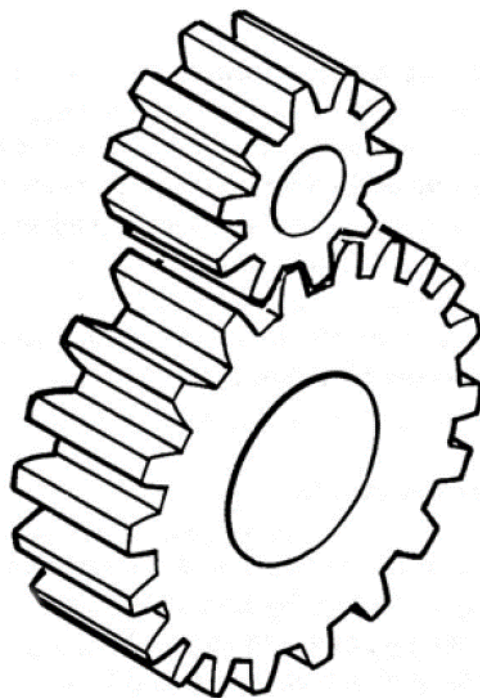


Introduction à la théorie des **engrenages**



Prof. Simon Henein

Billy Nussbaumer

Patrick Flückiger

Décembre 2023

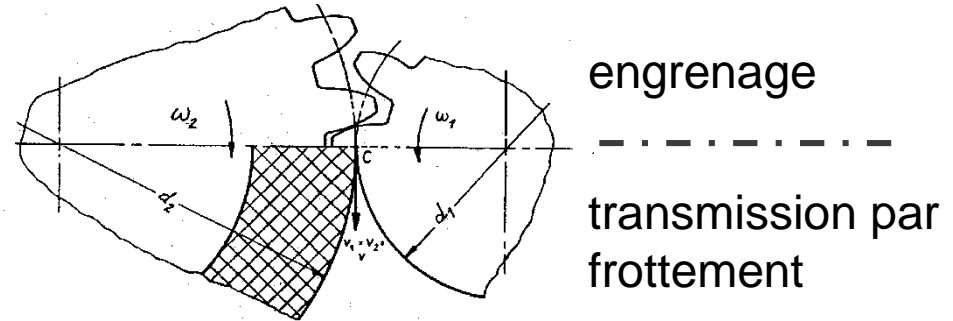
De nombreuses illustrations sont tirées de: *Composants de la microtechnique*, R. Clavel, EPFL, 2010

1. Définition, types d'engrenages, applications
2. Explication intuitive de la denture en développante
3. Généralisation: la loi des engrenages
4. Exemple supplémentaire de profil: le profil cycloïdal

L'engrenage est un mécanisme élémentaire constitué de deux organes dentés, mobiles autour d'axes de position relative invariable et dont l'un entraîne l'autre par l'action de dents successivement en contact.

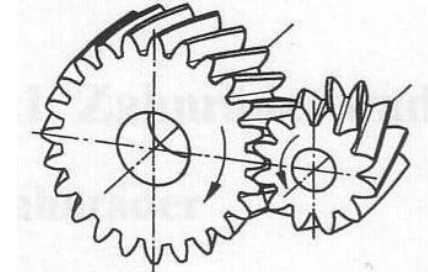
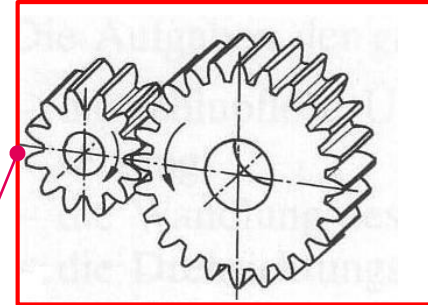
Les engrenages permettent:

- une transmission positive (par obstacle), donc sans glissement (cinématique synchrone), mais pas sans frottement (dissipation énergétique)
- De transmettre de la puissance avec une conversion de vitesse angulaire et de couple (ou force)
- Peut aussi servir de positionnement

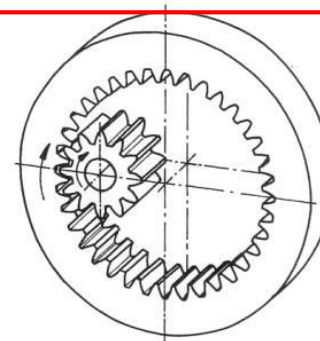
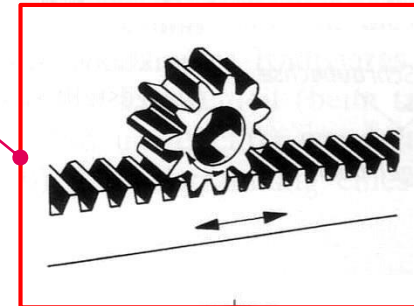


Axes parallèles:

- Denture droite:
- Denture hélicoïdale
- Pignon et crémaillère
- Pignon et couronne à denture intérieure

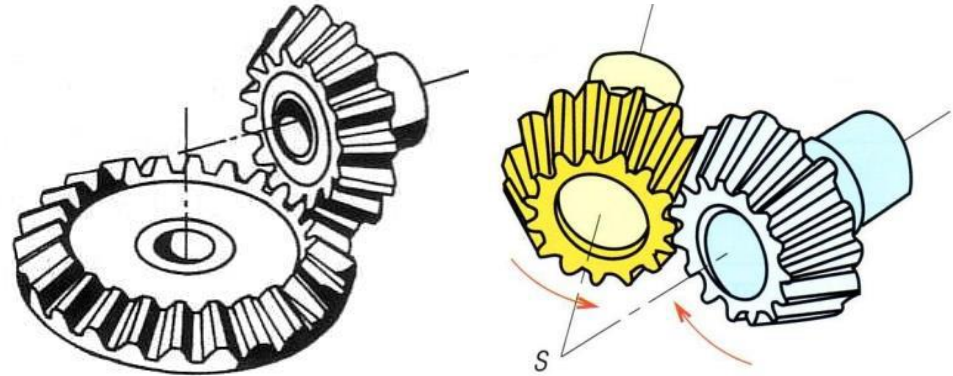


Traités dans ce cours

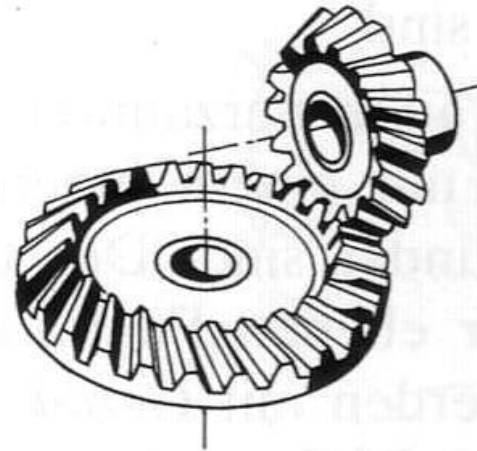


Axes concourants:

- Engrenages coniques à dentures droites

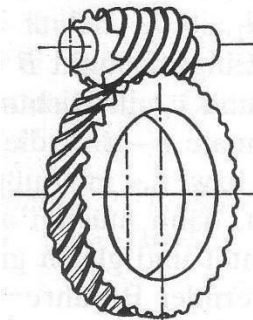
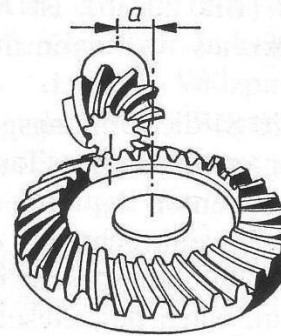
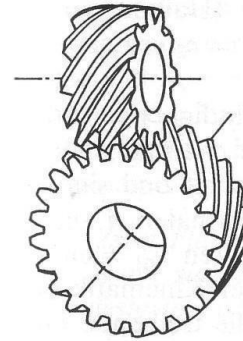


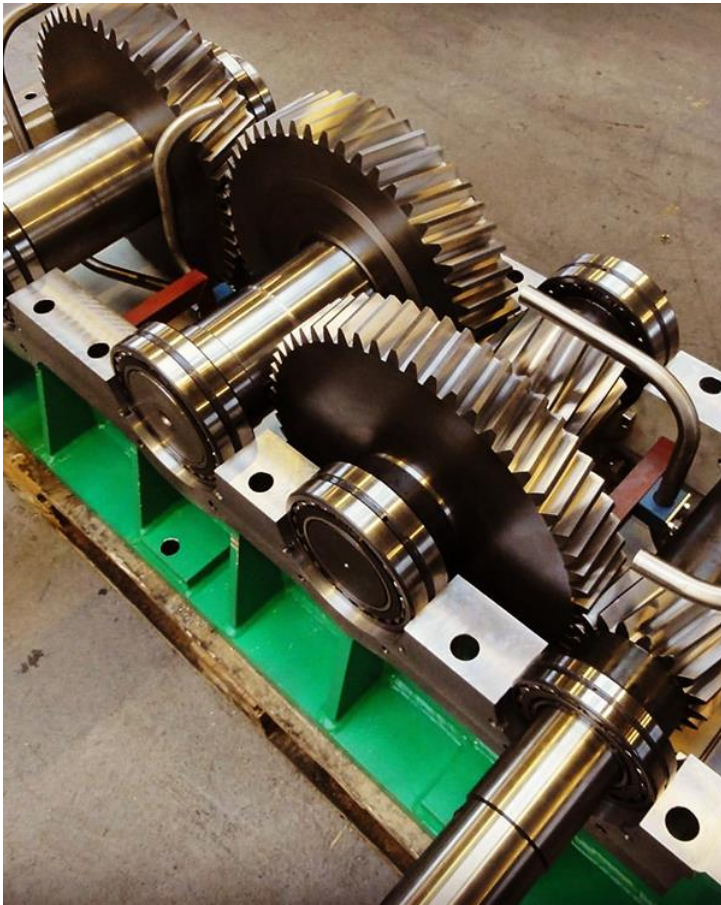
- Engrenages coniques à dentures hélicoïdales



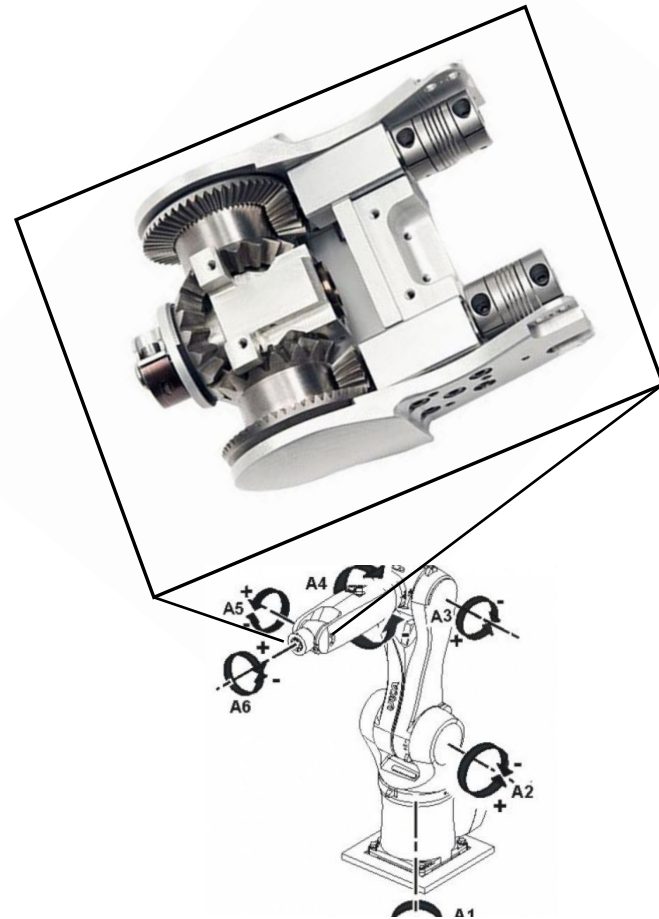
Axes gauches:

- Engrenages à dentures hélicoïdales
- Denture en hypoïde
- Vis sans fin et roue





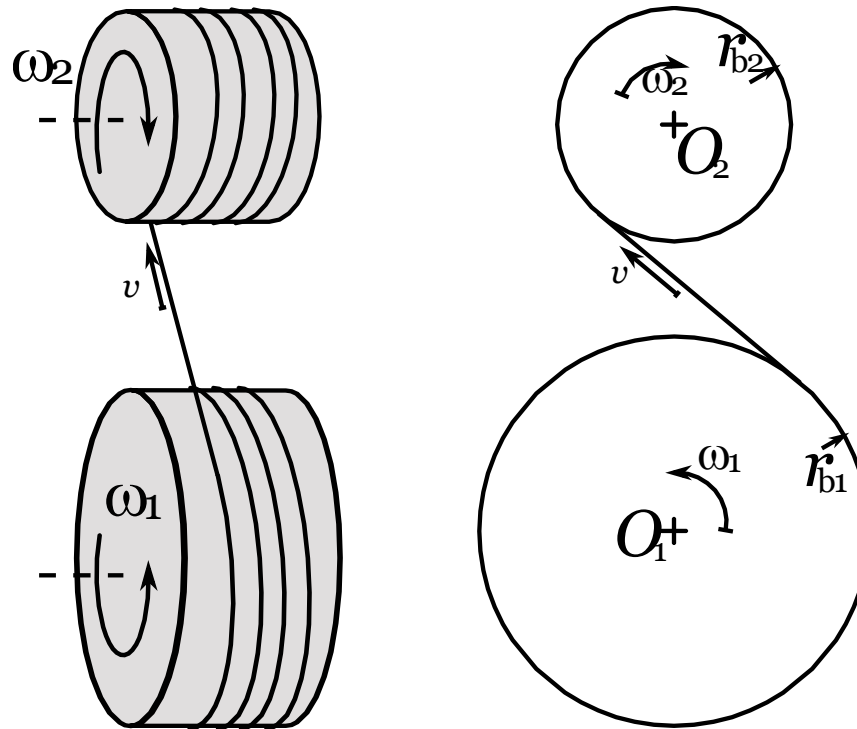
Transmission de puissance



Positionnement

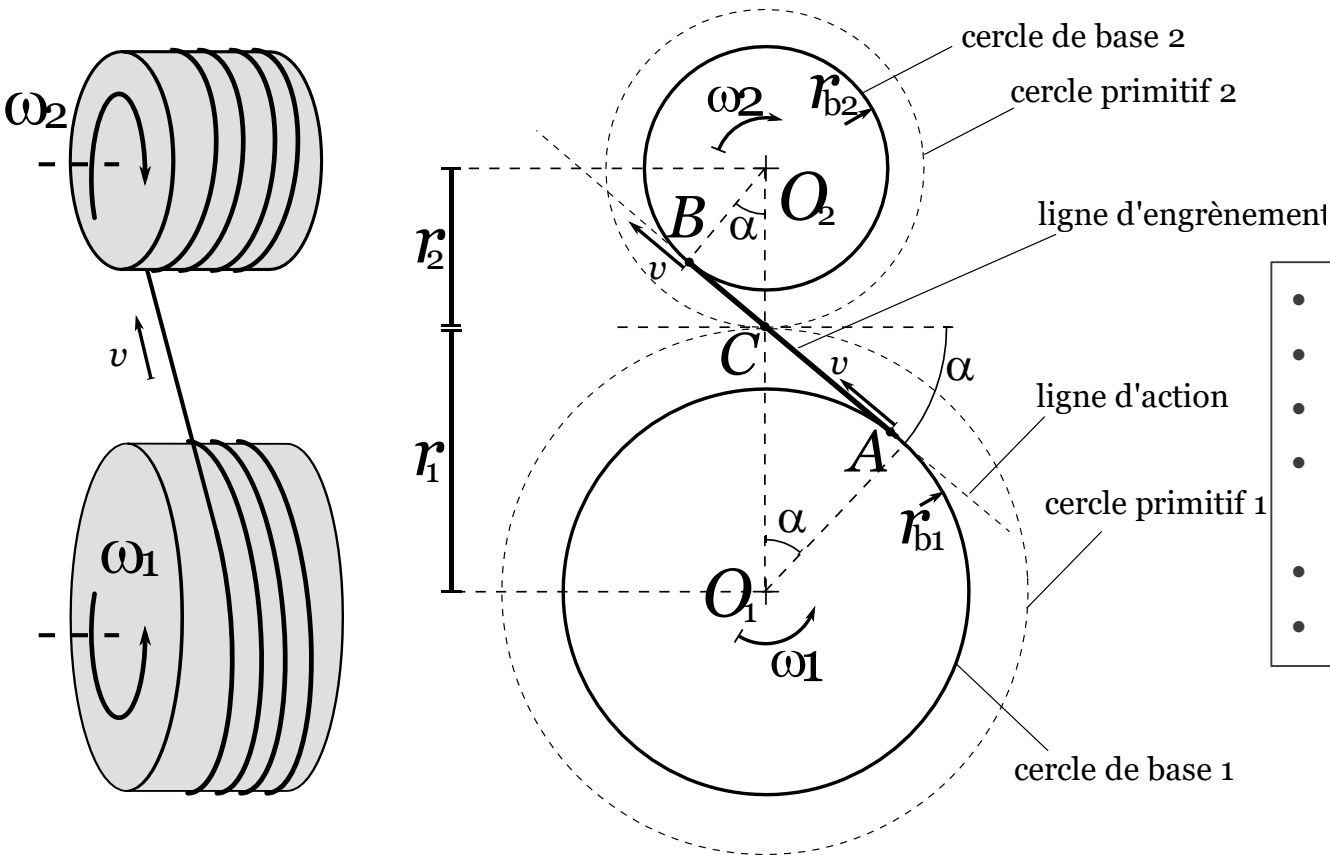
→ un rapport de transmission constant (=homocinétique) est critique!
Trouvons un profil de denture convenable

Mécanisme que l'on cherche à imiter avec des engrenages:
2 cylindres reliés par un câble enroulé



$$\text{Rapport de transmission} = i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}}$$

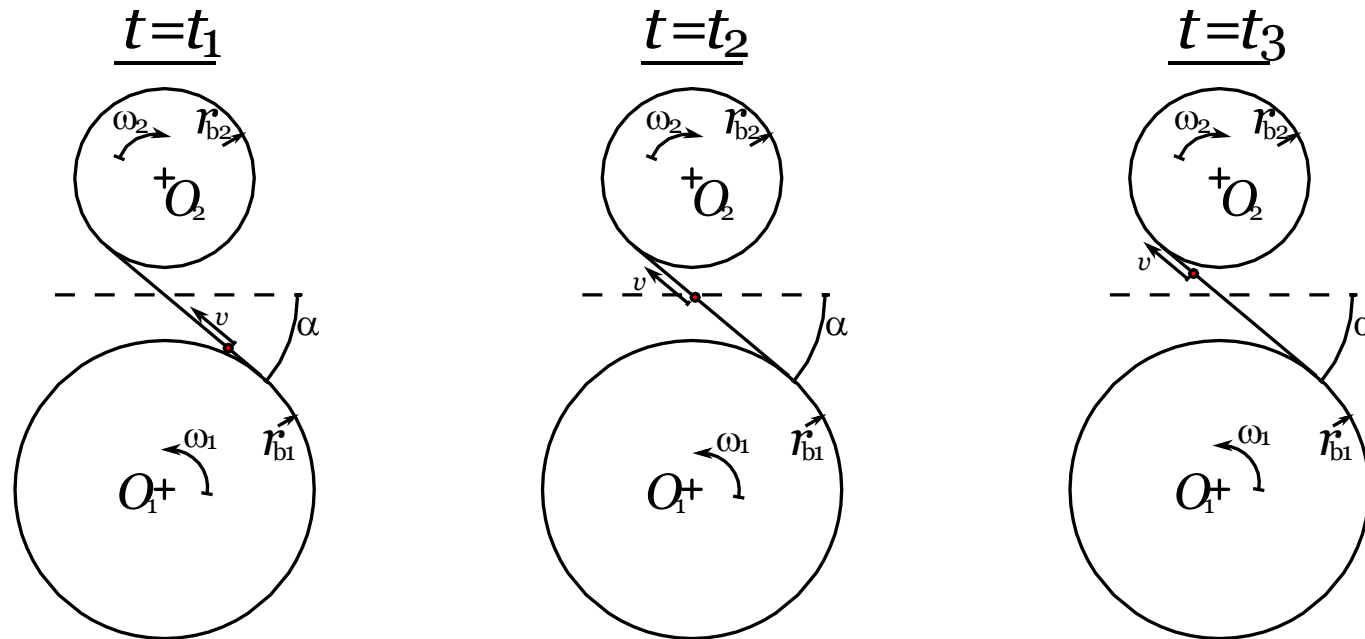
Mécanisme que l'on cherche à imiter avec des engrenages:
2 cylindres reliés par un câble enroulé



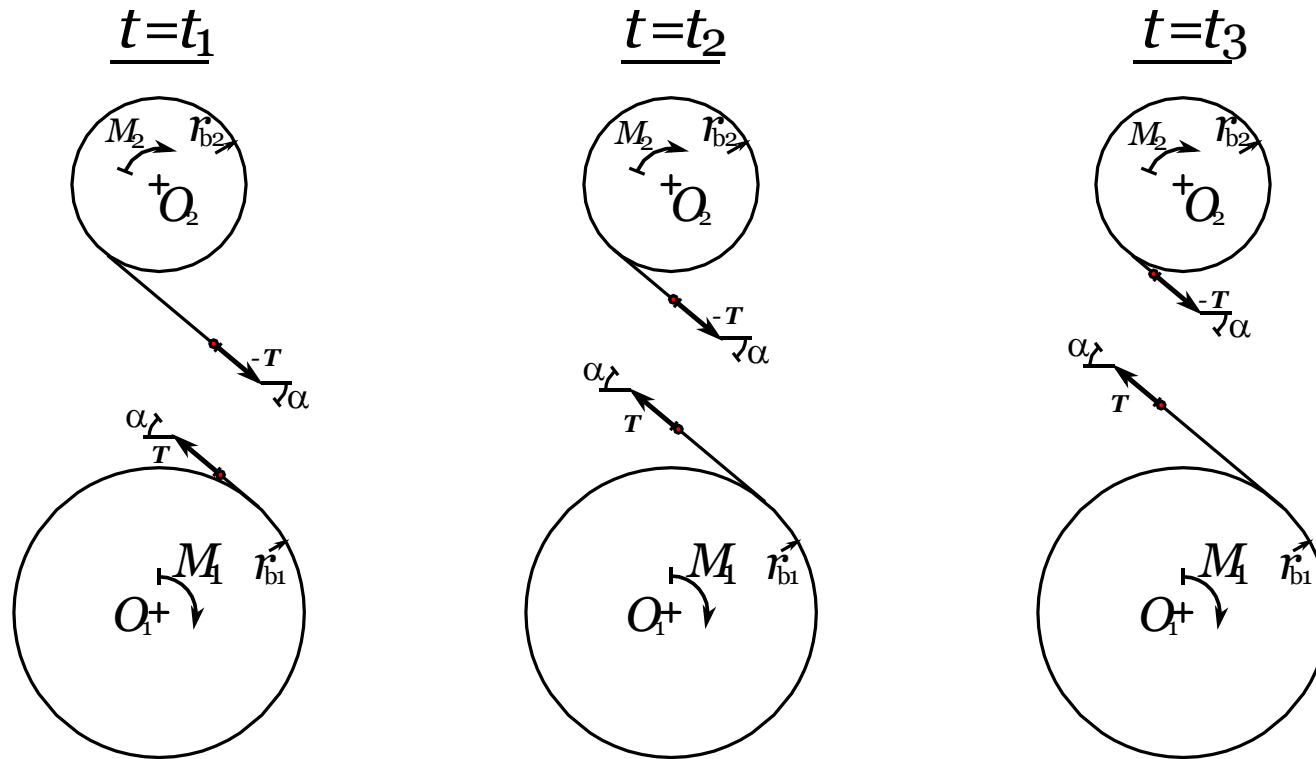
- r_{b1}, r_{b2} : rayons de base
- r_1, r_2 : rayons primitifs
- α : Angle de pression
- Segment AB : ligne d'engrènement
- Droite AB : ligne d'action
- C : Pôle

$$\text{Rapport de transmission} = i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} = \frac{r_2 \cos(\alpha)}{r_1 \cos(\alpha)} = \frac{r_2}{r_1}$$

Focalisons-nous sur un point du câble:



Décomposition en 2 sous-systèmes:



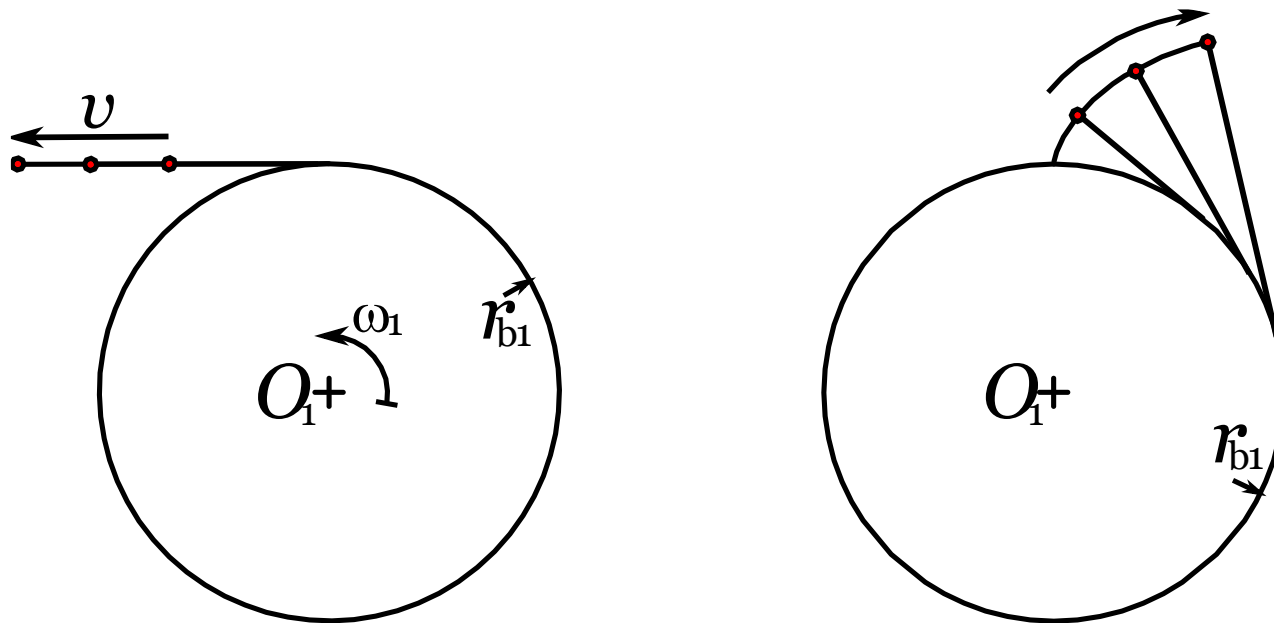
- Le point de contact suit une ligne droite
- Le point de contact 'avance' à vitesse constante
- La ligne d'action coïncident avec la ligne d'engrènement

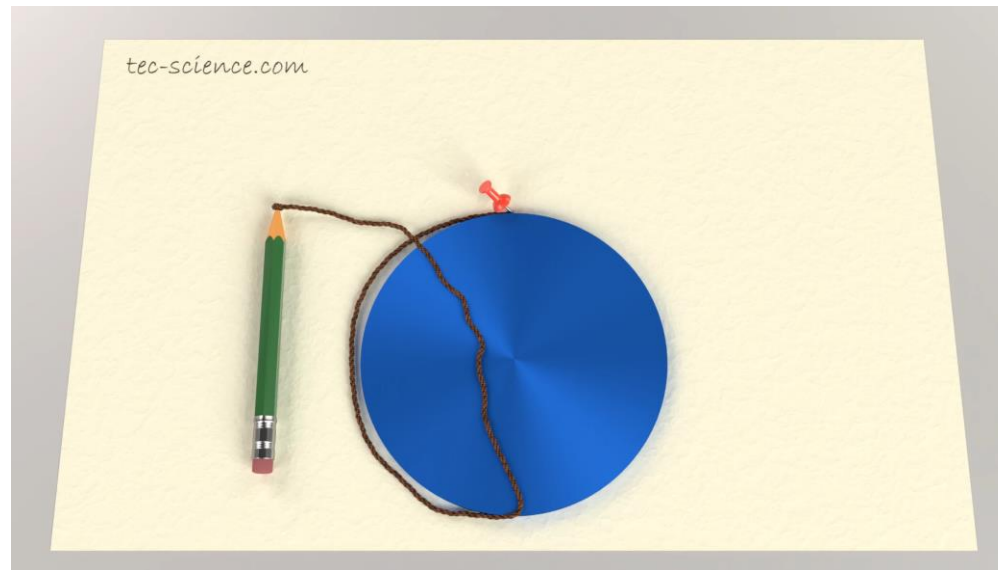
Trouvons un profil de dent avec un comportement identique:

- Point de contact qui suit une ligne droite
- Point de contact qui 'avance' à vitesse constante
- Ligne d'action coïncident avec la ligne d'engrènement

Analysons la trajectoire du point T dans le repère du cercle 1.

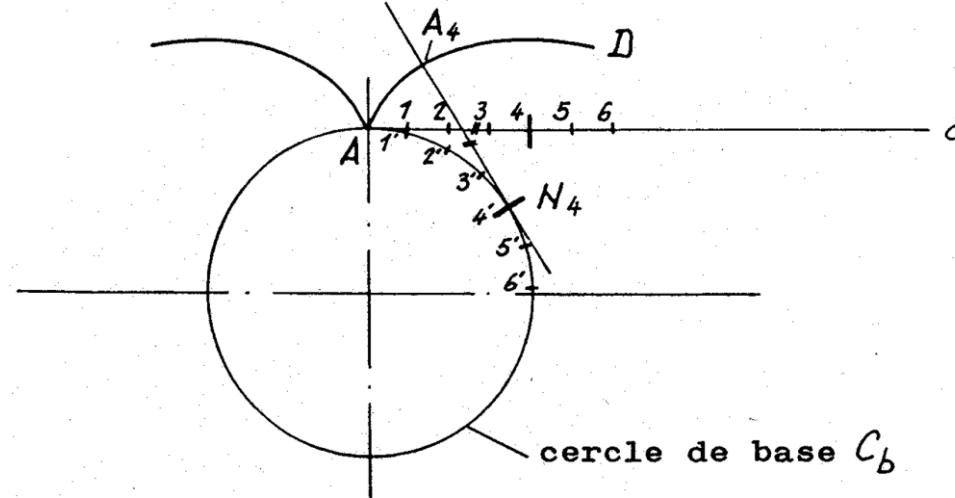
Par rapport au cercle 1, le câble se déroule et trace une **développante de cercle**





2. Explication intuitive du profil en développante

La développante de cercle est le lieu des points A lorsque la droite d (appelée droite génératrice) roule sans glisser sur le **cercle de base** C_b .

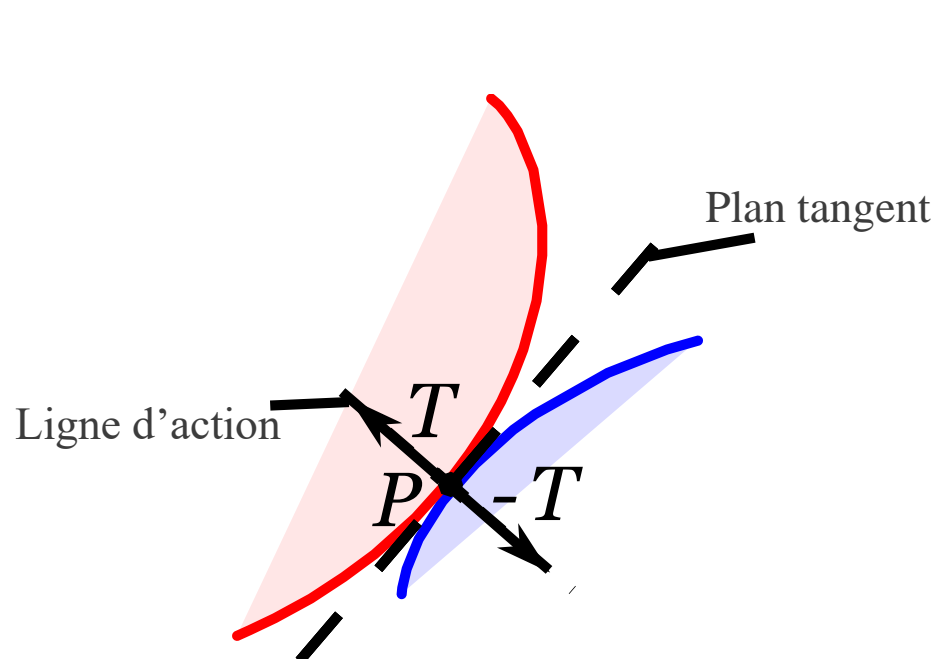


Propriétés d'une développante:

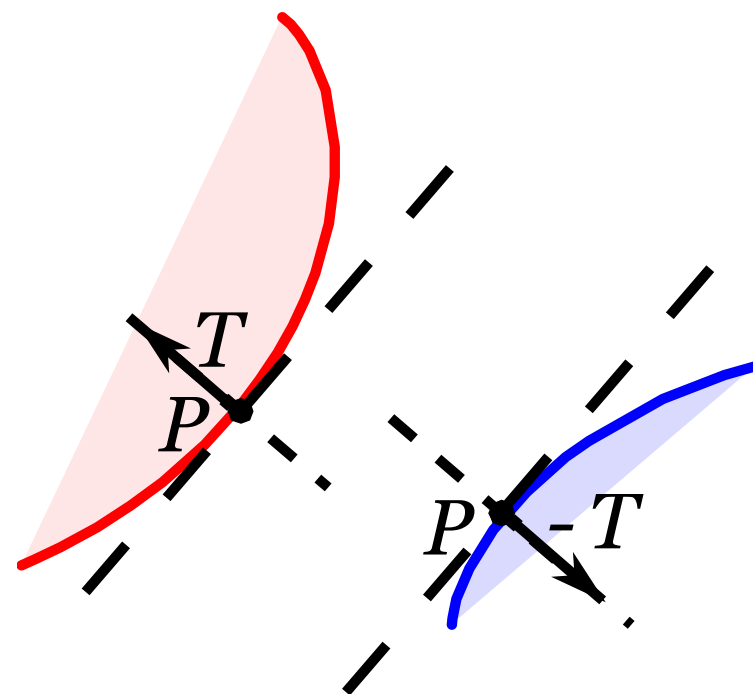
- $\overline{A_4 N_4} = \widehat{A N_4}$
- N_4 est le centre instantané de rotation du segment $A_4 N_4$
- $A_4 N_4$ est le rayon de courbure de la développante
- La tangente au profil est perpendiculaire à la droite $A_4 N_4$
- La tangente au profil ne coupe jamais la développante
- La normale au profil est toujours tangente au cercle de base
- **S'il y a contact avec une développante, alors la ligne d'action est tangente au cercle de base**

Complément théorique: quand deux solides sont en contact:

- Il n'y a qu'un seul point de contact
- Les points de contact partagent le même plan tangent à la surface
- La ligne d'action passe par le point de contact et est perpendiculaire au plan tangent



Deux solides en contact au point P

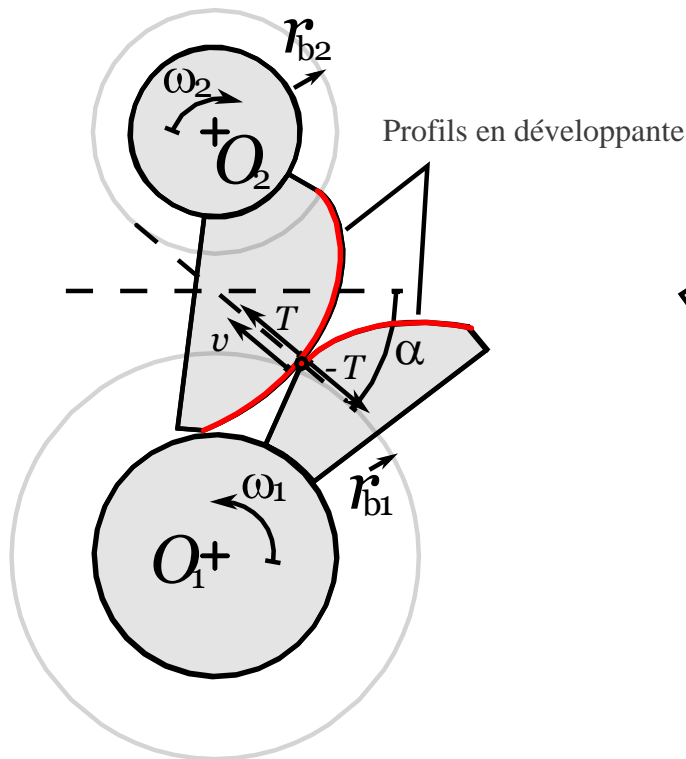


Chaque solide isolé

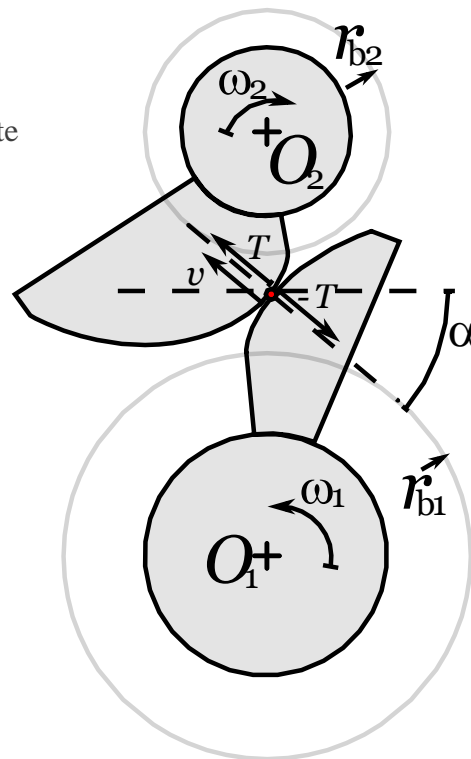
Mettons deux développantes en contact. Ceci vérifie les conditions précédentes:

- Ligne d'engrènement est une ligne droite
- Le point de contact 'avance' à vitesse constante
- La ligne d'action coïncide avec la ligne d'engrènement

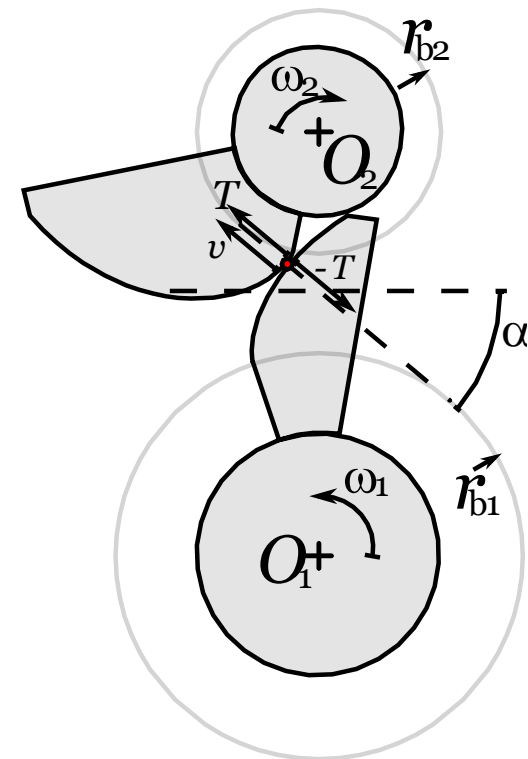
$t=t_1$

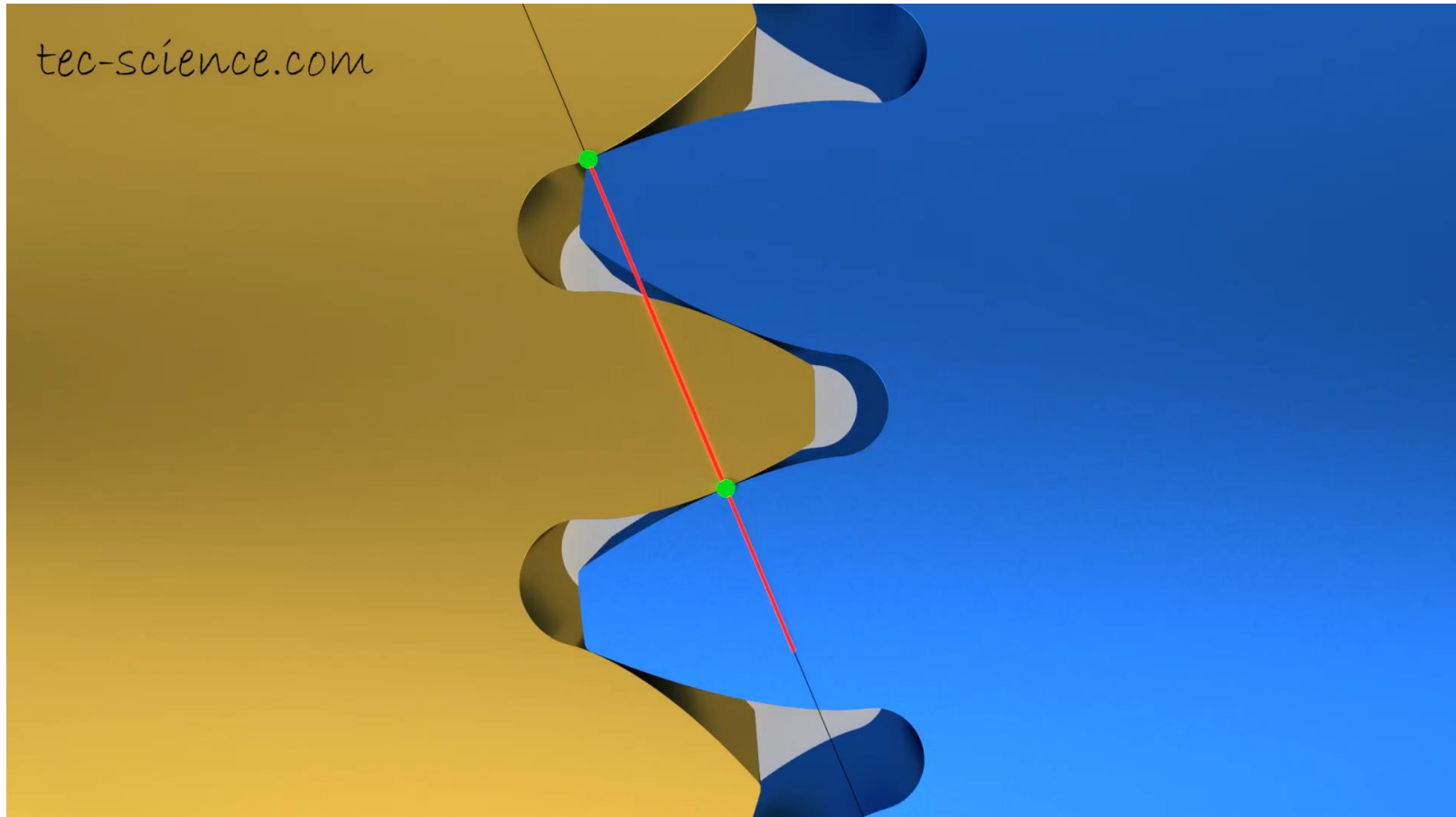


$t=t_2$



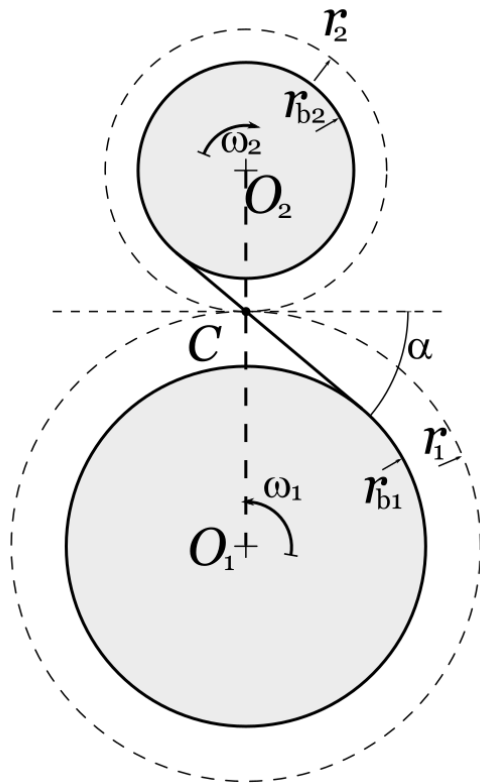
$t=t_3$



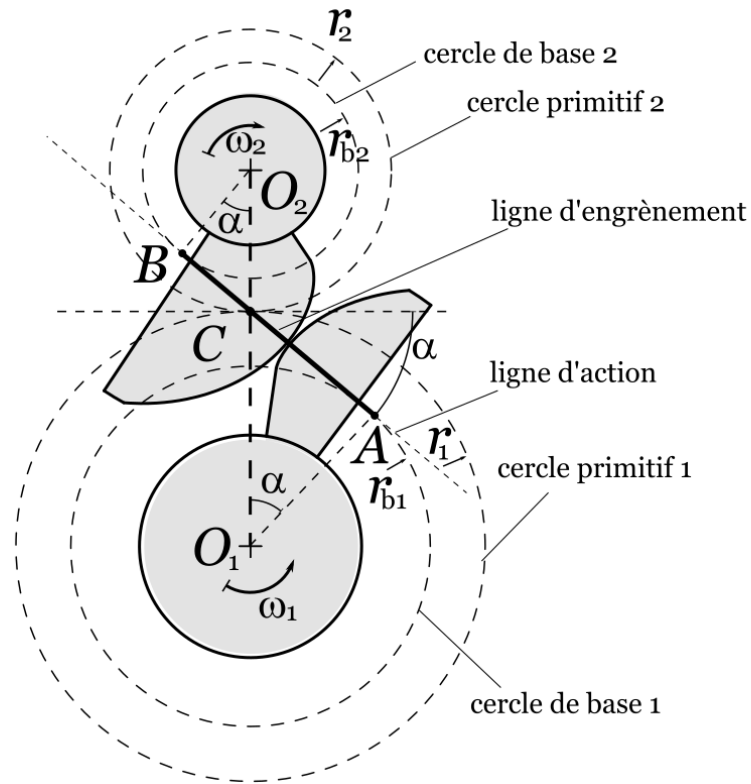


Equivalence entre le profil en développante et:

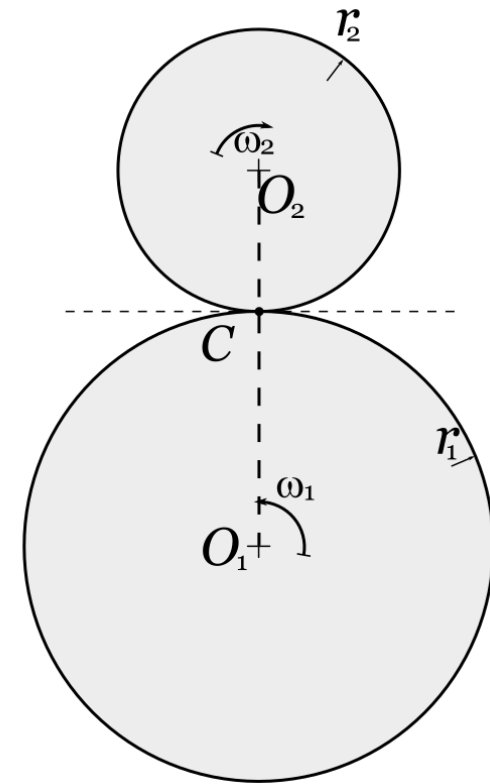
- Deux cylindres aux rayons de base autour desquels est enroulé un câble
- Deux cylindres aux rayons primitifs qui roulent l'un sur l'autre



2 cylindres+câble



2 profils en développante



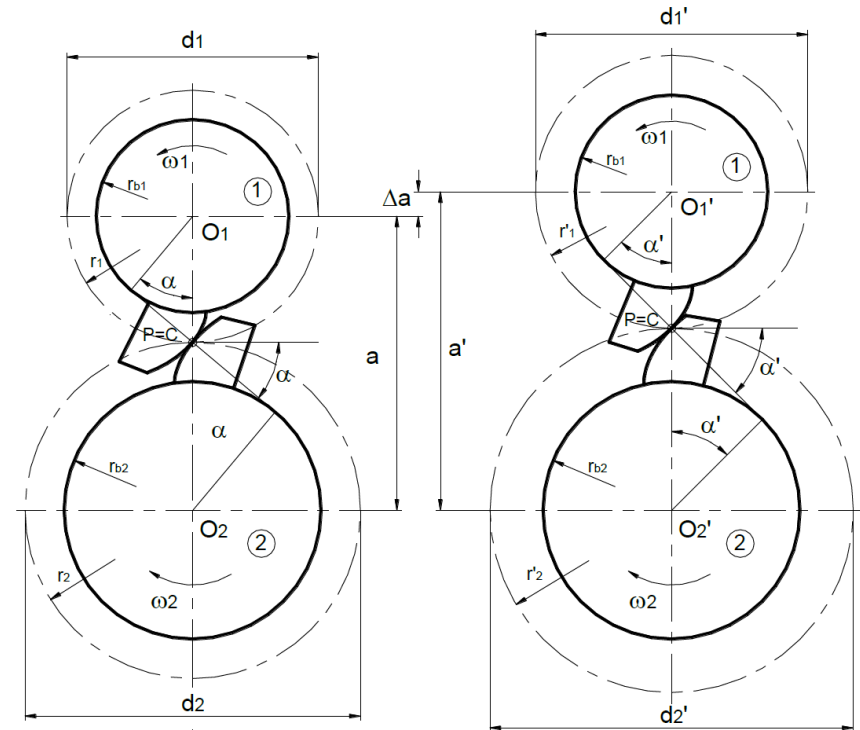
2 cylindres roulants

Il ne faut pas confondre cercle de base et cercle primitif:

- Cercle de base: crée la développante
- Cercle primitif: détermine le rapport de réduction

$r_b = r \cos(\alpha)$, avec r_b le rayon de base, r le rayon primitif et α l'angle de pression

Avec les mêmes cercles de base, en changeant l'entraxe on change l'angle de pression et les cercles primitifs
Ceci ne change pas le rapport de transmission.



Equations de la développante:
(pas à l'examen, pour votre culture)

- Coordonnées cartésiennes:

$$\overline{A_4 N_4} = \widehat{AN_4}$$

$$\rightarrow \overline{A_4 N_4} = r_b \varphi$$

$$\begin{cases} x = r_b (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \\ y = r_b (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) \end{cases}$$

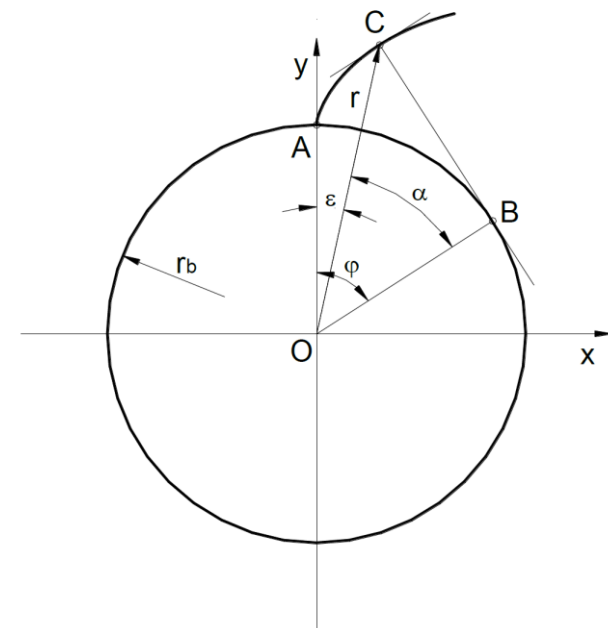
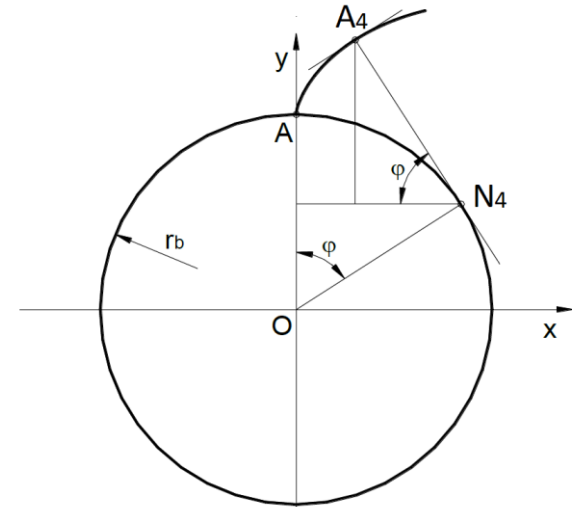
- Coordonnées polaires:

$$AN_4 = r_b \varphi = r_b \tan \alpha$$

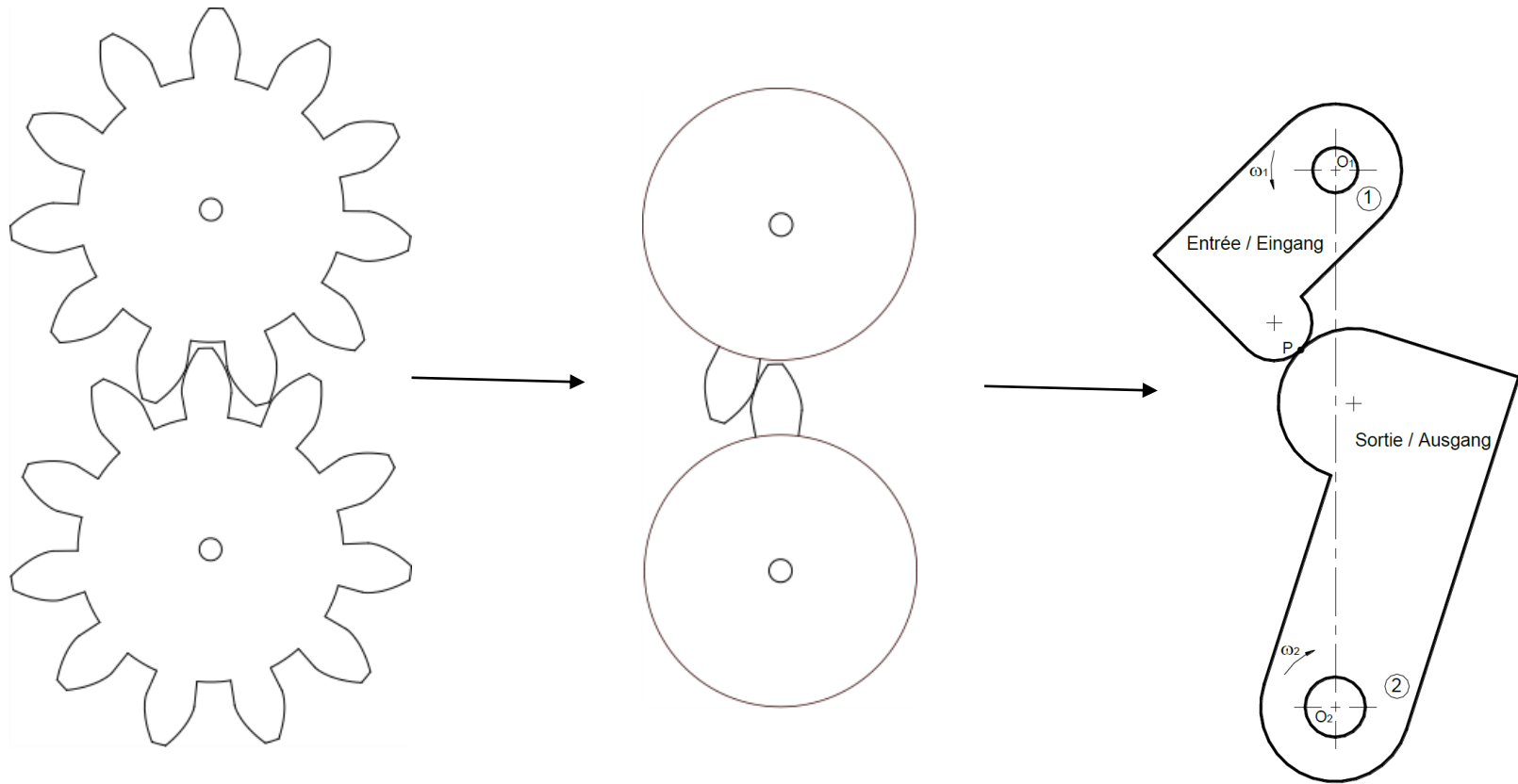
$$\rightarrow \varphi = \tan \alpha$$

$$\epsilon = \varphi - \alpha = \tan \alpha - \alpha$$

$$\begin{cases} r = \frac{r_b}{\cos \alpha} \\ \epsilon = \tan \alpha - \alpha \end{cases}$$



Focalisons-nous sur l'interaction entre 2 dents de formes quelconques:



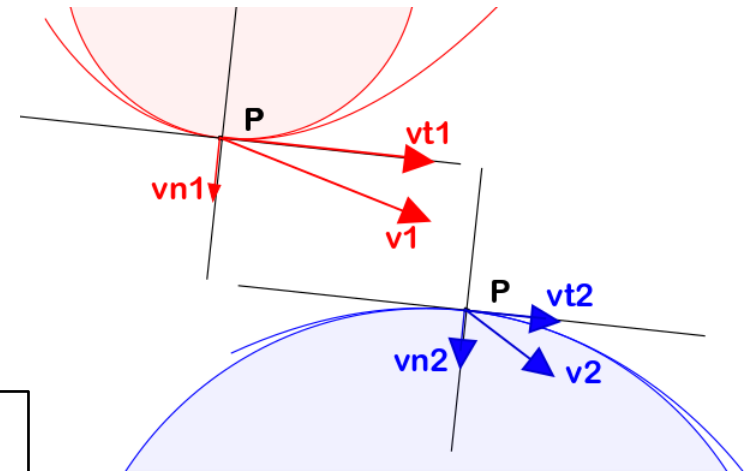
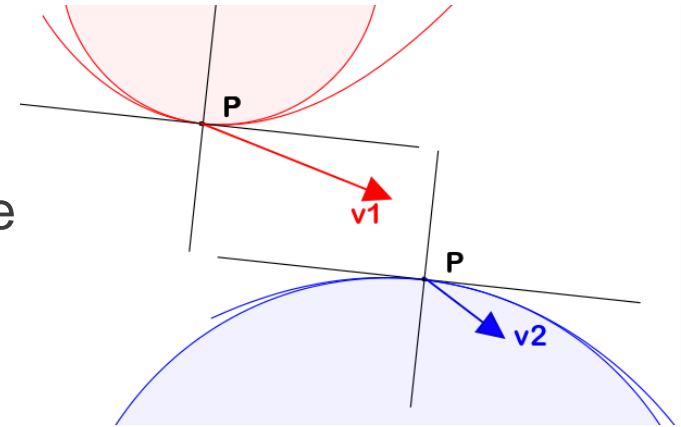
Les 2 dents considérées se comportent comme 2 leviers en contact au point P.

Rappel: propriété de 2 solides en contact :

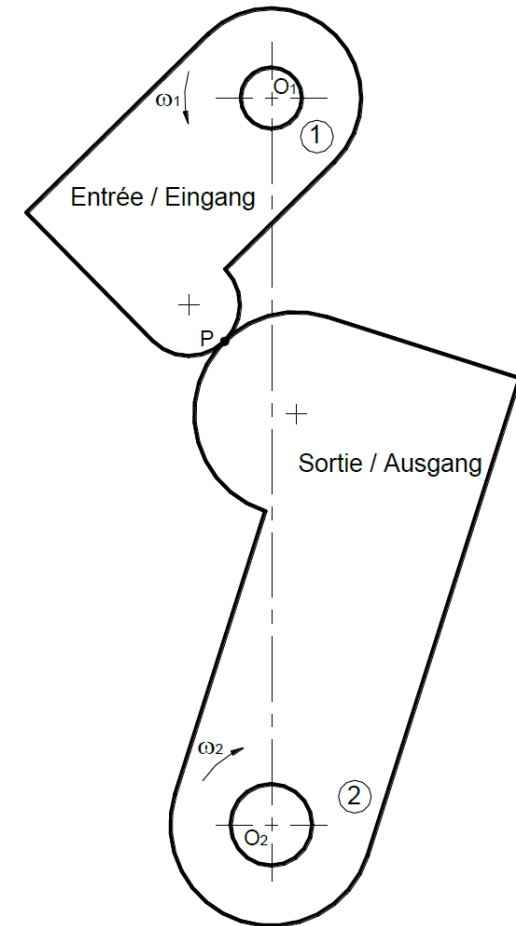
- Les points de contact entre les solides partagent le même plan tangent
- Les forces de contact sont perpendiculaires au plan tangent et définissent la **ligne d'action**

Propriété de 2 solides en contact et en mouvement:

- Considérons chaque pièce, qui ont chacune leur propre vitesse, séparément:
- Les vitesses se décomposent en composantes normales et tangentielles au point de contact:
- Pour maintenir le contact, il faut $v_{n1} = v_{n2}$
 - Si $v_{n1} < v_{n2}$, il y a perte de contact
 - Si $v_{n1} > v_{n2}$, les 2 pièces interfèrent (pas physique)

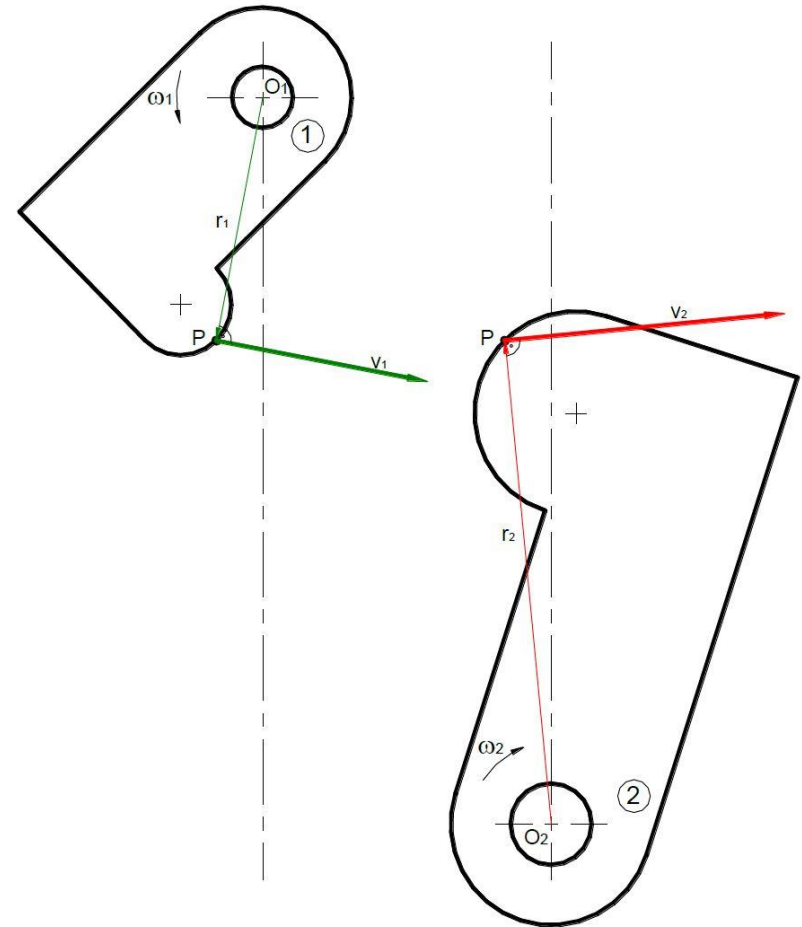


2 Leviers en contact et en mouvement:



Vitesses du point de contact
P de chaque pièce:

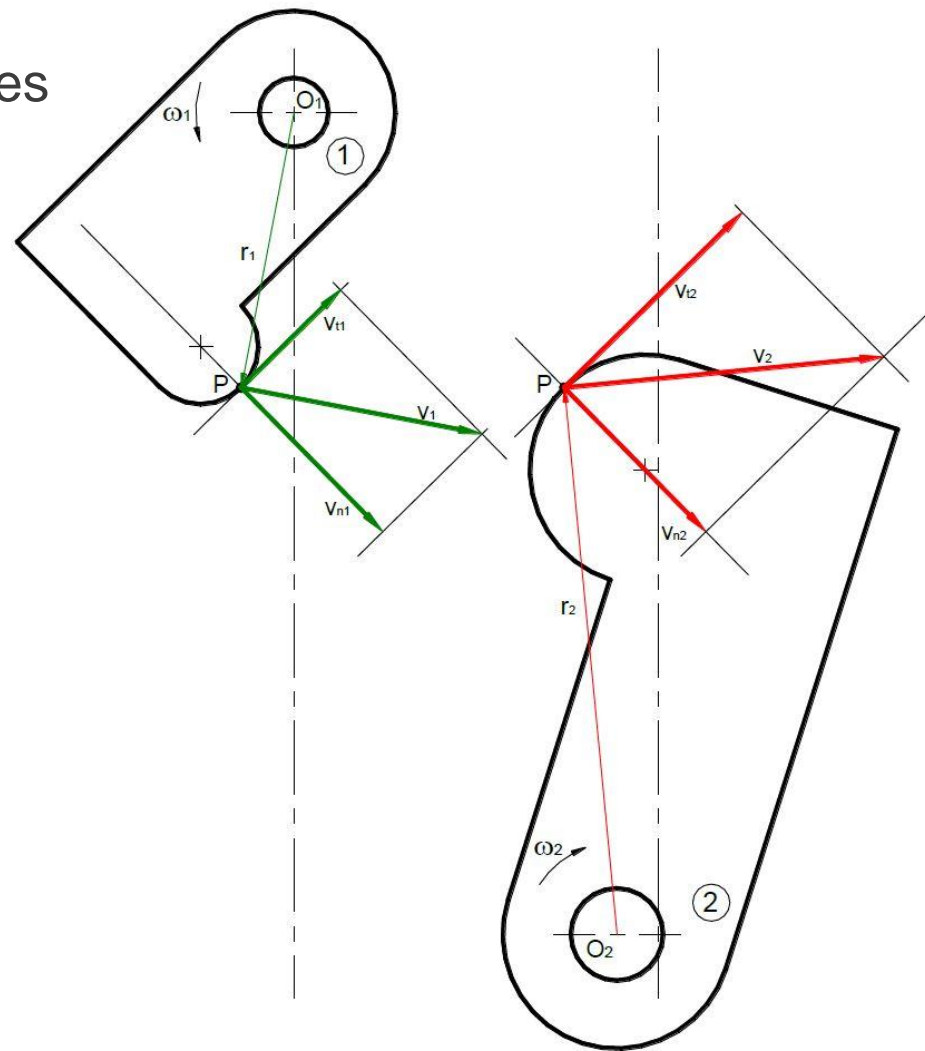
$$\begin{cases} v_1 = \omega_1 r_1 \\ v_2 = \omega_2 r_2 \end{cases}$$



Décomposition des vitesses
selon les composantes normales
et tangentielles:

Condition pour maintenir le
contact:

$$v_{n1} = v_{n2}$$



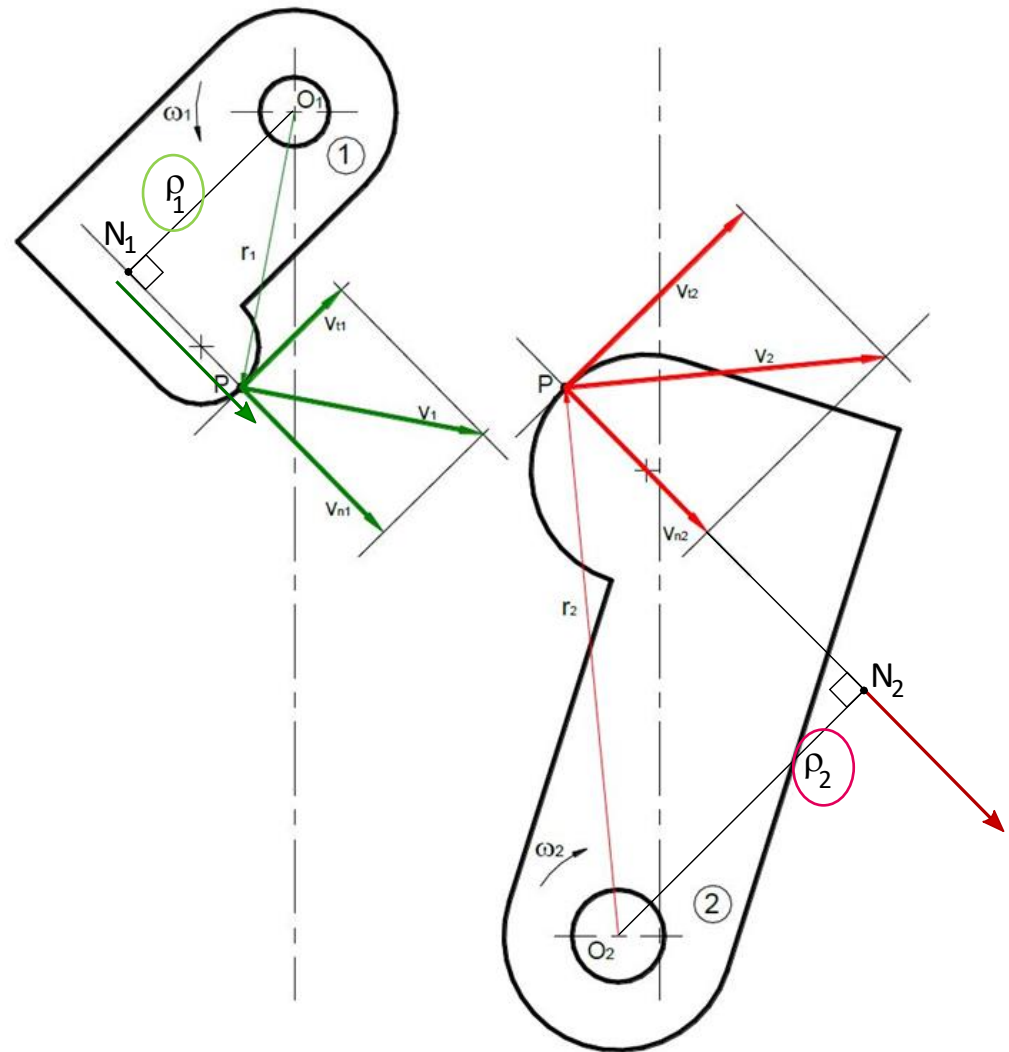
Condition pour maintenir le contact:

$$v_{n1} = v_{n2}$$

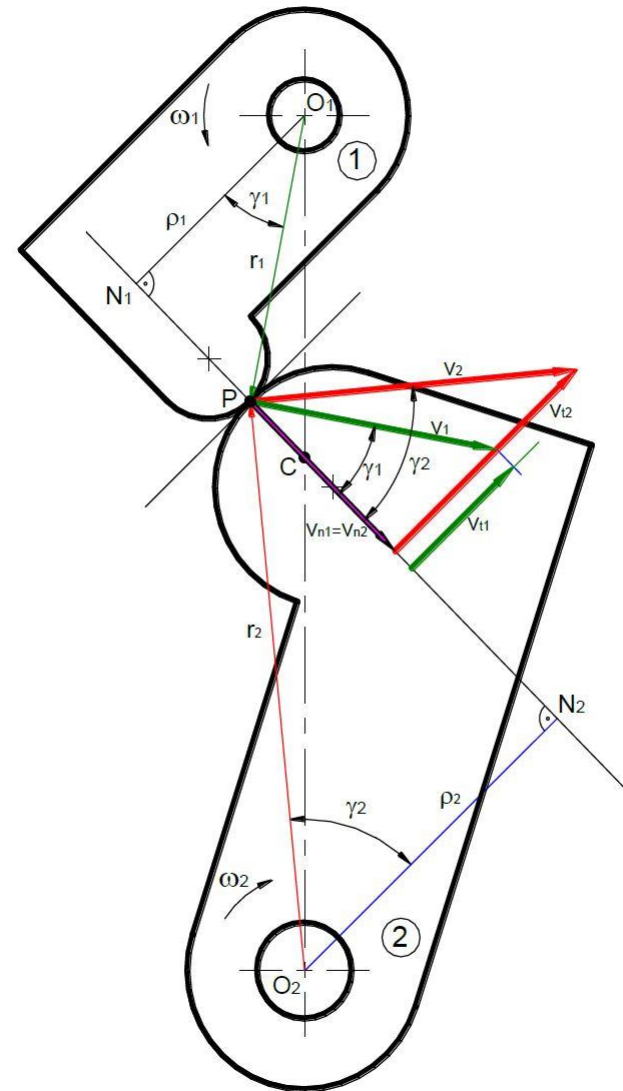
De plus,

$$\begin{cases} v_{n1} = \rho_1 \omega_1 \\ v_{n2} = \rho_2 \omega_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$



La ligne d'action coupe la droite O_1O_2 en C



Condition pour maintenir le contact:

$$v_{n1} = v_{n2}$$

Avec:

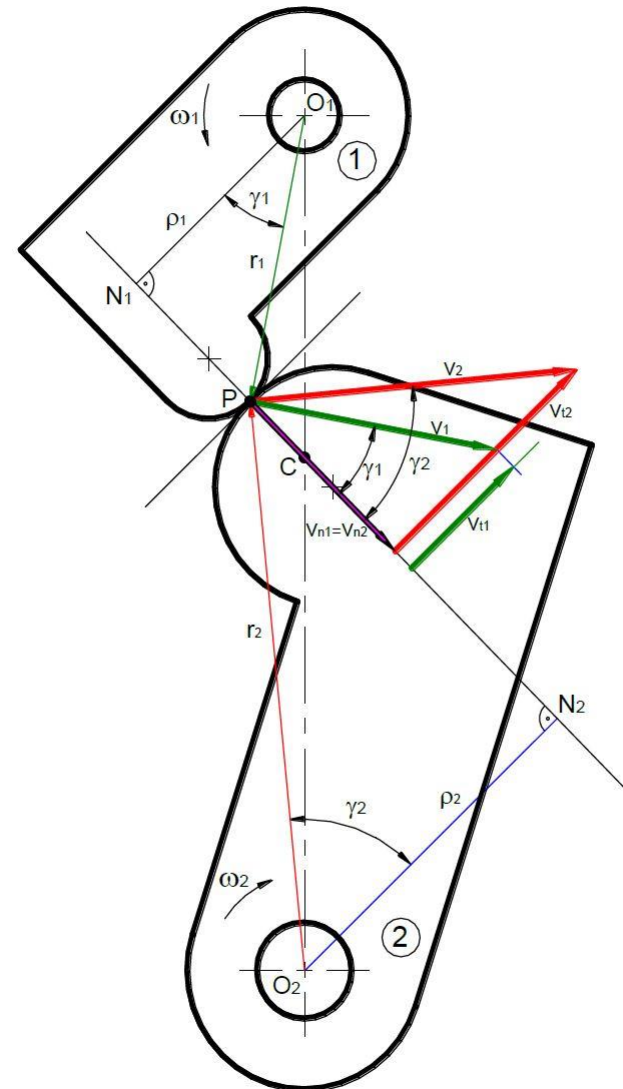
$$\begin{cases} v_{n1} = \rho_1 \omega_1 \\ v_{n2} = \rho_2 \omega_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

De plus, les triangles O_1N_1C et O_2N_2C sont semblables

$$\Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{O_2C}{O_1C}$$

$$\Rightarrow i = \frac{O_2C}{O_1C}$$



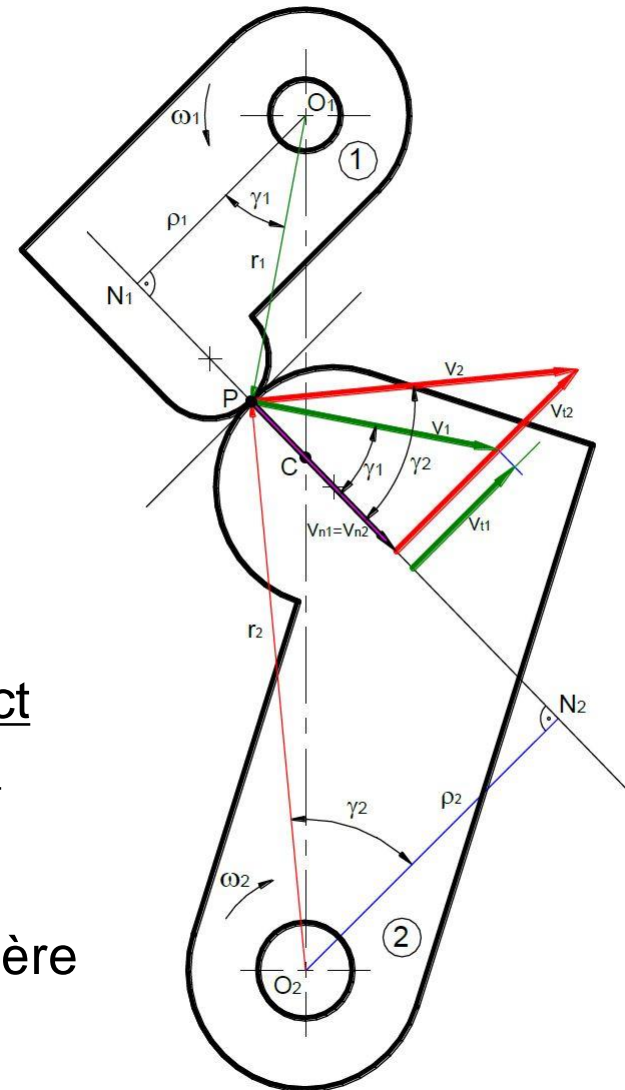
Rapport de transmission: $i = \frac{O_2 C}{O_1 C}$

Pour être homocinéétique, $i = \text{const}$

La condition pour qu'un profil de denture produise un mouvement homocinéétique est donc:

La normale commune en tout point de contact entre les deux profils doit couper la ligne des centres en un point fixe C, appelé le **pôle**.

Deux profils qui se comportent de cette manière sont des **profils conjugués**.

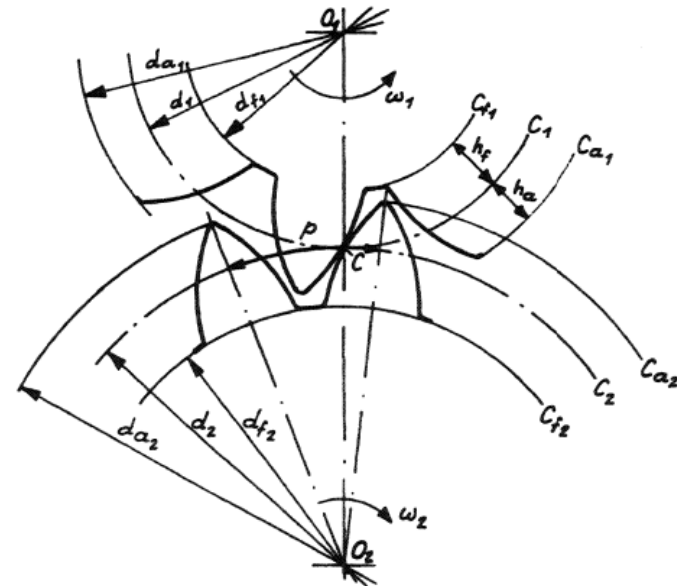


Rapport de transmission: $i = \frac{O_2 C}{O_1 C}$

Définition: cercle primitif

On définit les cercles primitifs de deux engrenages comme les cercles centrés sur les centres de rotation des engrenages et passant par le pôle C

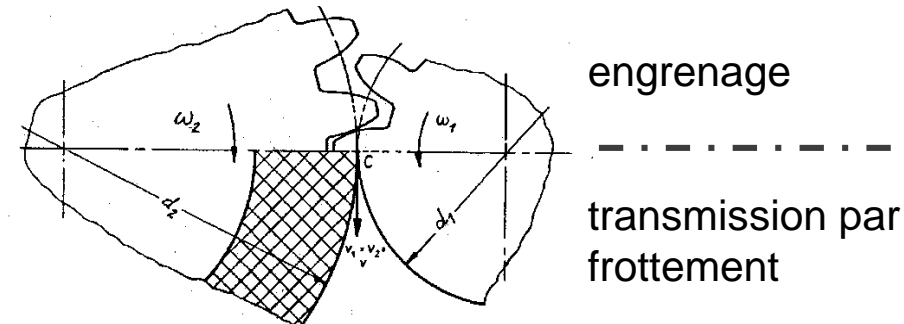
Deux engrenages se comportent comme deux cylindres qui roulent sans glisser et qui ont comme diamètres les diamètres primitifs des engrenages.
Ce sont les diamètres primitifs des engrenages qui déterminent le rapport de transmission.



$C_{1,2}$ = cercles primitifs

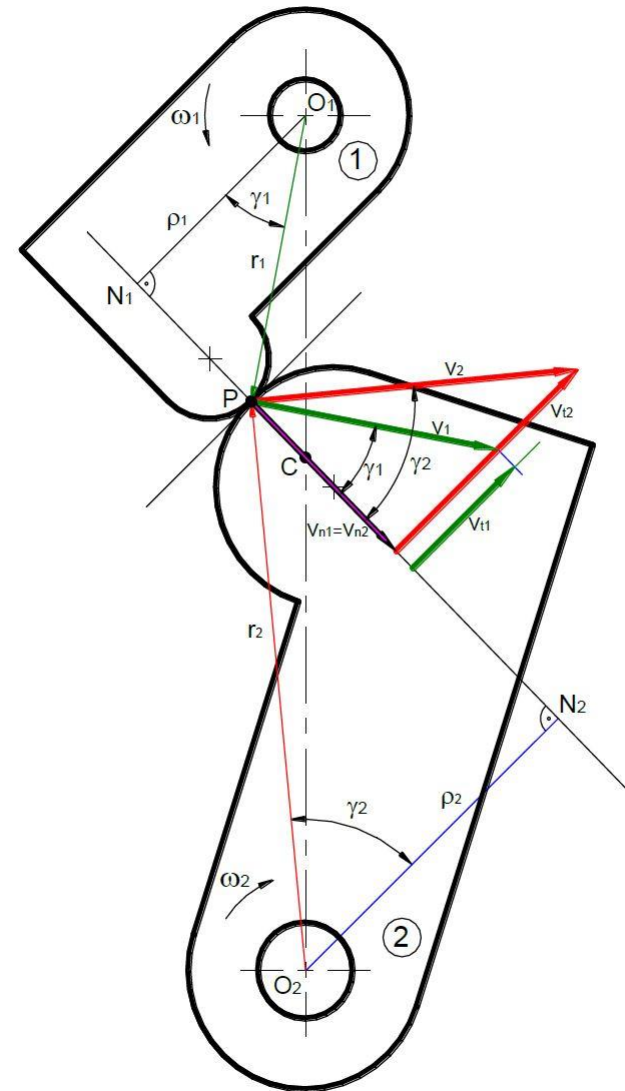
$C_{a1,2}$ = cercles de tête

$C_{f1,2}$ = cercles de pied

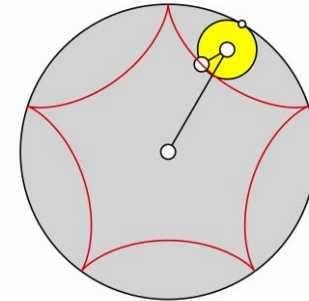
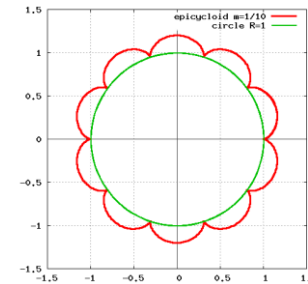
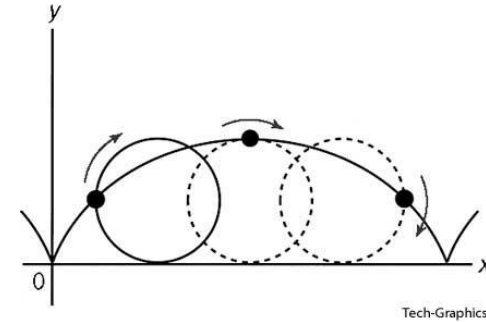


Lien avec le profil en développante:

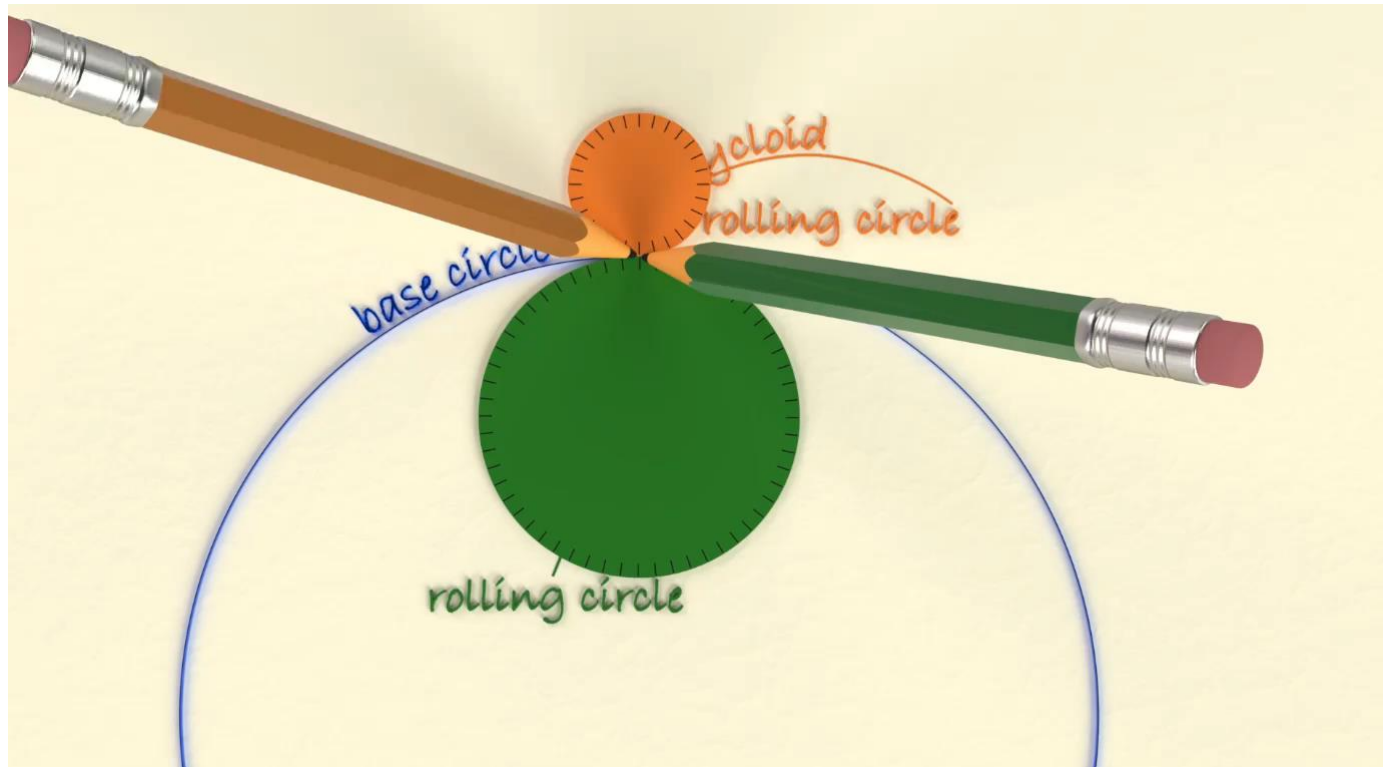
ρ_1 et ρ_2 sont les rayons de base de la développante, et O_2C et O_1C sont les rayons primitifs



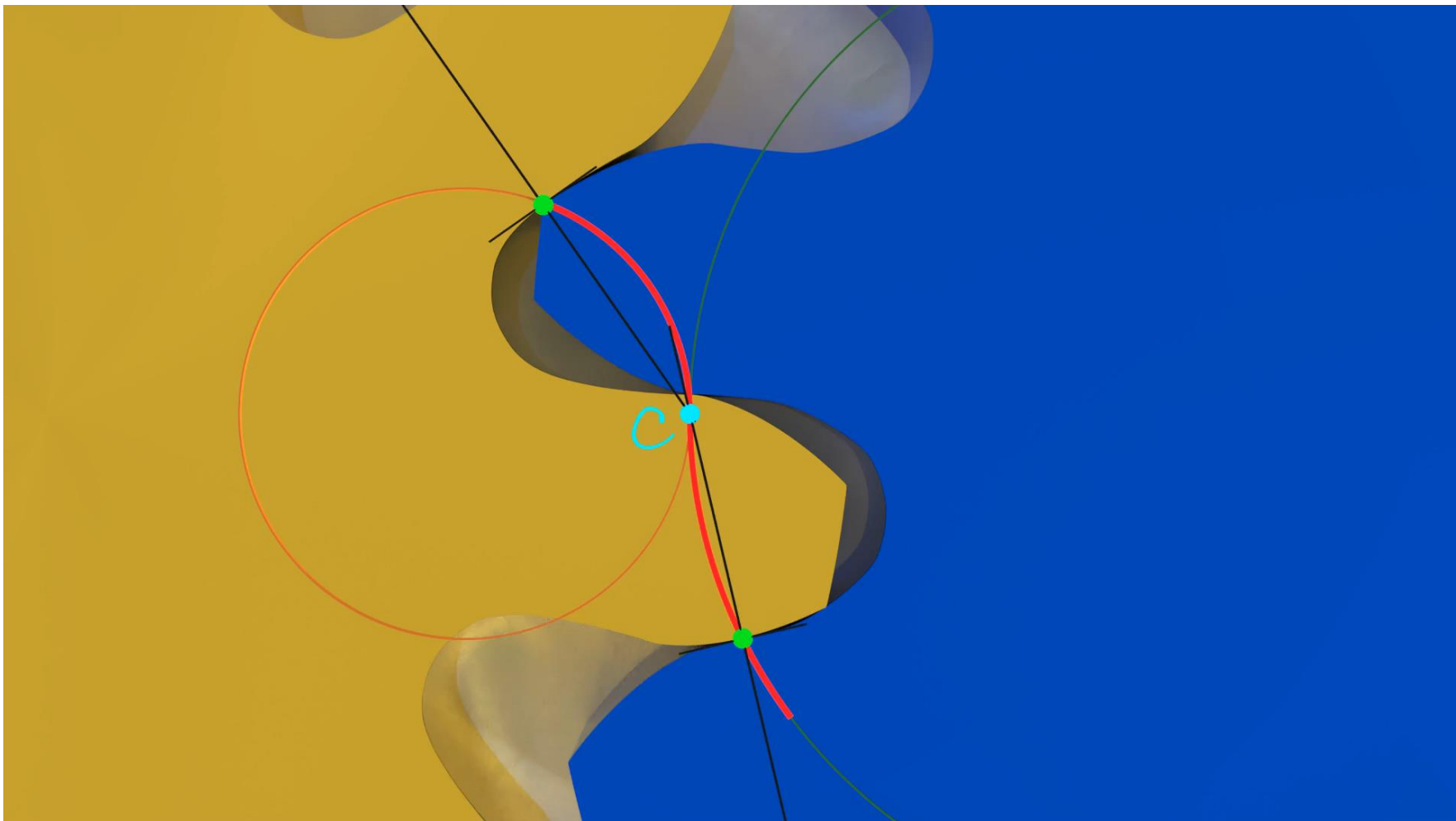
- Cycloïde: lieu du point sur un cercle lorsque ce dernier roule sans glisser sur une **droite**
- Epicycloïde: lieu du point sur un cercle lorsque ce dernier roule sans glisser sur **l'extérieur d'un cercle**
- Hypocycloïde: lieu du point sur un cercle lorsque ce dernier roule sans glisser sur **l'intérieur d'un cercle**



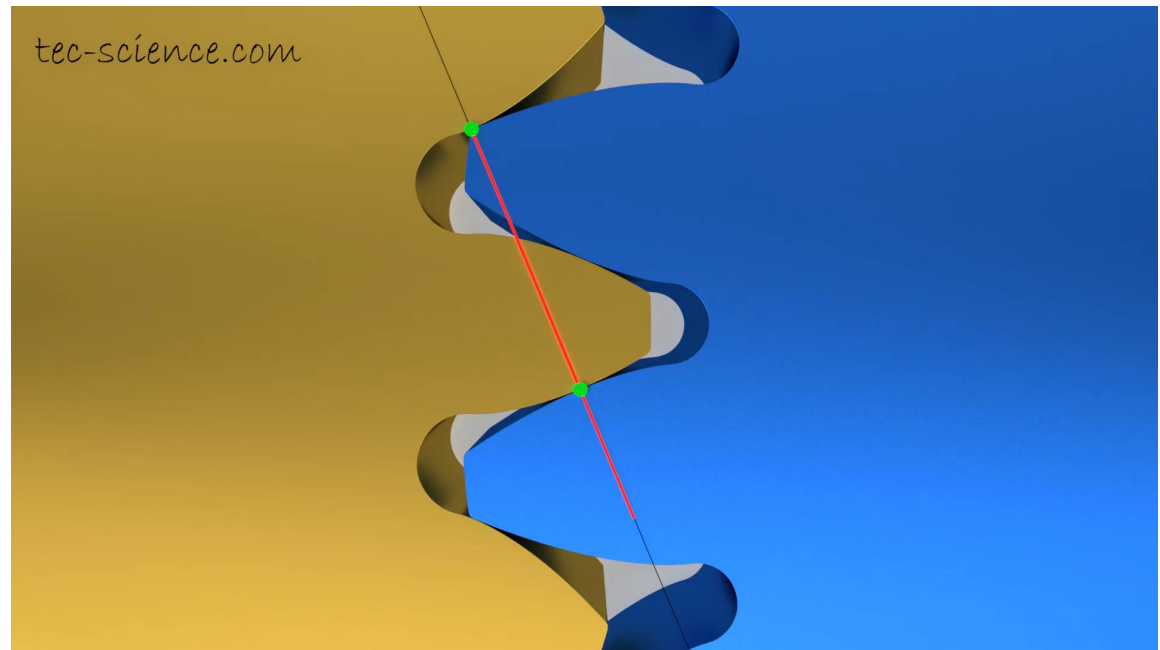
Un profil épicycloïdal a pour conjugué un profil hypocycloïdal et réciproquement:



Source: <https://www.tec-science.com/mechanical-power-transmission/cycloidal-gear/geometry-of-cycloidal-gears/>



Source: <https://www.tec-science.com>



Profil en cycloïde:

