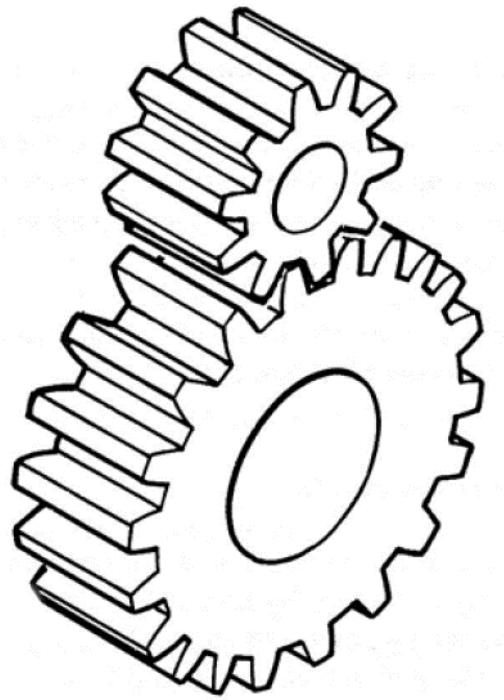


# Introduction à la théorie des engrenages



Prof. Simon Henein

Billy Nussbaumer

Patrick Flückiger

Décembre 2023

De nombreuses illustrations sont tirées de: *Composants de la microtechnique*, R. Clavel, EPFL, 2010

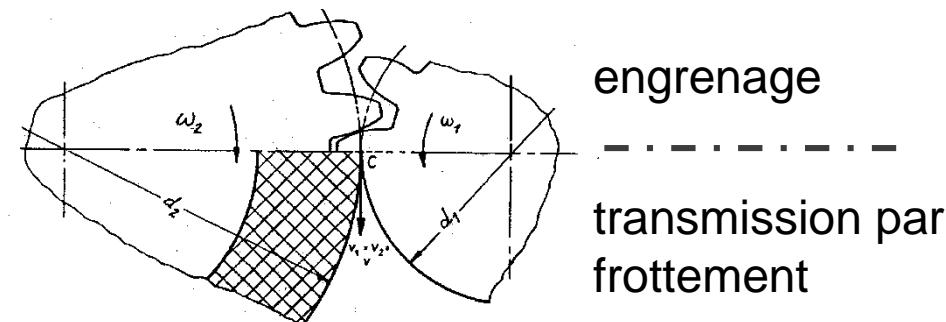
1. Définition, types d'engrenages, applications
2. Explication intuitive de la denture en développante
3. Généralisation: la loi des engrenages
4. Exemple supplémentaire de profil: le profil cycloïdal

## 1.1 Définition

L'engrenage est un mécanisme élémentaire constitué de deux organes dentés, mobiles autour d'axes de position relative invariable et dont l'un entraîne l'autre par l'action de dents successivement en contact.

Les engrenages permettent:

- une transmission positive (par obstacle), donc sans glissement (cinématique synchrone), mais pas sans frottement (dissipation énergétique)
- De transmettre de la puissance avec une conversion de vitesse angulaire et de couple (ou force)
- Peut aussi servir de positionnement

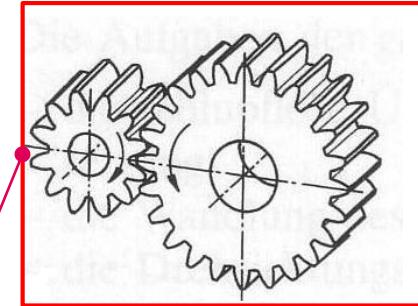


engrenage

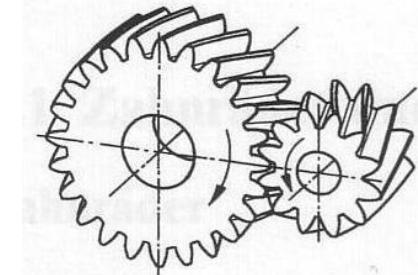
transmission par  
frottement

Axes parallèles:

- Denture droite:

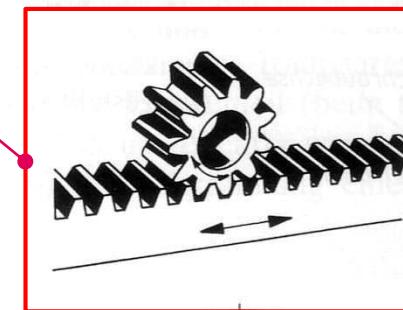


- Denture hélicoïdale

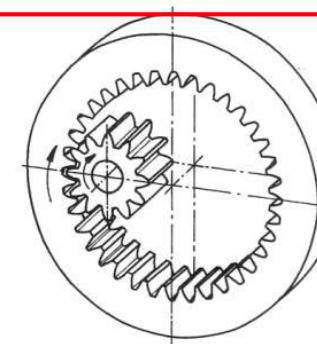


Traités dans ce cours

- Pignon et crémaillère

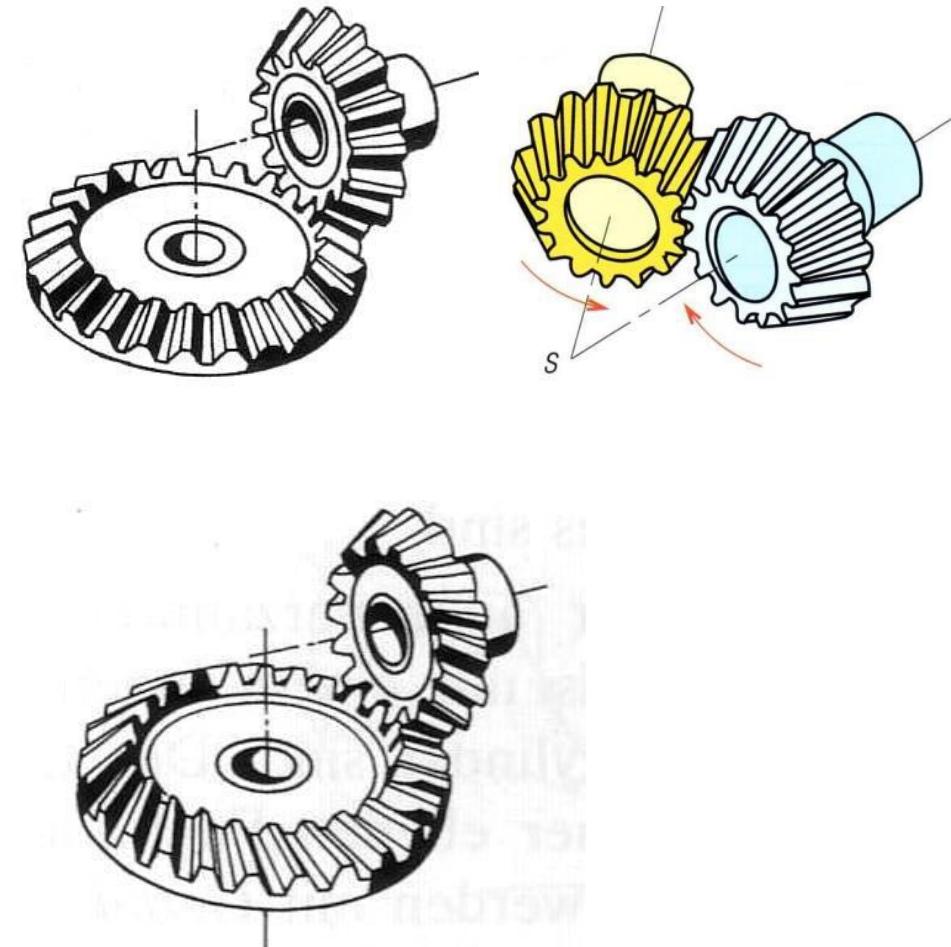


- Pignon et couronne à denture intérieure



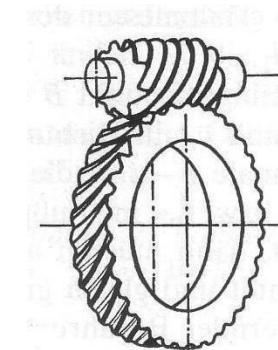
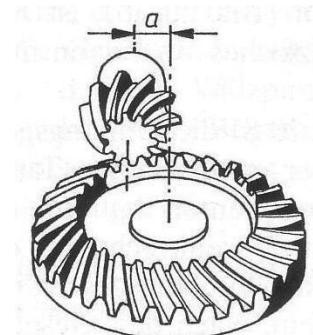
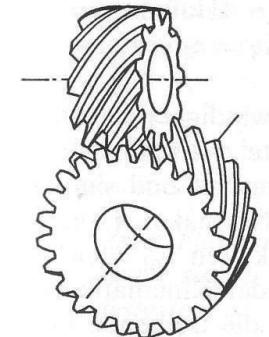
Axes concourants:

- Engrenages coniques à dentures droites
- Engrenages coniques à dentures hélicoïdales



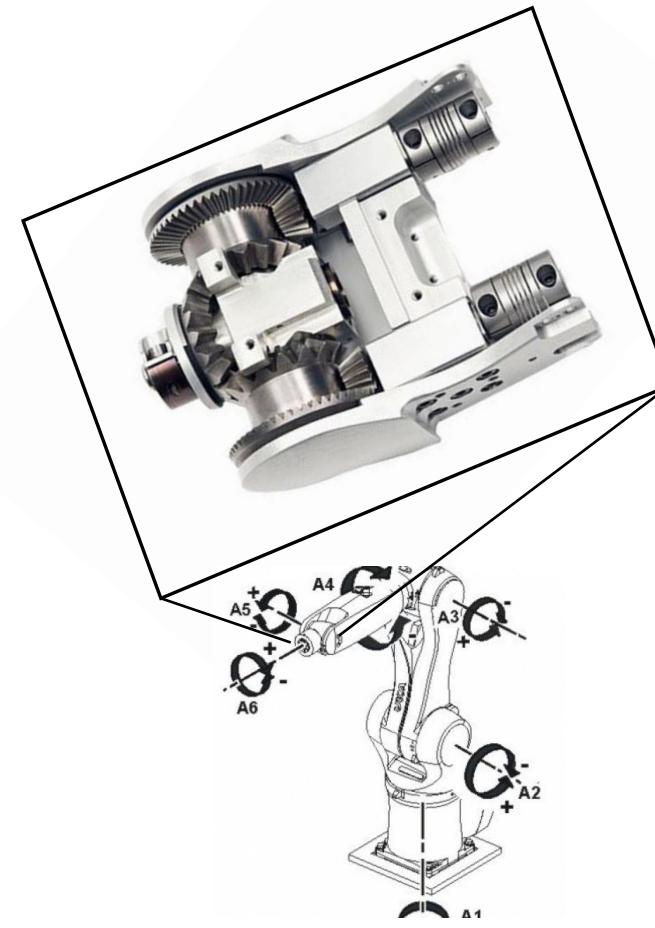
Axes gauches:

- Engrenages à dentures hélicoïdales
- Denture en hypoïde
- Vis sans fin et roue





Transmission de puissance

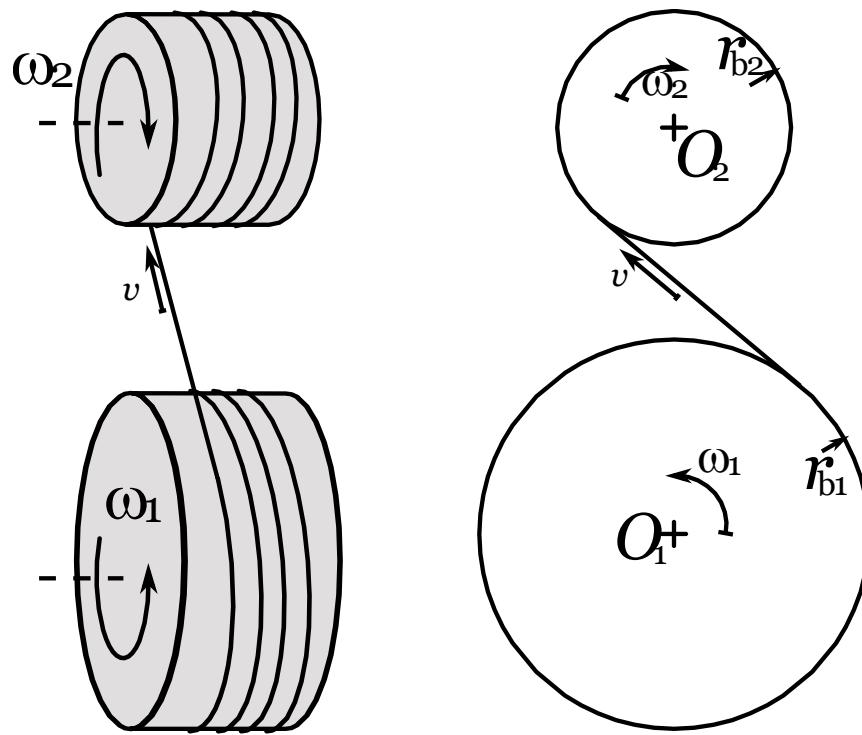


Positionnement

→ un rapport de transmission constant (=homocinétique) est critique!  
Trovons un profil de denture convenable

## 2. Explication intuitive du profil en développante

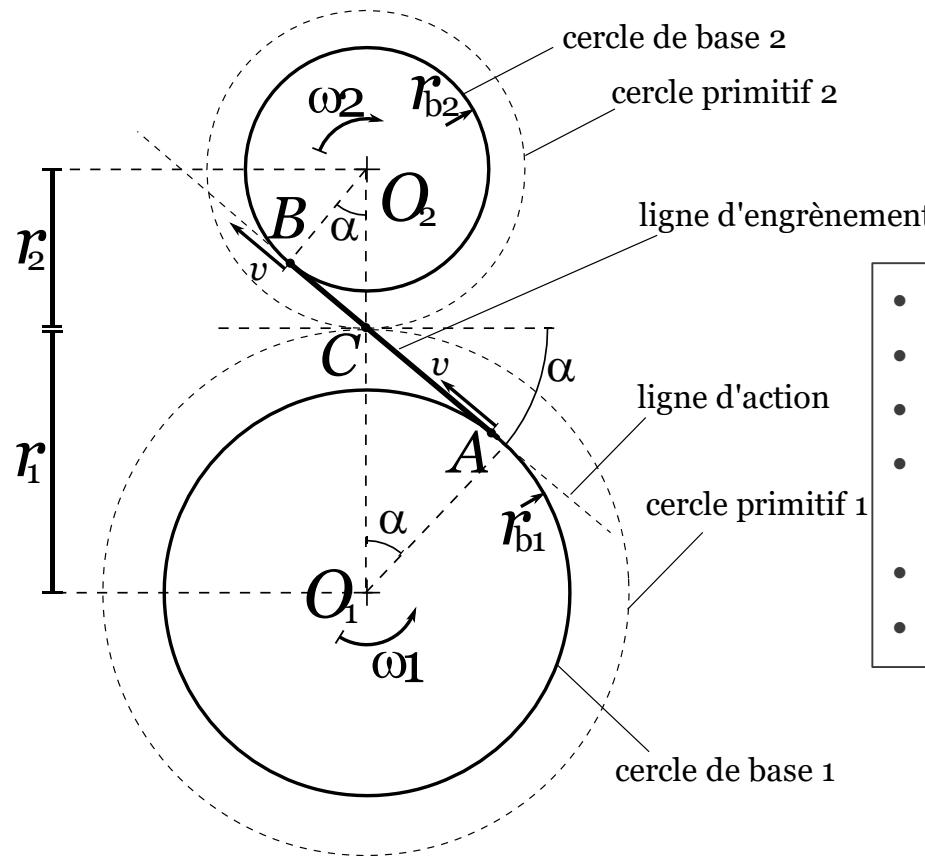
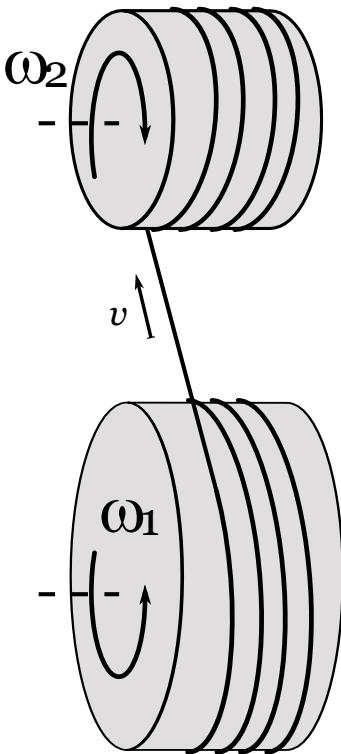
Mécanisme que l'on cherche à imiter avec des engrenages:  
2 cylindres reliés par un câble enroulé



$$\text{Rapport de transmission} = i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}}$$

## 2. Explication intuitive du profil en développante

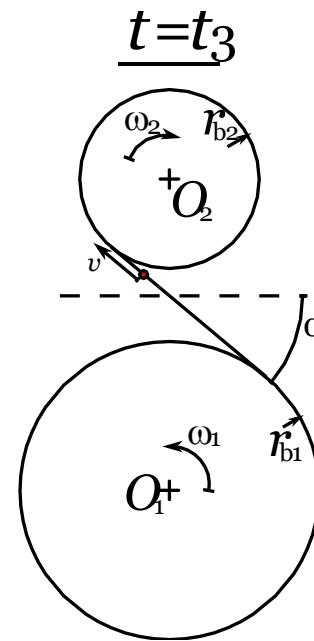
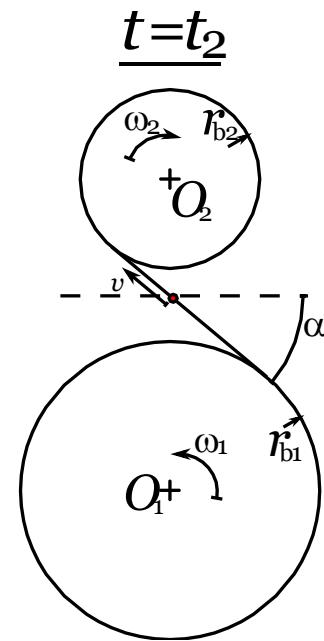
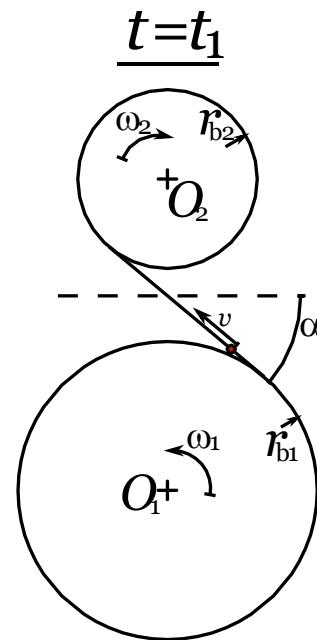
Mécanisme que l'on cherche à imiter avec des engrenages:  
2 cylindres reliés par un câble enroulé



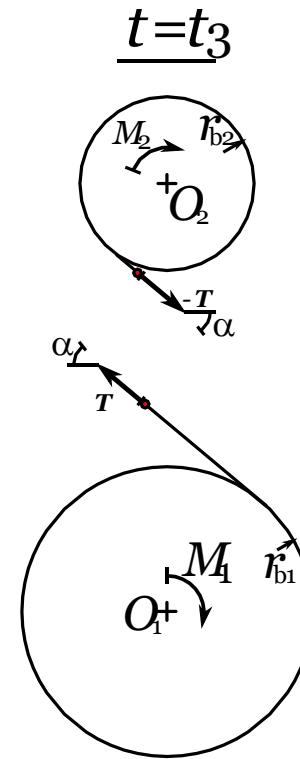
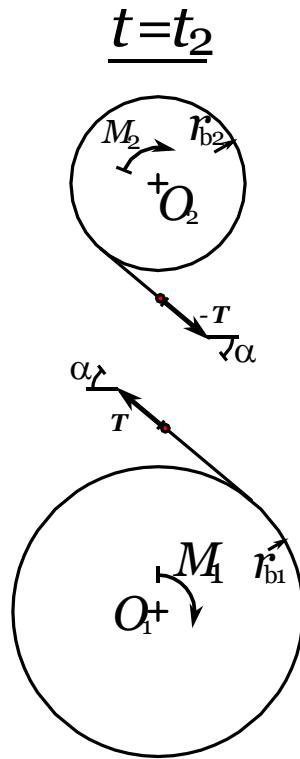
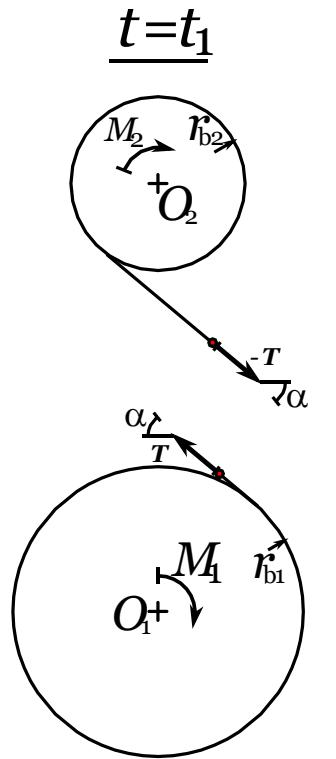
- $r_{b1}, r_{b2}$  : rayons de base
- $r_1, r_2$  : rayons primitifs
- $\alpha$  : Angle de pression
- Segment AB : ligne d'engrènement
- Droite AB : ligne d'action
- C : Pôle

$$\text{Rapport de transmission} = i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} = \frac{r_2 \cos(\alpha)}{r_1 \cos(\alpha)} = \frac{r_2}{r_1}$$

Focalisons-nous sur un point du câble:



Décomposition en 2 sous-systèmes:



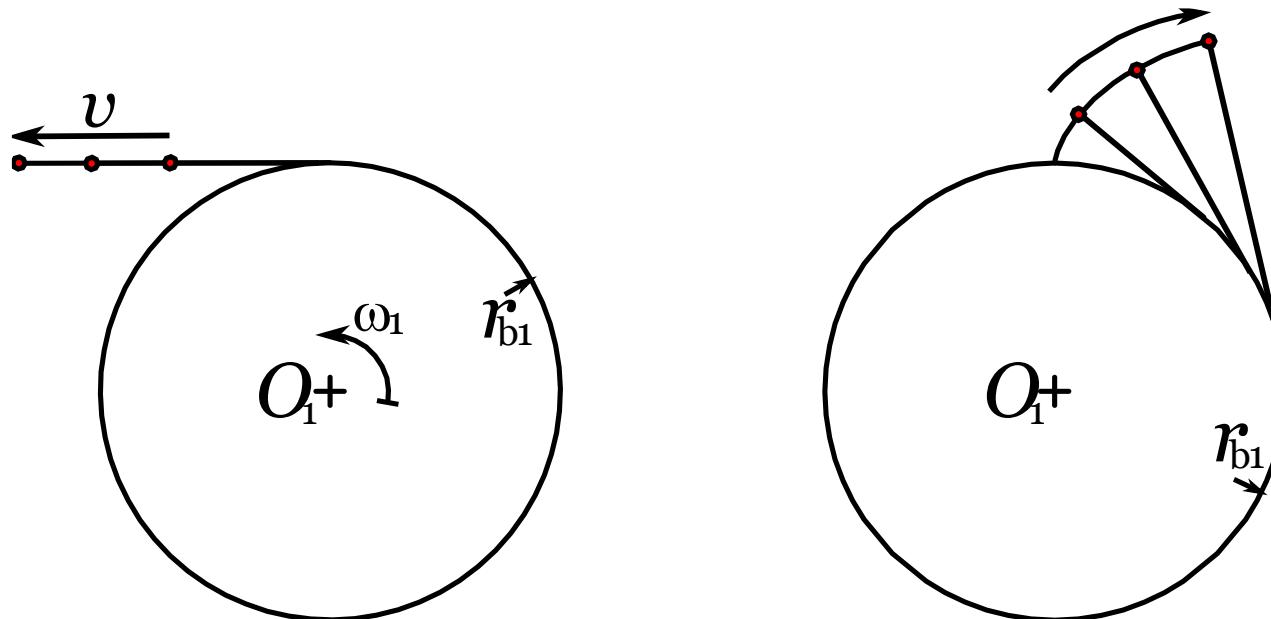
- Le point de contact suit une ligne droite
- Le point de contact 'avance' à vitesse constante
- La ligne d'action coïncident avec la ligne d'engrènement

Trouvons un profil de dent avec un comportement identique:

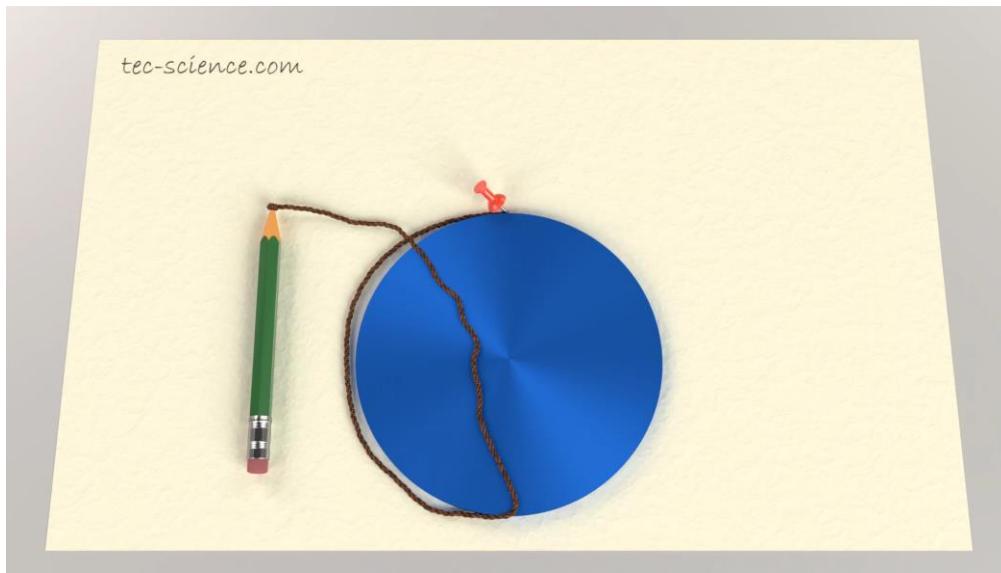
- Point de contact qui suit une ligne droite
- Point de contact qui 'avance' à vitesse constante
- Ligne d'action coïncident avec la ligne d'engrènement

Analysons la trajectoire du point T dans le repère du cercle 1.

Par rapport au cercle 1, le câble se déroule et trace une **développante de cercle**

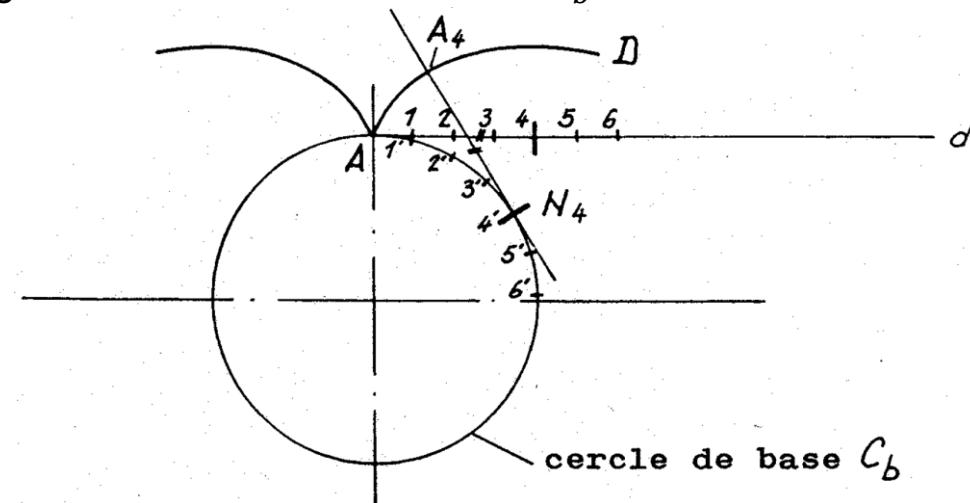


## 2. Explication intuitive du profil en développante



## 2. Explication intuitive du profil en développante

La développante de cercle est le lieu des points  $A$  lorsque la droite  $d$  (appelée droite génératrice) roule sans glisser sur le **cercle de base**  $C_b$ .

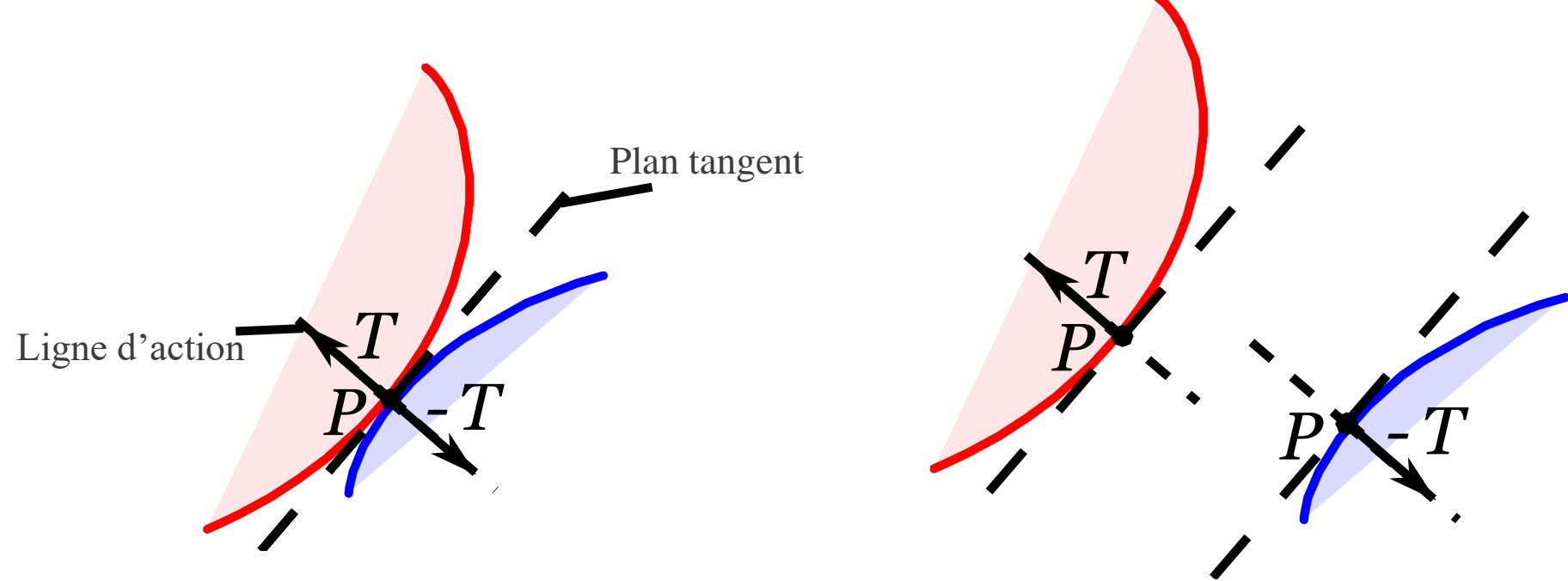


## Propriétés d'une développante:

- $\overline{A_4N_4} = \widehat{AN_4}$
  - $N_4$  est le centre instantané de rotation du segment  $A_4N_4$
  - $A_4N_4$  est le rayon de courbure de la développante
  - La tangente au profil est perpendiculaire à la droite  $A_4N_4$
  - La tangente au profil ne coupe jamais la développante
  - La normale au profil est toujours tangente au cercle de base
  - **S'il y a contact avec une développante, alors la ligne d'action est tangente au cercle de base**

Complément théorique: quand deux solides sont en contact:

- Il n'y a qu'un seul point de contact
- Les points de contact partagent le même plan tangent à la surface
- La ligne d'action passe par le point de contact et est perpendiculaire au plan tangent



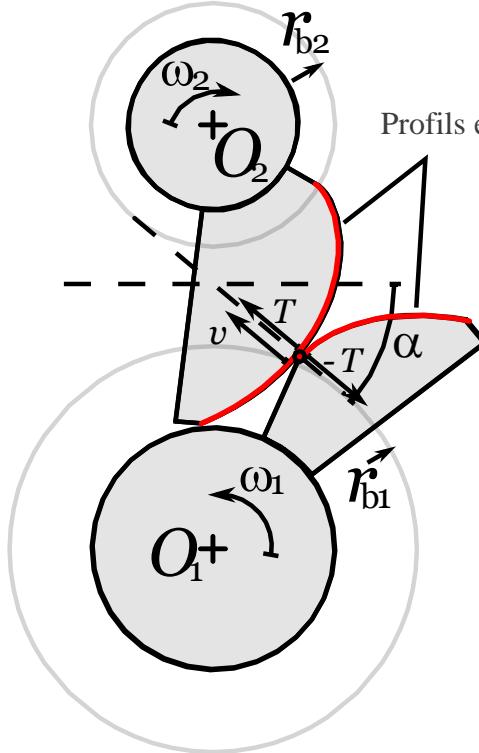
Deux solides en  
contact au point  $P$

Chaque solide isolé

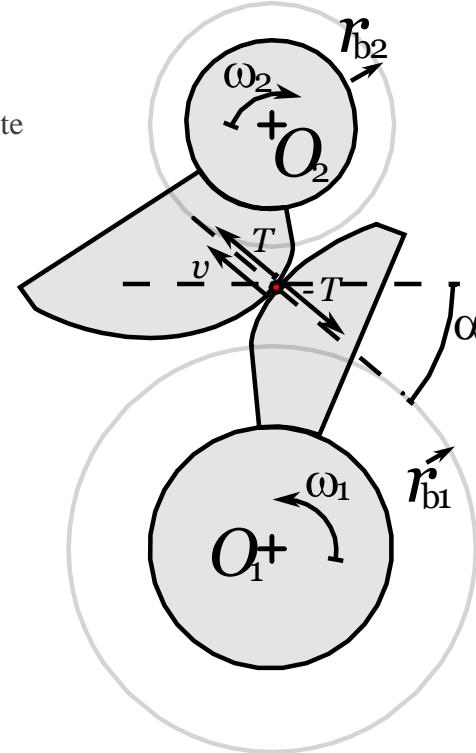
Mettons deux développantes en contact. Ceci vérifie les conditions précédentes:

- Ligne d'engrènement est une ligne droite
- Le point de contact 'avance' à vitesse constante
- La ligne d'action coïncide avec la ligne d'engrènement

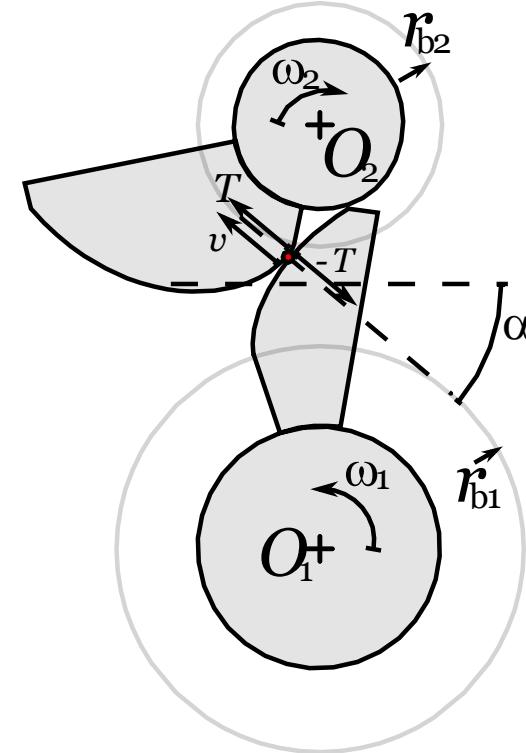
$t=t_1$

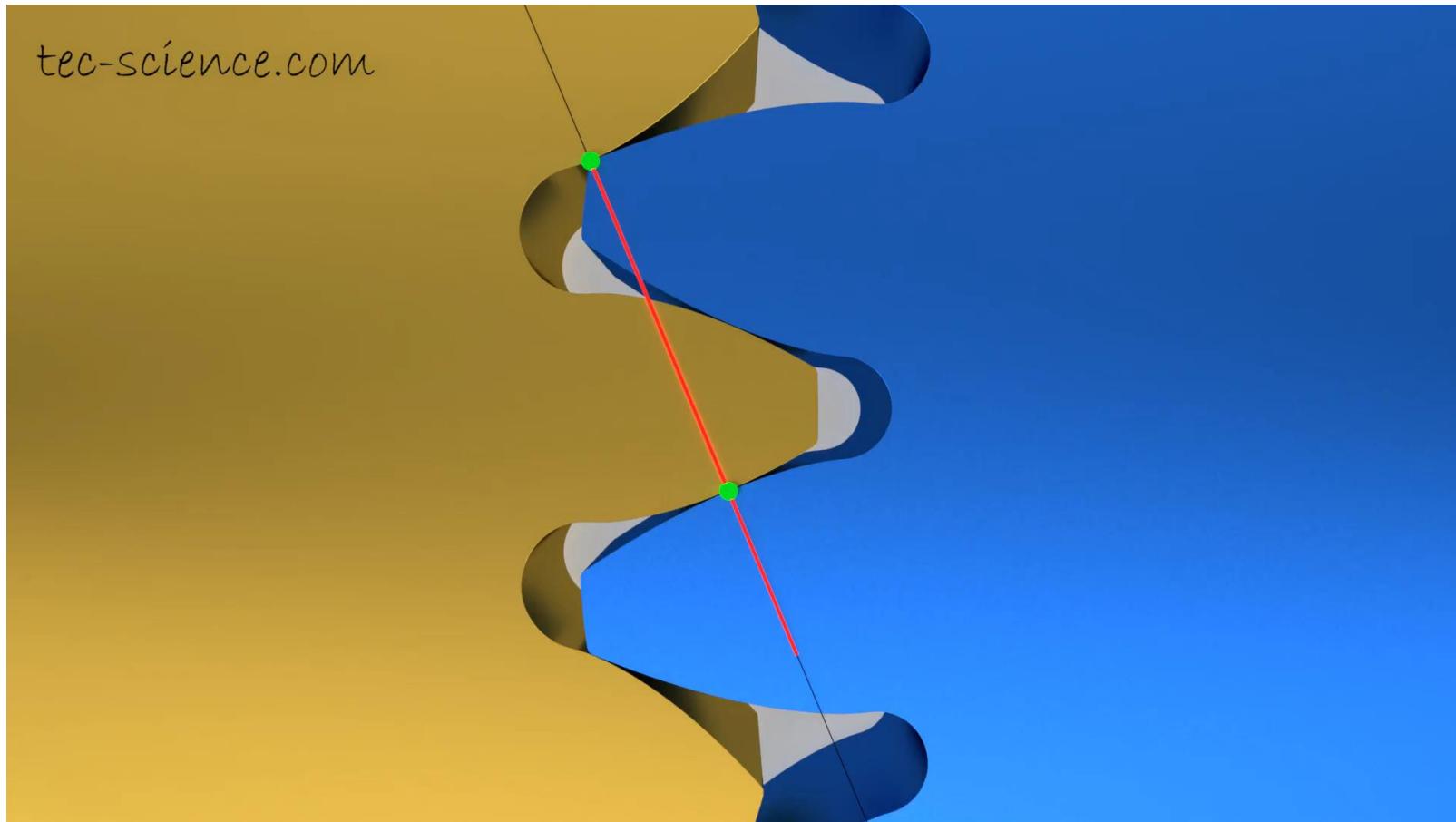


$t=t_2$



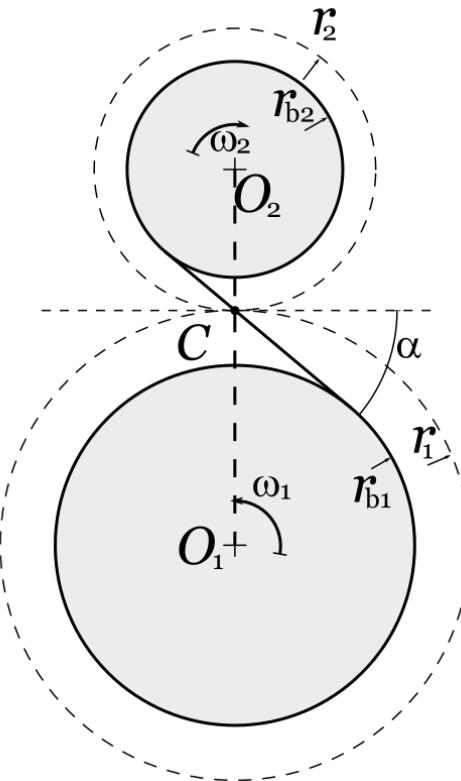
$t=t_3$



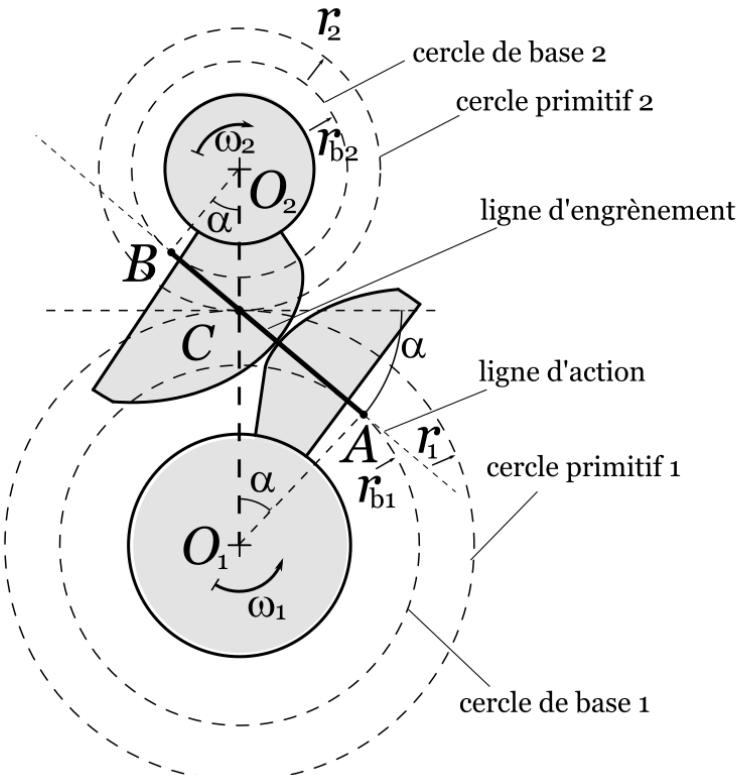


Équivalence entre le profil en développante et:

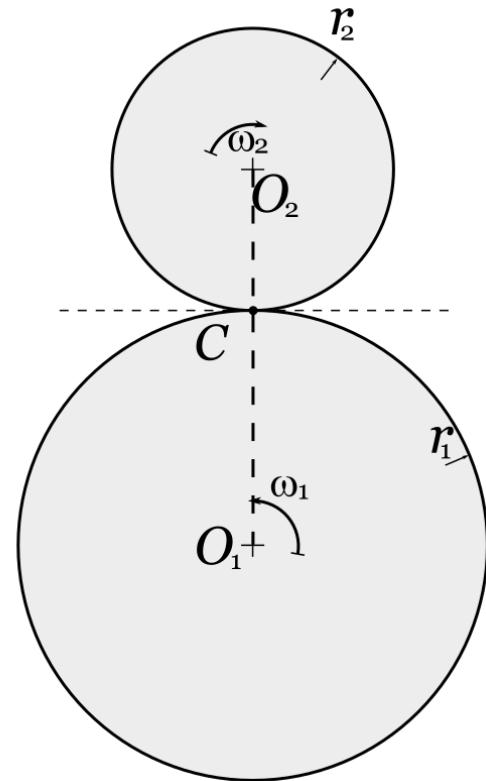
- Deux cylindres aux rayons de base autour desquels est enroulé un câble
- Deux cylindres aux rayons primitifs qui roulent l'un sur l'autre



2 cylindres+câble



2 profils en développante



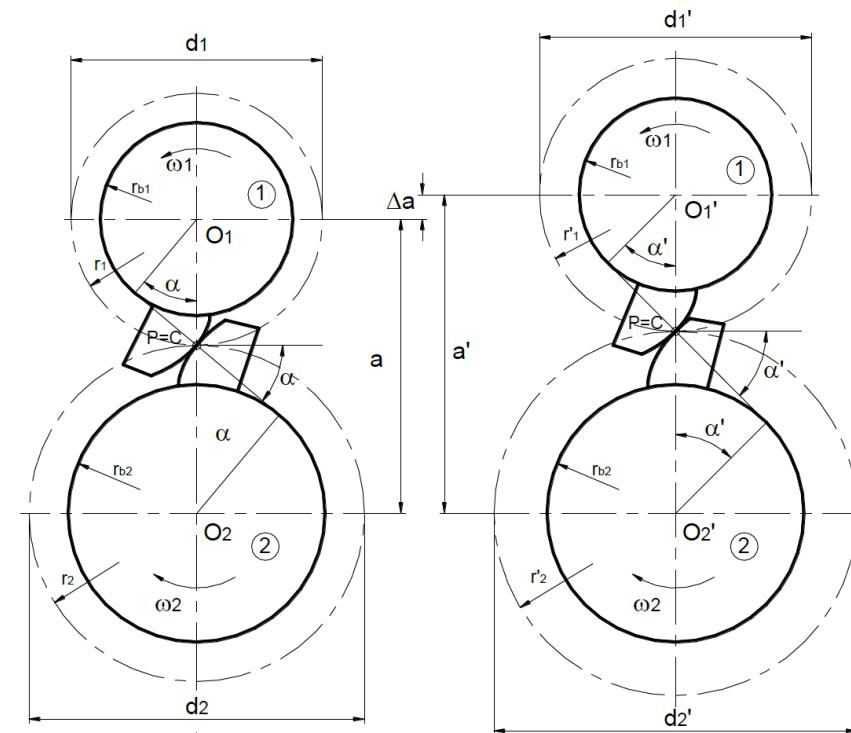
2 cylindres roulants

Il ne faut pas confondre cercle de base et cercle primitif:

- Cercle de base: crée la développante
- Cercle primitif: détermine le rapport de réduction

$$r_b = r \cos(\alpha), \text{ avec } r_b \text{ le rayon de base, } r \text{ le rayon primitif et } \alpha \text{ l'angle de pression}$$

Avec les mêmes cercles de base, en changeant l'entraxe on change l'angle de pression et les cercles primitifs  
 Ceci ne change pas le rapport de transmission.



Équations de la développante:  
(pas à l'examen, pour votre culture)

- Coordonnées cartésiennes:

$$\overbrace{A_4 N_4} = \overbrace{AN_4}$$

$$\rightarrow \overline{A_4 N_4} = r_b \varphi$$

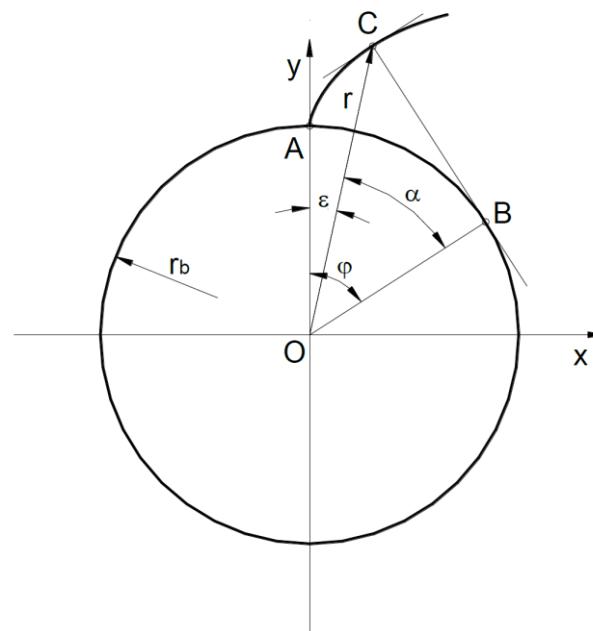
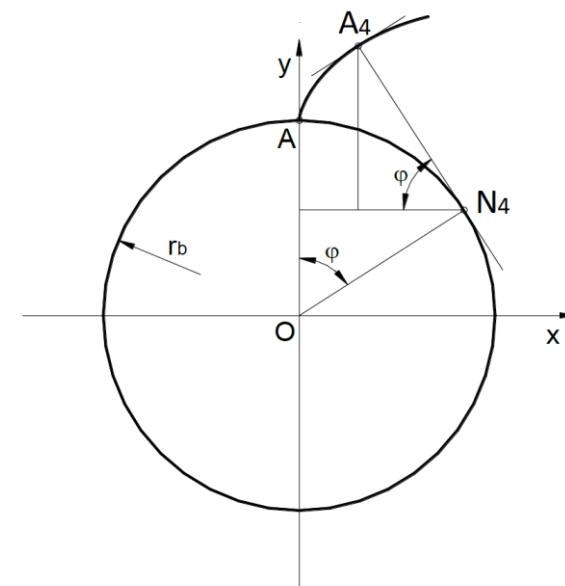
$$\begin{cases} x = r_b(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \\ y = r_b(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) \end{cases}$$

- Coordonnées polaires:

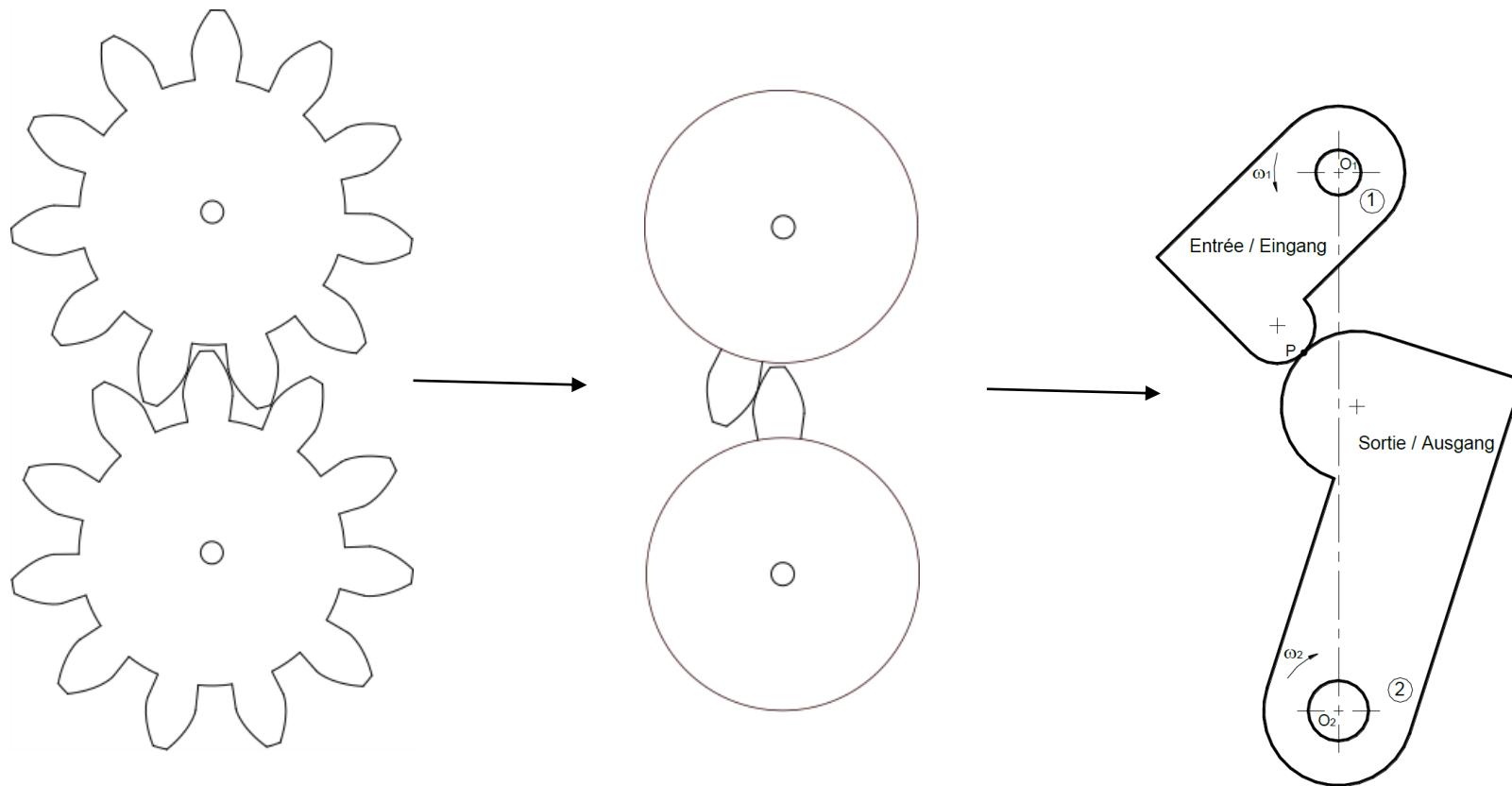
$$\begin{aligned} AN_4 &= r_b \varphi = r_b \tan \alpha \\ \rightarrow \varphi &= \tan \alpha \end{aligned}$$

$$\epsilon = \varphi - \alpha = \tan \alpha - \alpha$$

$$\begin{cases} r = \frac{r_b}{\cos \alpha} \\ \epsilon = \tan \alpha - \alpha \end{cases}$$



Focalisons-nous sur l'interaction entre 2 dents de formes quelconques:



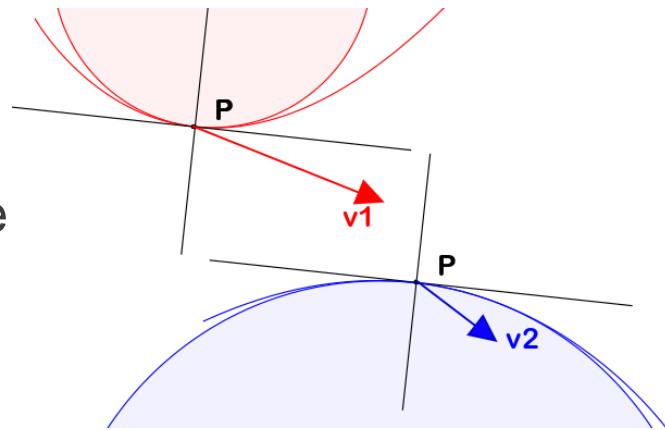
Les 2 dents considérées se comportent comme 2 leviers en contact au point P.

Rappel: propriété de 2 solides en contact :

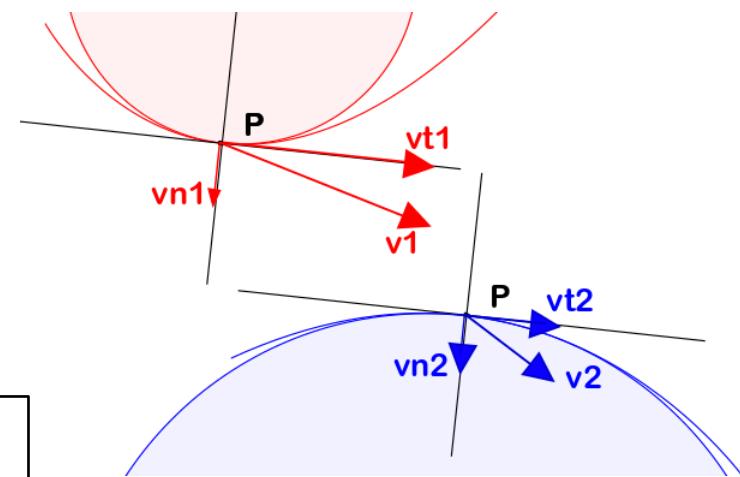
- Les points de contact entre les solides partagent le même plan tangent
- Les forces de contact sont perpendiculaires au plan tangent et définissent la **ligne d'action**

Propriété de 2 solides en contact et en mouvement:

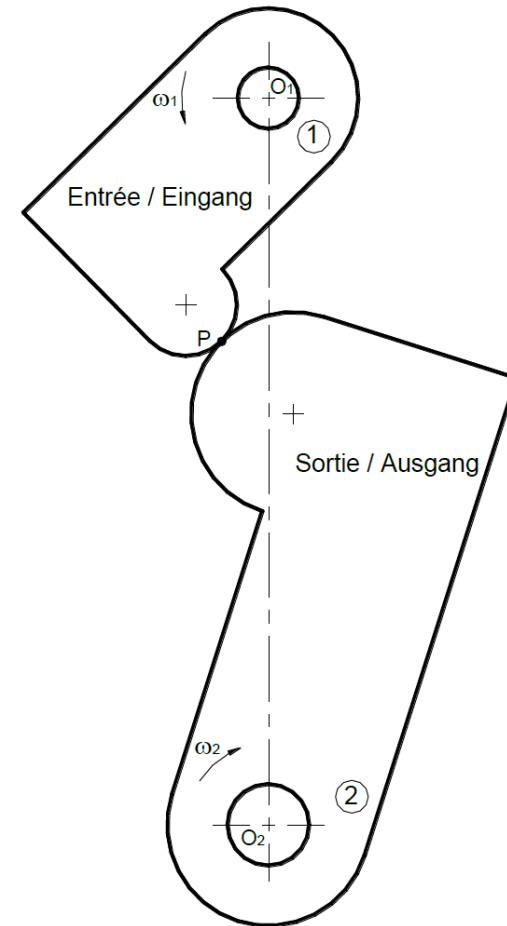
- Considérons chaque pièce, qui ont chacune leur propre vitesse, séparément:



- Les vitesses se décomposent en composantes normales et tangentielles au point de contact:
- Pour maintenir le contact, il faut  $v_{n1} = v_{n2}$ 
  - Si  $v_{n1} < v_{n2}$ , il y a perte de contact
  - Si  $v_{n1} > v_{n2}$ , les 2 pieces interfèrent (pas physique)



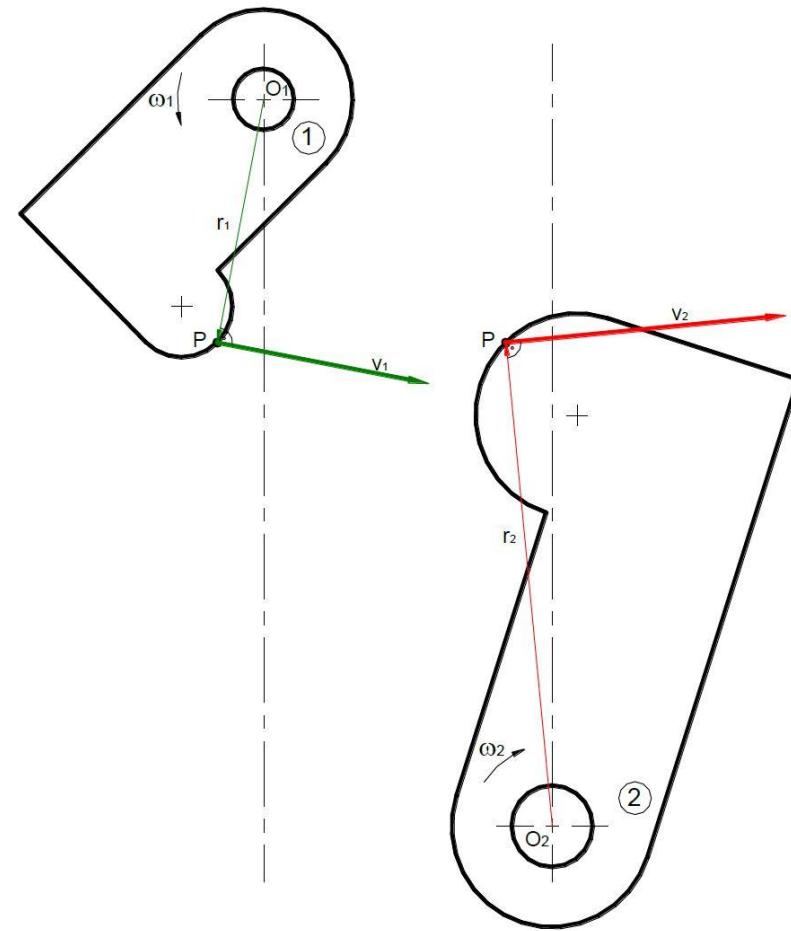
2 Leviers en contact et en mouvement:



Vitesses du point de contact

P de chaque pièce:

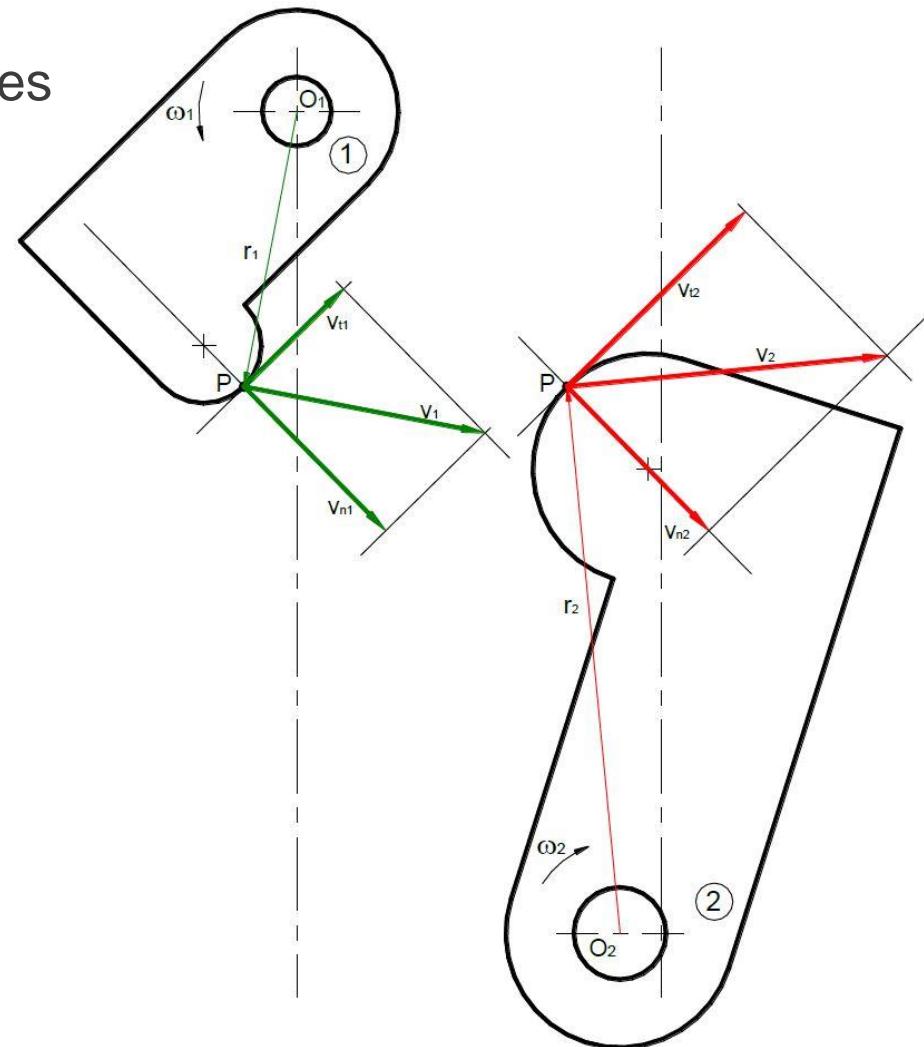
$$\begin{cases} v_1 = \omega_1 r_1 \\ v_2 = \omega_2 r_2 \end{cases}$$



Décomposition des vitesses  
selon les composantes normales  
et tangentielles:

Condition pour maintenir le  
contact:

$$v_{n1} = v_{n2}$$



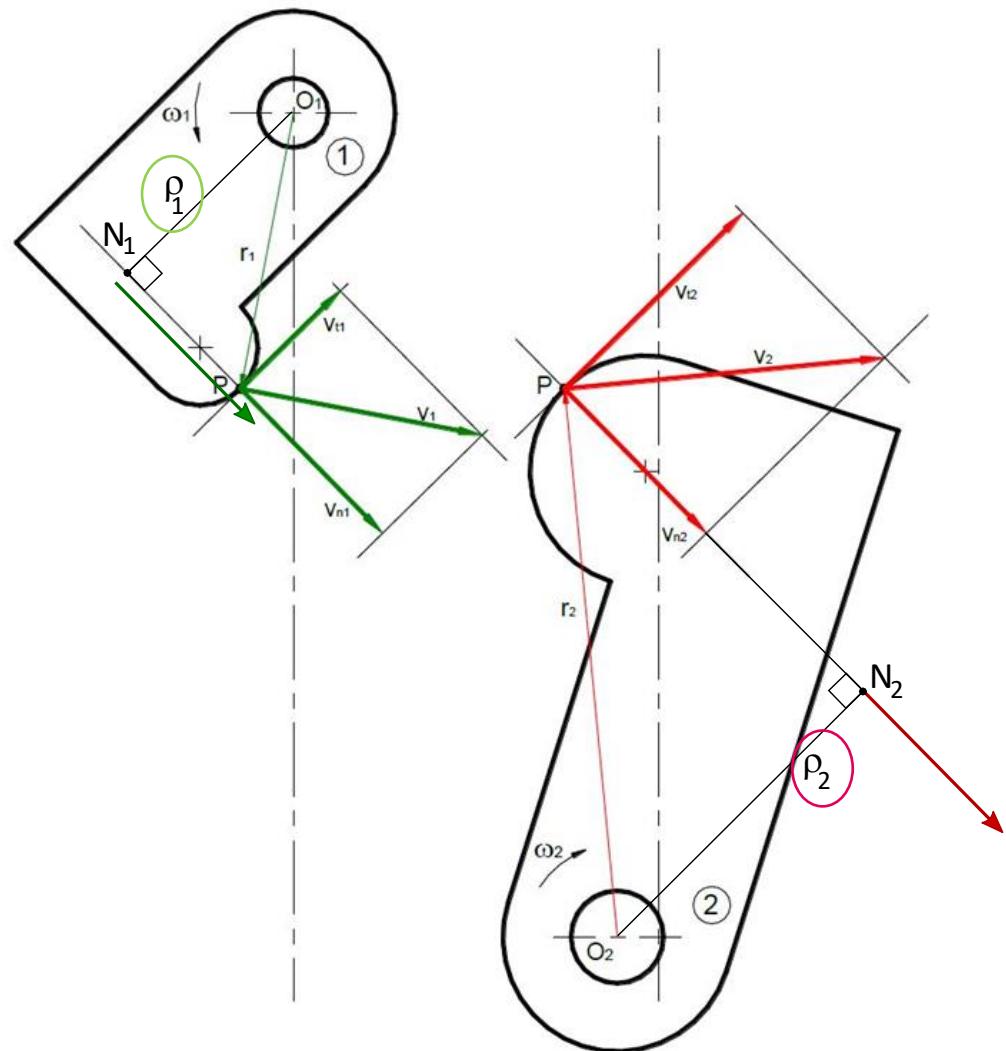
Condition pour maintenir le contact:

$$v_{n1} = v_{n2}$$

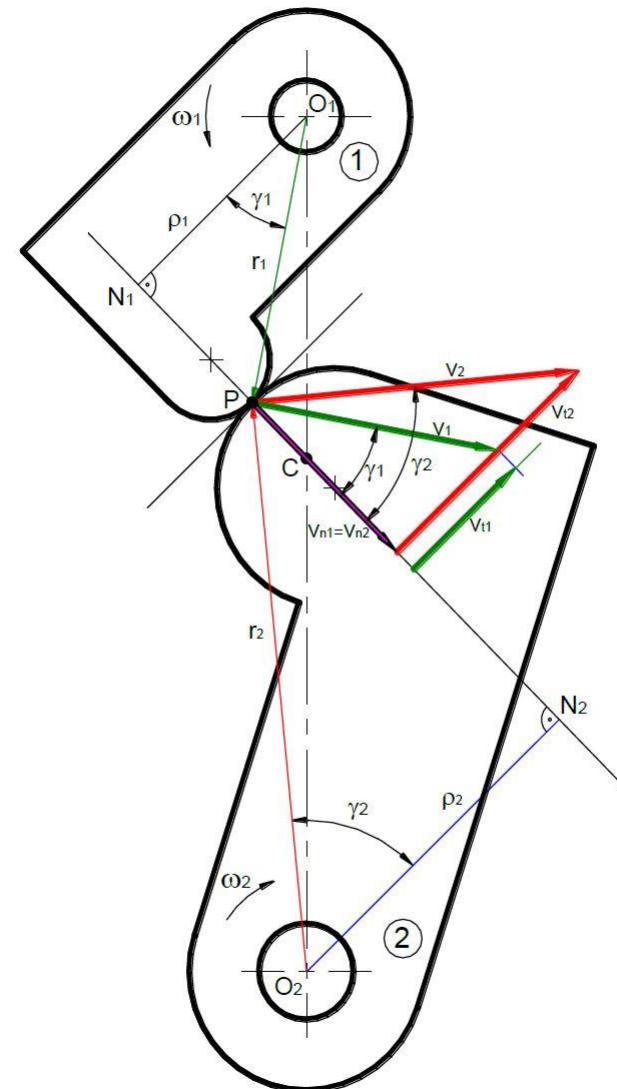
De plus,

$$\begin{cases} v_{n1} = \rho_1 \omega_1 \\ v_{n2} = \rho_2 \omega_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$



La ligne d'action couple la droite  $O_1O_2$  en  $C$



Condition pour maintenir le contact:

$$v_{n1} = v_{n2}$$

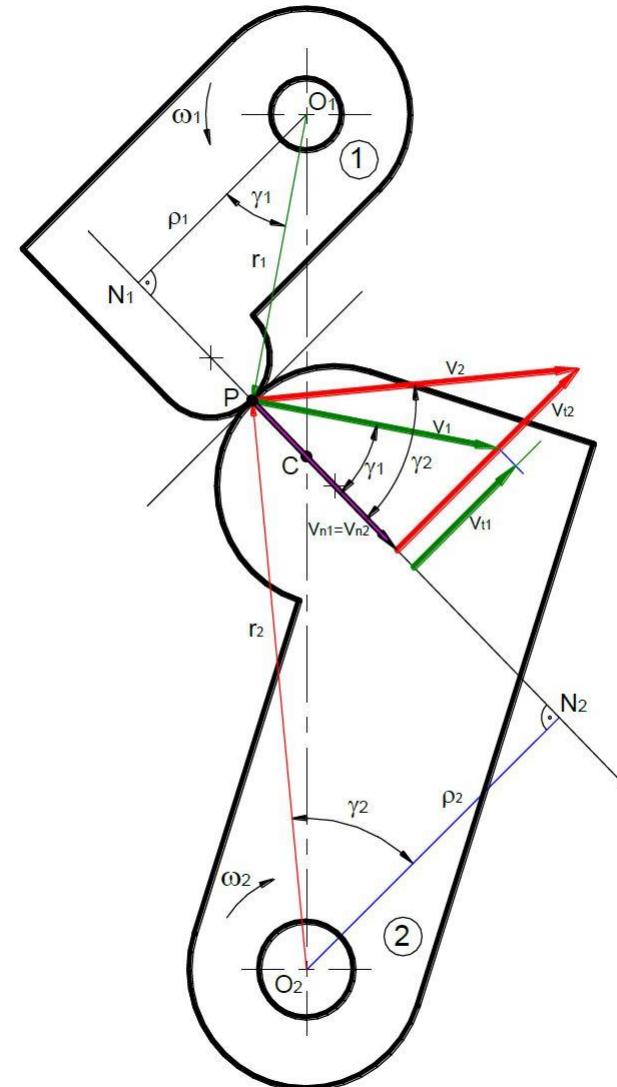
Avec:

$$\begin{cases} v_{n1} = \rho_1 \omega_1 \\ v_{n2} = \rho_2 \omega_2 \\ \Rightarrow i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \end{cases}$$

De plus, les triangles  $O_1 N_1 C$  et  $O_2 N_2 C$  sont semblables

$$\Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{O_2 C}{O_1 C}$$

$$\Rightarrow i = \frac{O_2 C}{O_1 C}$$



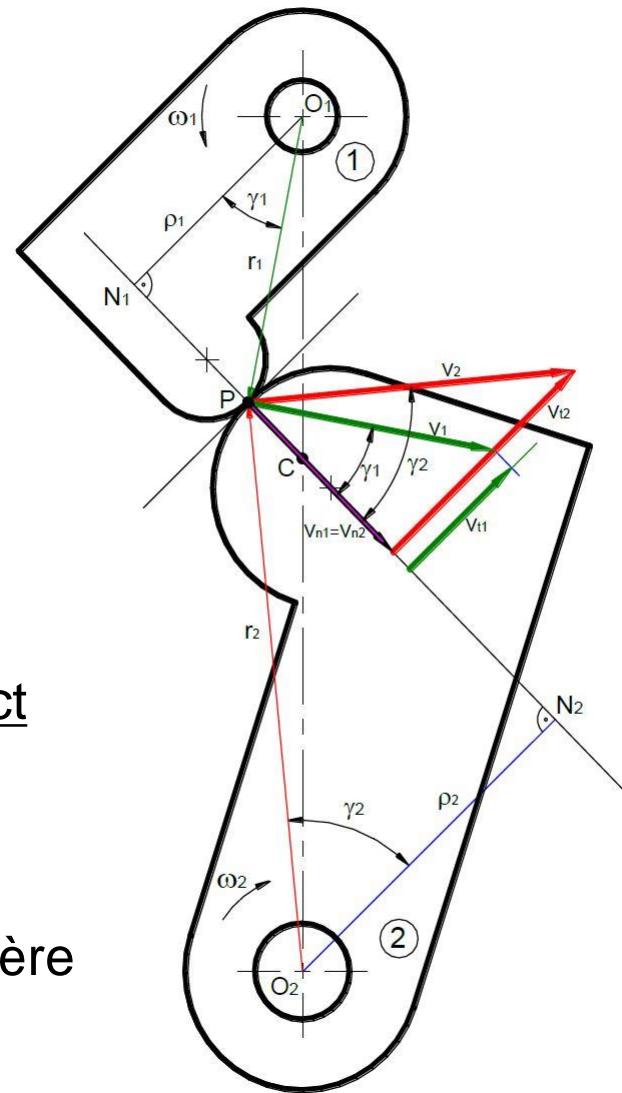
Rapport de transmission:  $i = \frac{O_2 C}{O_1 C}$

Pour être homocinétique,  $i = \text{const}$

La condition pour qu'un profil de denture produise un mouvement homocinétique est donc:

La normale commune en tout point de contact entre les deux profils doit couper la ligne des centres en un point fixe C, appelé le pôle.

Deux profils qui se comportent de cette manière sont des **profils conjugués**.



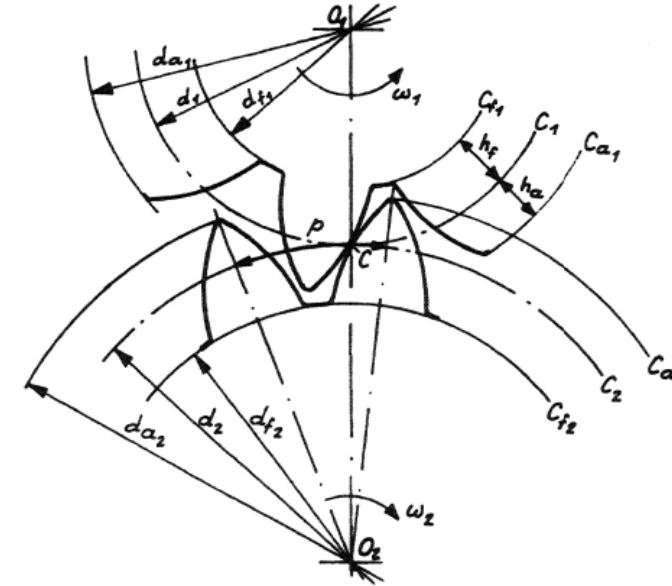
Rapport de transmission:  $i = \frac{O_2 C}{O_1 C}$

Définition: cercle primitif

On définit les cercles primitifs de deux engrenages comme les cercles centrés sur les centres de rotation des engrenages et passant par le pôle C

Deux engrenages se comportent comme deux cylindres qui roulent sans glisser et qui ont comme diamètres les diamètres primitifs des engrenages.

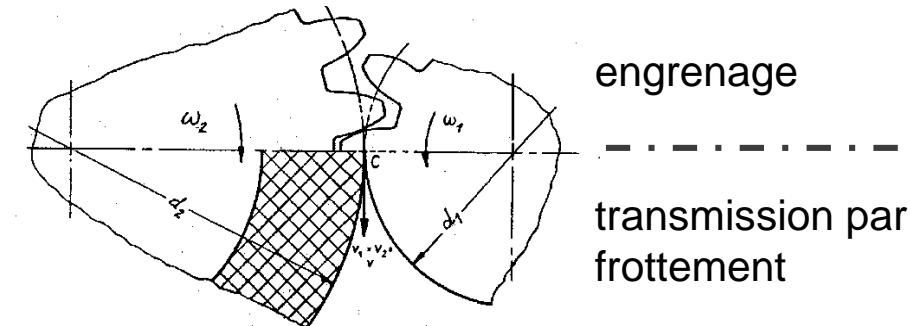
Ce sont les diamètres primitifs des engrenages qui déterminent le rapport de transmission.



$C_{1,2}$  = cercles primitifs

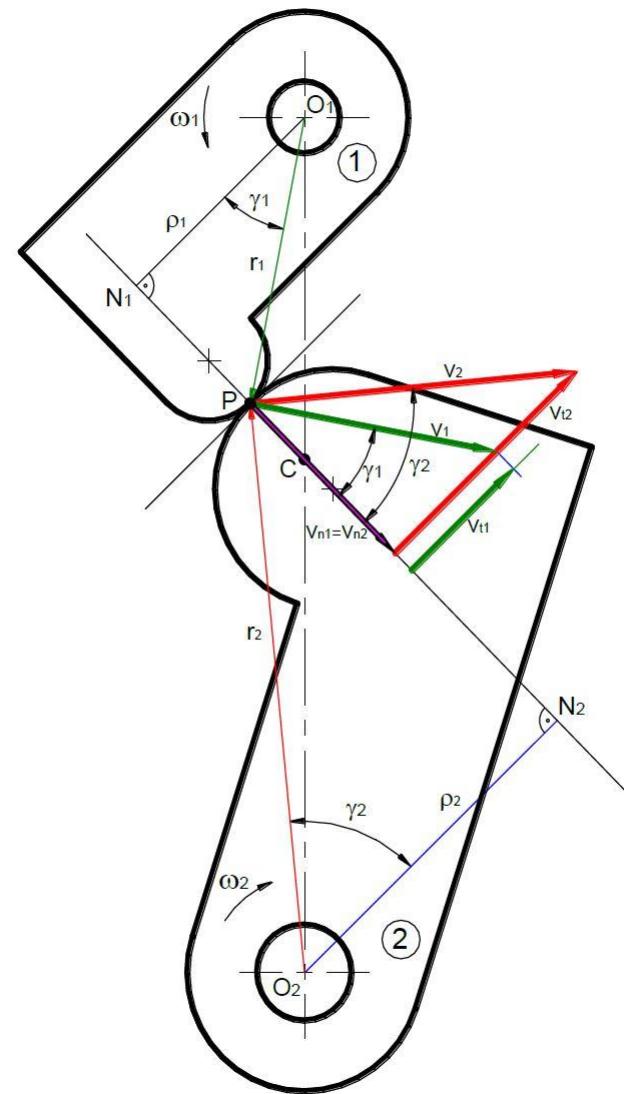
$C_{a1,2}$  = cercles de tête

$C_{f1,2}$  = cercles de pied

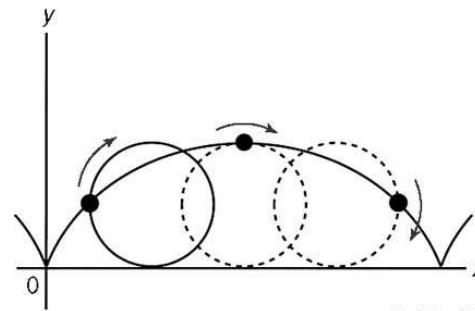


Lien avec le profil en développante:

$\rho_1$  et  $\rho_2$  sont les rayons de base de la développante, et  
 $O_2C$  et  $O_1C$  sont les rayons primitifs

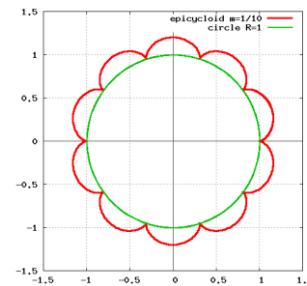


- Cycloïde: lieu du point sur un cercle lorsque ce dernier roule sans glisser sur une **droite**

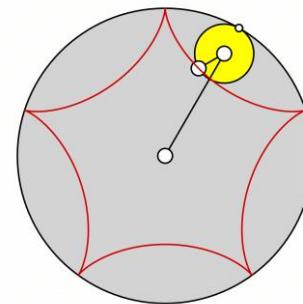


Tech-Graphics

- Epicycloïde: lieu du point sur un cercle lorsque ce dernier roule sans glisser sur **l'extérieur d'un cercle**

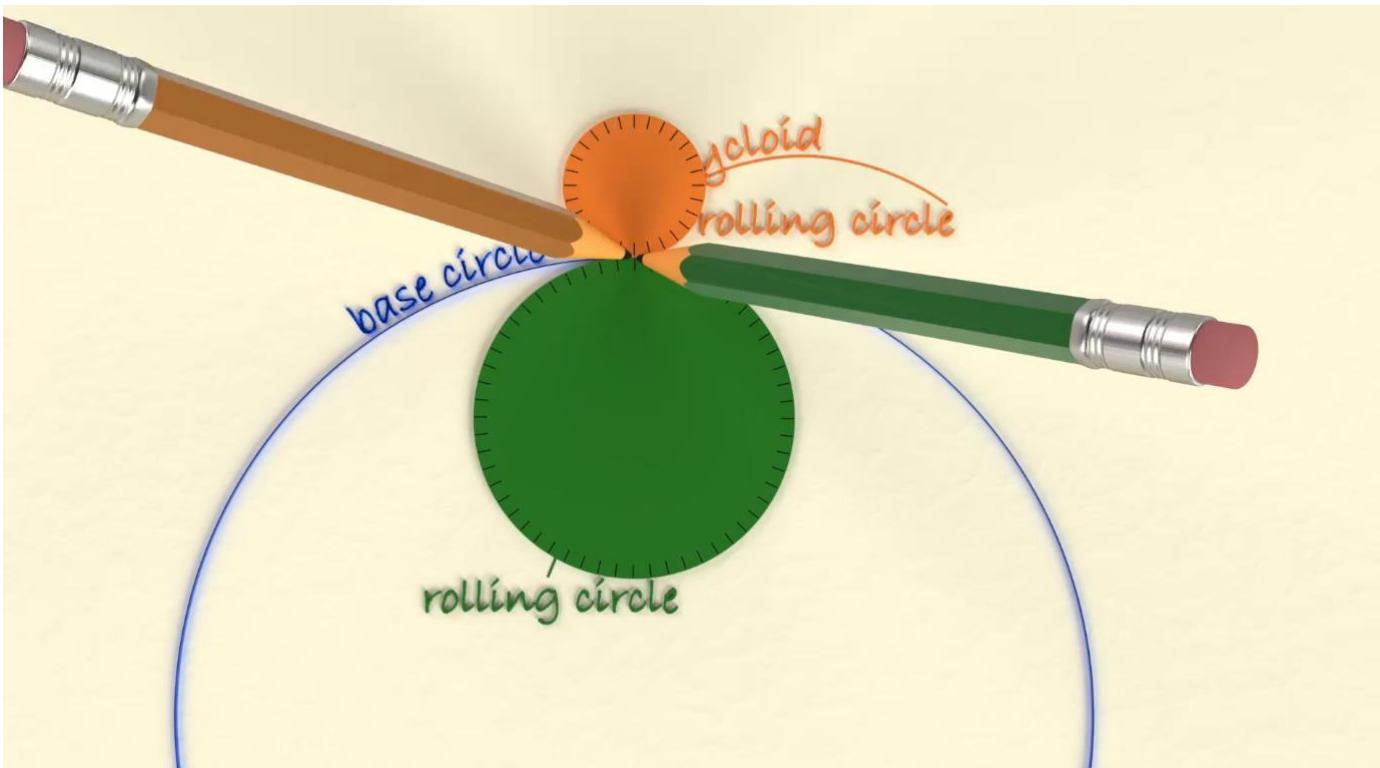


- Hypocycloïde: lieu du point sur un cercle lorsque ce dernier roule sans glisser sur **l'intérieur d'un cercle**



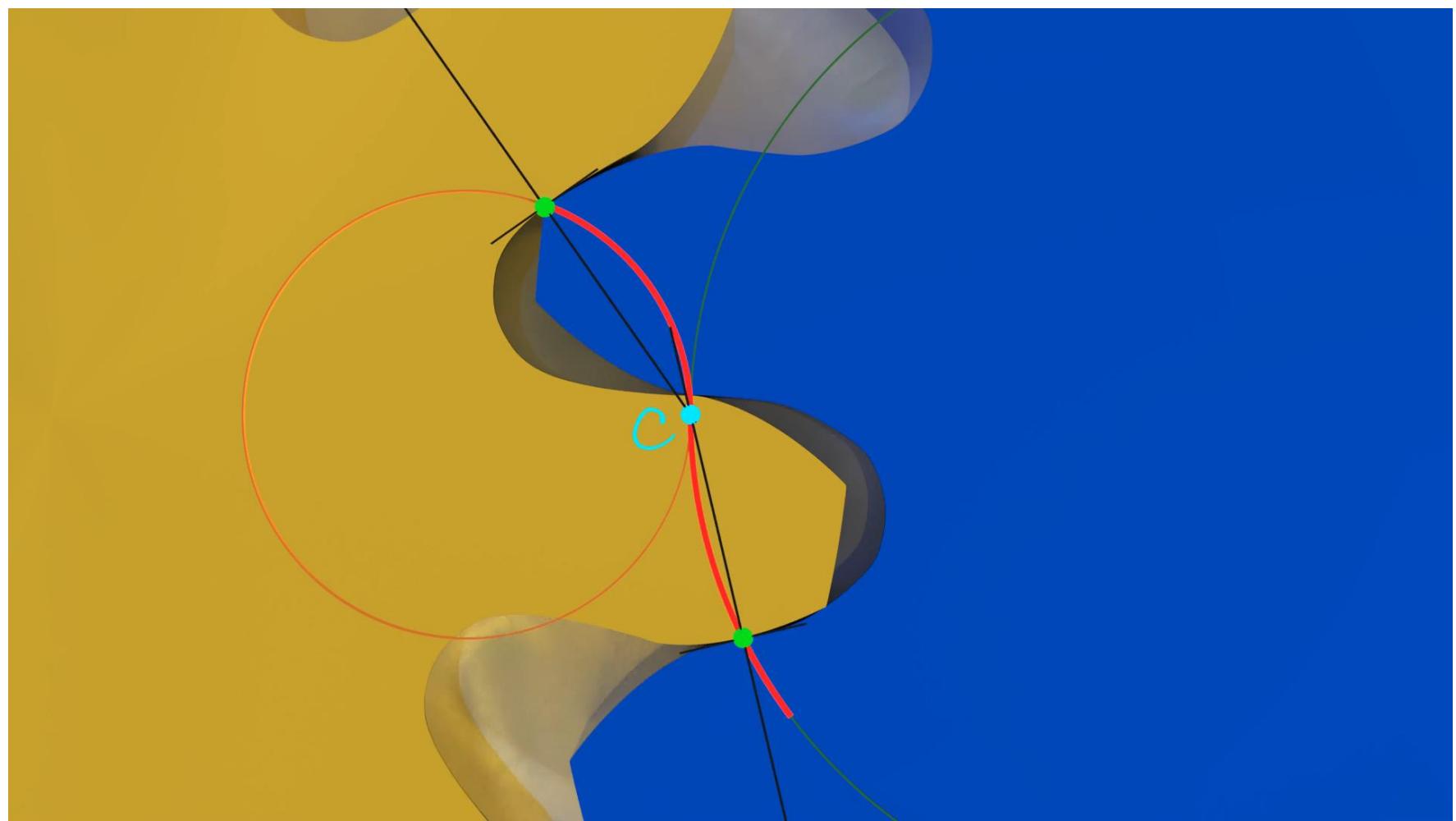
Un profil épicycloïdal a pour conjugué un profil hypocycloïdal et réciproquement:

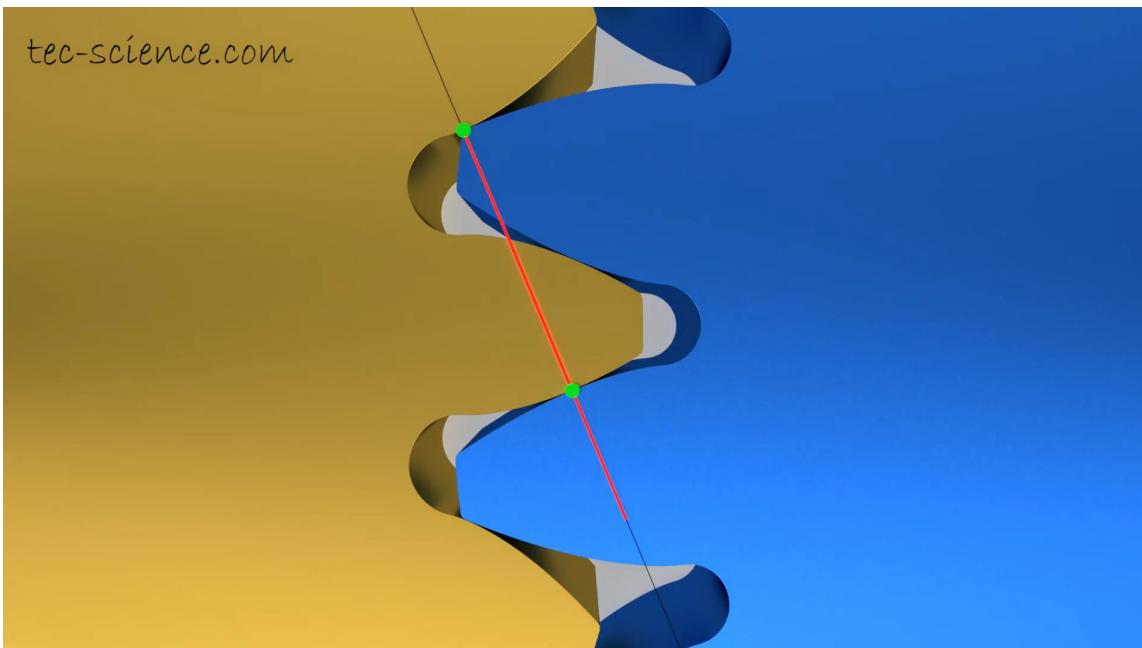
#### 4. Exemple supplémentaire de profil: profil cycloïdal



Source: <https://www.tec-science.com/mechanical-power-transmission/cycloidal-gear/geometry-of-cycloidal-gears/>

#### 4. Exemple supplémentaire de profil: profil cycloïdal





Profil en cycloïde:

