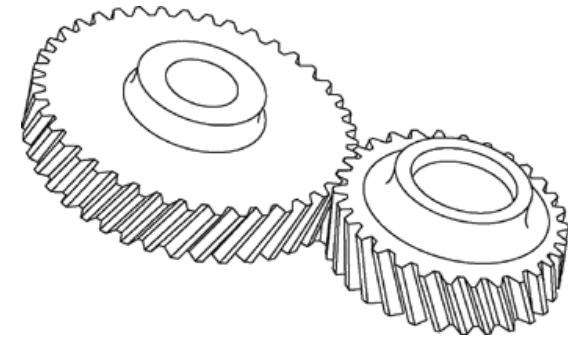




Cylindre primitif de taillage



- Avantages:
  - Rapport de conduite plus élevé
    - Plus silencieux
    - Meilleure continuité d'engrènement
    - Supporte des couples plus élevés
  - Permet la transmission entre deux arbres gauches
  - Limite les risques d'interférences, le nombre de dents minimal peut être réduit
- Désavantages
  - Engendre une force axiale
    - Possibilité de compenser la force axiale par des doubles chevrons (logo Citroën)
  - A nombre de dents et module égaux l'entraxe est plus grande
  - Difficulté d'usinage plus élevée par rapport à la denture droite

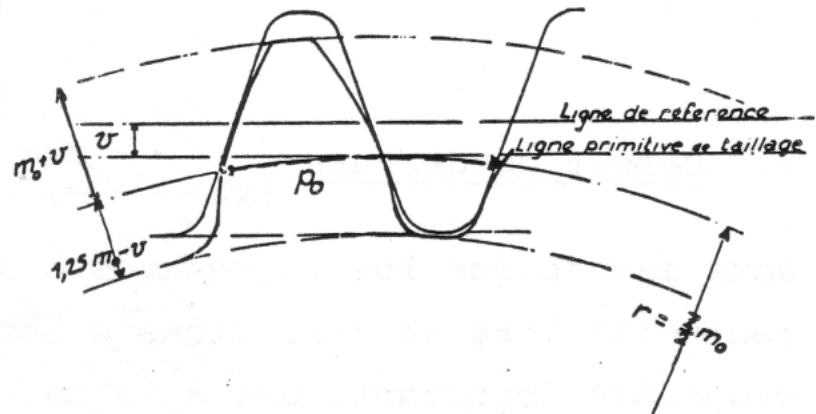
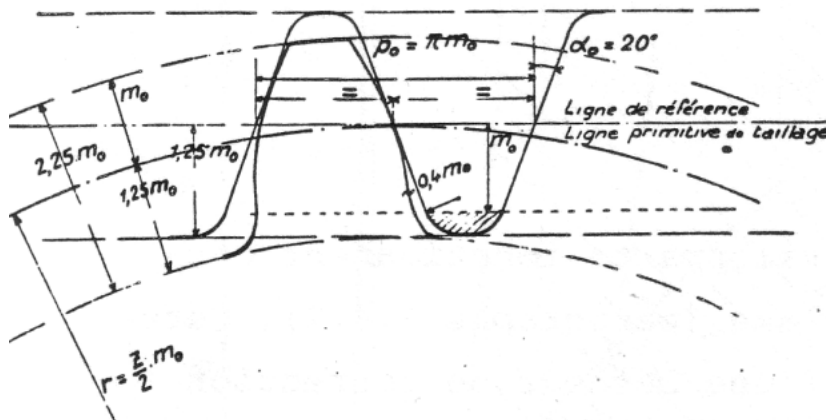


Engrenage sans déport de denture (standard) :

On "roule" la ligne de référence de l'outil de taillage (crémaillère) autour du diamètre primitif de l'engrenage (cercle primitif de taillage).

Engrenage avec déport:

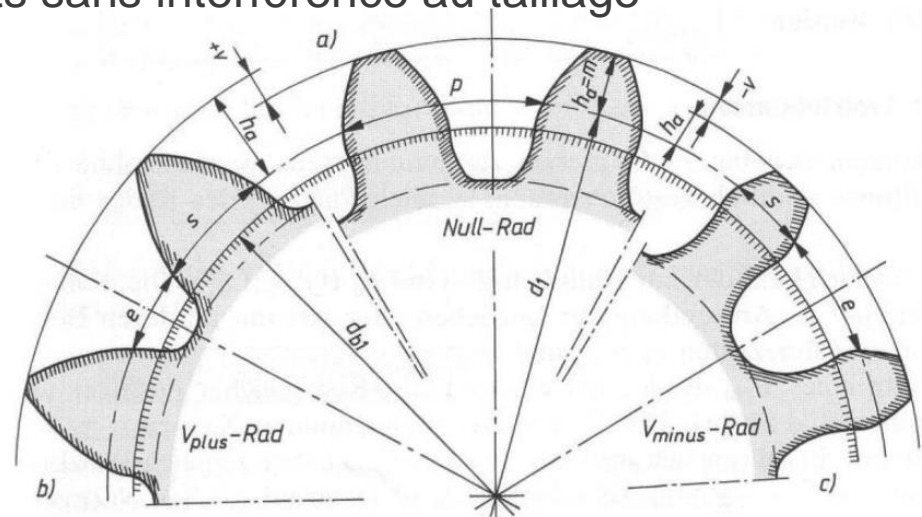
On décale la ligne de référence de l'outil de taillage et en roulant cette ligne de référence décalée autour du cercle primitif de taillage.



Déport positif: tend à renforcer le pied de la dent (et affaiblir le sommet)  
Déport négatif: tend à affaiblir le pied de la dent et peut provoquer une interférence de taillage

### Utilités:

- adapter l'entraxe à une distance fixée
- augmenter la résistance à la flexion des dents (augmentation des efforts transmissibles)
- réaliser des pignons avec  $z < 17$  dents sans interférence au taillage



Zone a)

sans déport de denture (denture V-zéro ou "standard")

Zone b)

avec déport de denture positif (denture V-plus)

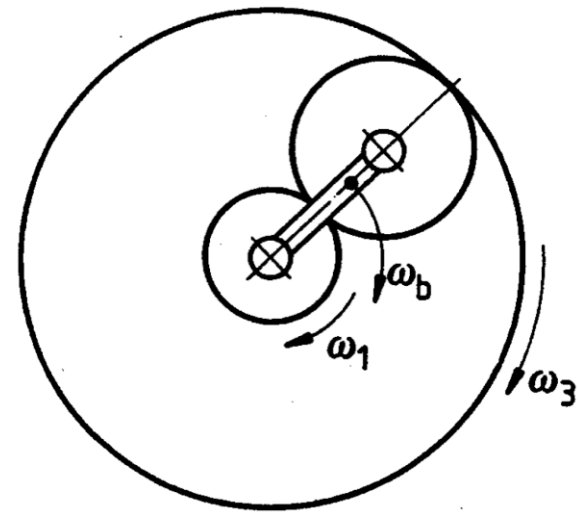
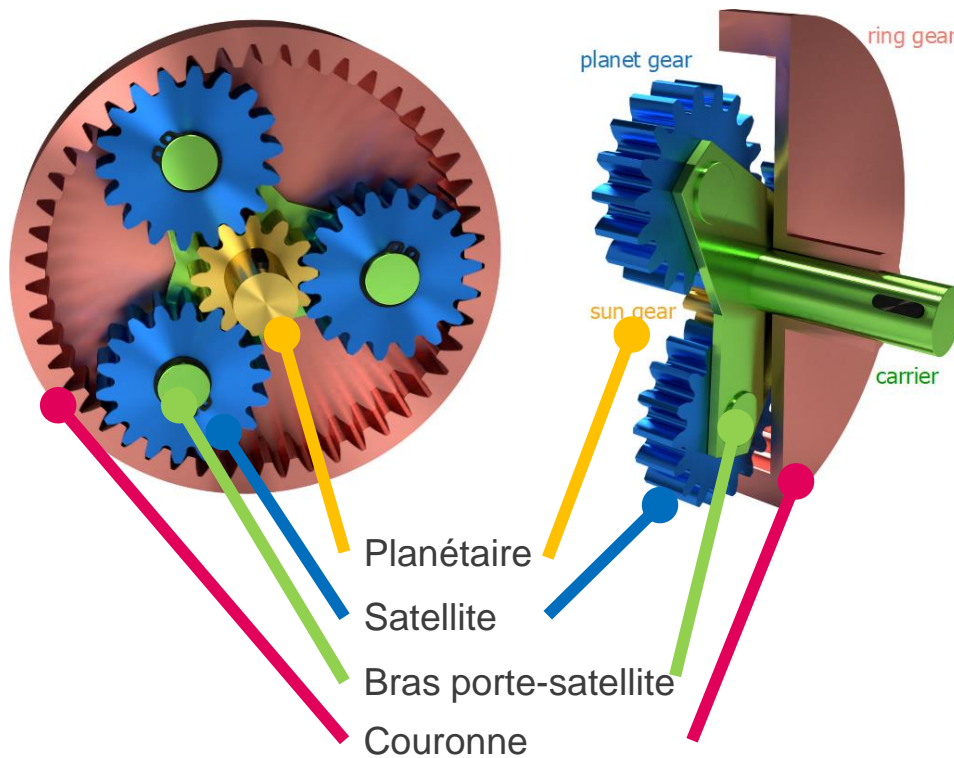
Zone c)

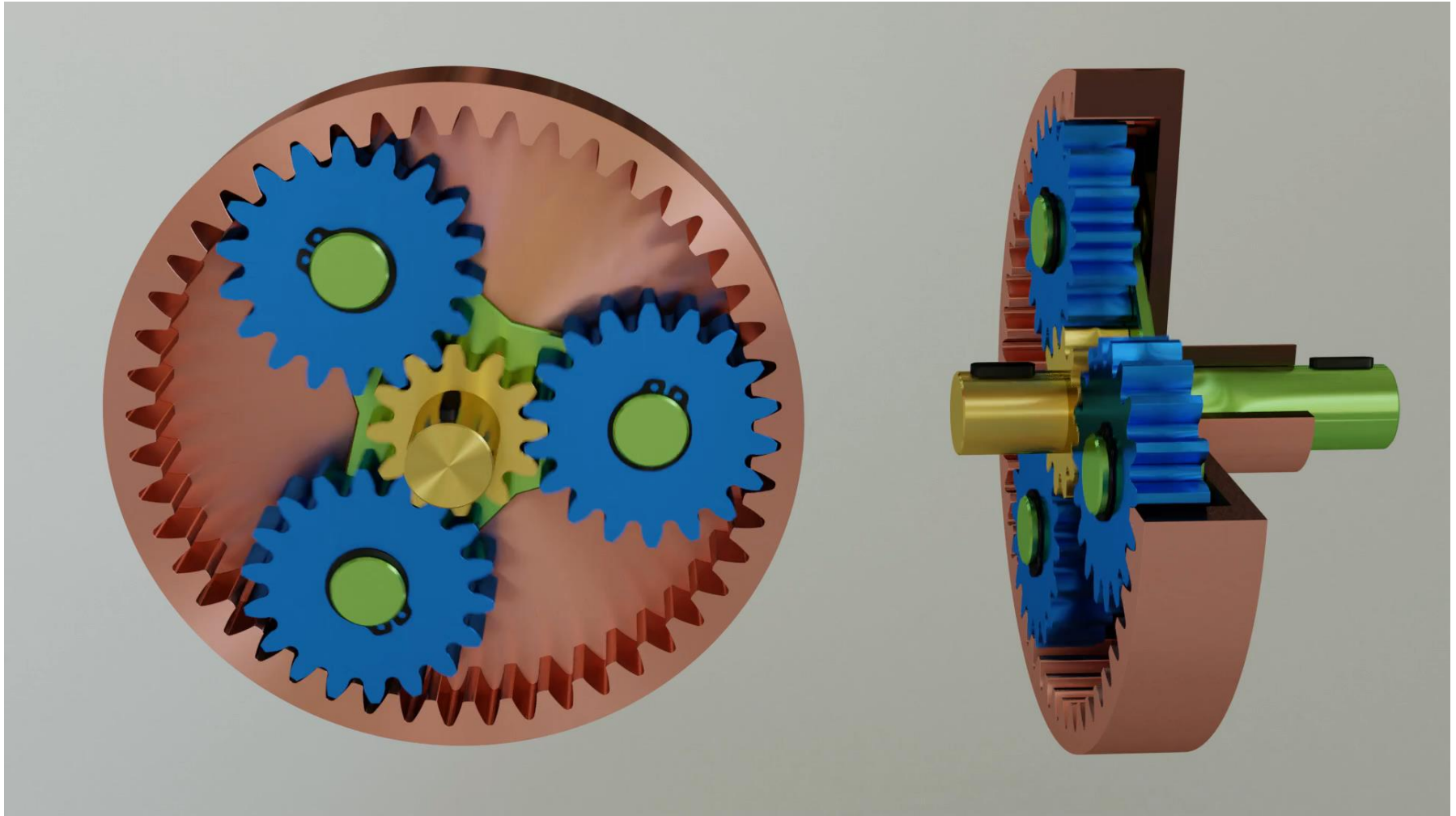
avec déport de denture négatif (denture V-moins)



Train ordinaire: ensemble d'engrenages où les axes de rotation restent fixe

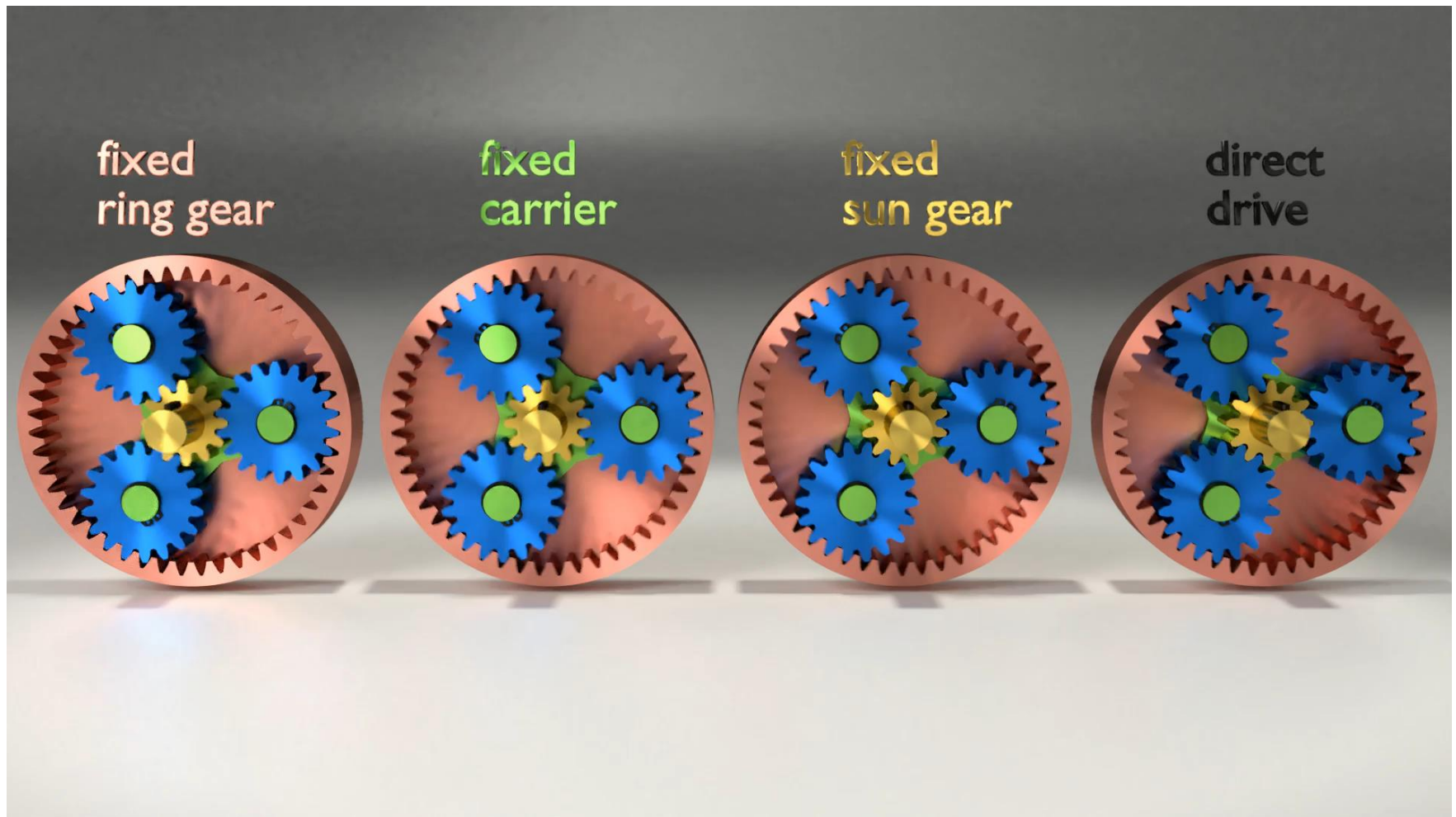
Train épicycloïdal: certains engrenages tournent autour d'axes mobiles





Source: <https://www.tec-science.com>





Source: <https://www.tec-science.com>