Commande non linéaire

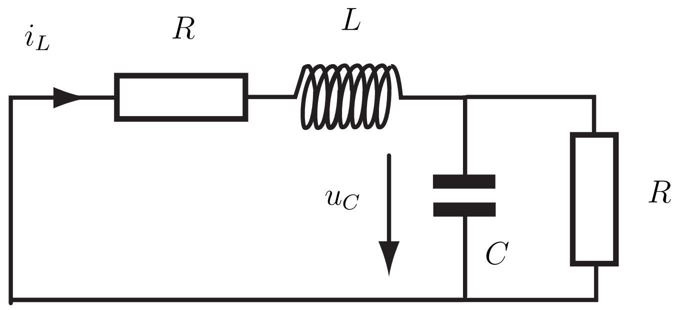
STI - Master

Série V

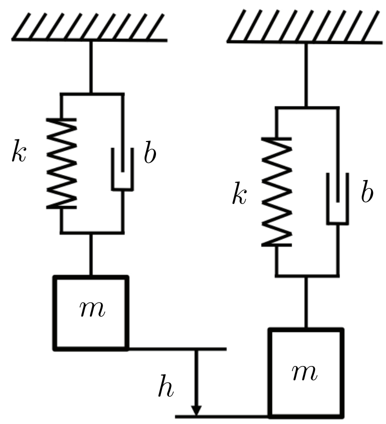
Dr. Ph. Müllhaupt

Exercice V.1

Soit les deux systèmes suivants (identiques à ceux de l'exercice III.1, série précédante) :
a) Un circuit RLC



avec comme paramètres physiques $R = 1$ [kΩ], $C = 33$ [nF], et $L = 1$ [μH] et
b) L'oscillateur masse ressort amorti (dashpot)



avec comme paramètres physiques $m = 0.2$ [kg], $k = 100$ [N/m] et $b = 0.01$ [Ns/rad].

1. Poser
$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \qquad Q = I$$
et résoudre l'équation de Lyapunov
$$A^T P + PA = -Q$$

afin de déterminer les trois inconnues p_{11}, p_{12}, p_{22}.

2. Le produit de Kronecker $\otimes$ (à ne pas confondre avec le symbole du produit tensoriel) de deux matrices A et B, traité ici dans le cas particulier des matrices $n \times n$, est défini par

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui produit une matrice $n^2 \times n^2$.
En posant $p = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}^T$ et $q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, montrer que l'on retrouve bien la solution obtenue au point 1 en inversant une matrice 4×4 :

$$p = -(I \otimes A^T + A^T \otimes I)^{-1} q.$$

3. En utilisant la commande `kron` de Matlab, écrire un petit script qui soit équivalent à la commande `lyap`.

Exercice V.2 On considère le système masse ressort de l'exercice V.1 (et IV.1), mais cette fois avec un ressort non linéaire de caractéristique $\sigma(x)$. De plus on détache le ressort de son support et on y connecte une deuxième masse $M = m = 0.2$ [kg] en y appliquant une loi de commande sous la forme d'une force supplémentaire $F = u = -k_p x_1 - k_d \dot{x}_1$, où x_1 dénote la position de la masse M. En désignant par x_2 la position de la masse m, la force dans le ressort est $F_r = \sigma(x_2 - x_1)$ avec $F_r = 0$ lorsque $x_2 - x_1 = L$.

1. Trouver le point d'équilibre.
2. Déterminer l'énergie cinétique E_c.
3. Confirmer que l'énergie potentielle $E_p(x_1, x_2)$ est égale à

$$E_p = -\int_{\xi = x_2 - L}^{x_1} \sigma(x_2 - \xi) d\xi.$$

4. En utilisant le candidat de Lyapunov

$$V = E_c + E_p + \frac{1}{2} k_p x_1^2$$

et le bilan de puissance, montrer que le système convergera au point d'équilibre (utiliser le théorème d'invariance) pour toutes les valeurs de $k_p > 0$ et $k_d > 0$ lorsque la caractéristique σ appartient aux bons cadrants.