

Systèmes du second ordre

Plan de phase

Analyse et Commande des Systèmes Non Linéaires

Leçon 2

- 1 Plan de phase pour les système du second ordre
- 2 Techniques de représentation du plan de phase
- 3 Systèmes linéaires du second ordre
- 4 Système masse ressort
- 5 Graphe des pentes
 - Elimination du temps explicitement
 - Elimination du temps implicitement
 - Méthode des isoclines
 - Exemple : oscillateur de Van der Pol
- 6 Cycle limite
 - Classification des cycles limites
- 7 Index topologique
 - Théorème de l'index
- 8 Théorème de Bendixson
- 9 Impossibilité du chaos planaire

Plan de phase pour les systèmes du second ordre

Variables de phase q et \dot{q} ; équation différentielle :

$$\ddot{q} = c(q, \dot{q}), \quad (1)$$

Définition des variables d'état

$$x_1 = q$$

$$x_2 = \dot{q}$$

Plan de phase pour les systèmes du second ordre

Solution, variables q, \dot{q}

$$q = \mathcal{Q}_q(t)$$

$$\dot{q} = \mathcal{Q}_{\dot{q}}(t)$$

$$\frac{d\mathcal{Q}_{\dot{q}}}{dt} = f(\mathcal{Q}_{\dot{q}}, \mathcal{Q}_q)$$

Solution, variables x_1, x_2

$$x_1 = \mathcal{X}_1(t)$$

$$x_2 = \mathcal{X}_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{X}_2 = f(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$$

Techniques de représentation du plan de phase

- ➊ Méthodes informatiques
 - Solutions numériques pour diverses conditions initiales
 - Graphe des pentes
- ➋ Méthodes papier crayon
 - Solution explicite des équations
 - ➊ en éliminant le temps explicitement
 - ➋ en éliminant le temps implicitement
- ➌ Méthodes mixtes
 - Méthode des isoclines

Systèmes linéaires du second ordre

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Caractéristique des valeurs propres

- 1 Les valeurs propres sont toutes les deux réelles et de même signe. C'est un noeud.
- 2 Elles sont réelles mais de signe opposé. C'est un point selle.
- 3 Elles sont purement imaginaires. C'est un centre.
- 4 Elles sont complexes conjuguées. C'est un foyer.

Système masse ressort

Mécanique analytique de Lagrange

$$E_c = \frac{1}{2}\dot{q}^2 = \frac{1}{2}\dot{x}_2^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2}kx_1^2$$

$$\mathcal{L} = E_c - E_p$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \dot{q} + kq = 0$$

Equations

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -kx_1$$

Graphe des pentes

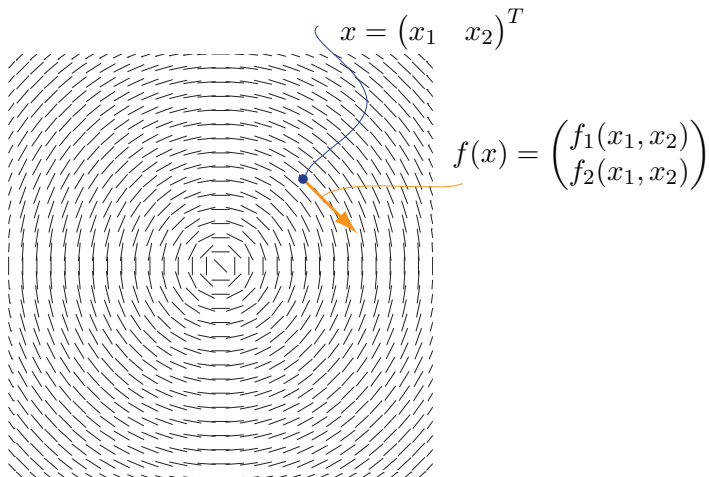


FIGURE : Graphique des éléments de pente pour le système masse-ressort.

Elimination du temps explicitement

$$x(t) = x_0 \cos t + \dot{x}_0 \sin t$$

$$\dot{x}(t) = -x_0 \sin t + \dot{x}_0 \cos t$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$x^2 + \dot{x}^2 = x_0^2 + \dot{x}_0^2,$$

cercle centré en $(0, 0)$ de rayon $\sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2}$

Elimination du temps implicitement

$$\dot{x}_1 = x_2 = \frac{dx_1}{dt}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 = \frac{dx_2}{dt}$$

$$\frac{dx_1}{x_2} = -\frac{dx_2}{x_1} = dt$$

$$\int x_2 dx_2 = - \int x_1 dx_1$$
$$x_1^2 + x_2^2 = c = x_{10}^2 + x_{20}^2$$

La relation avec le paramétrage temporel est perdue

Méthode des isoclines

En variant la pente, il est alors possible d'obtenir un ensemble de lieux. Ainsi, en partant de l'équation différentielle $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$ et $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$, et en éliminant la différentielle du temps dt :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \alpha = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

Pour le système masse ressort :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{-x_1}{x_2} \\ x_2 &= -\frac{1}{\alpha}x_1.\end{aligned}$$

Méthode des isoclines

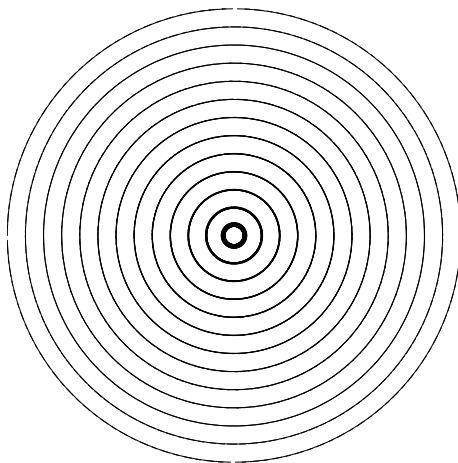


FIGURE : La méthode des isoclines respecte mieux la symétrie du cercle et donne un aspect plus naturel que la grille grille uniformément espacée.

Exemple : oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

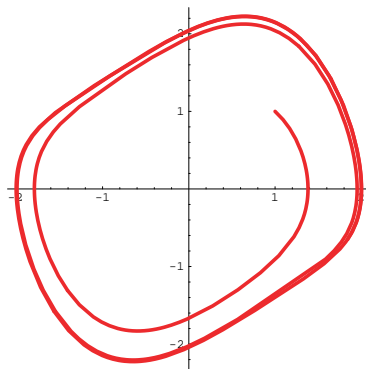
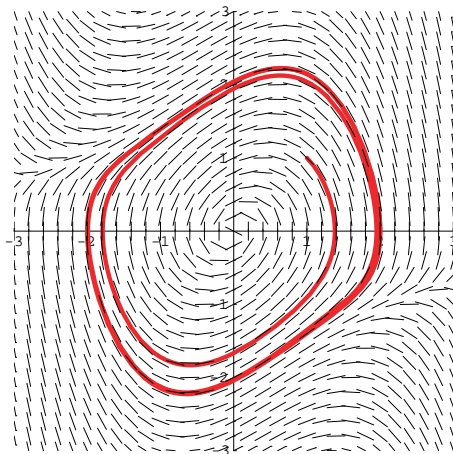


FIGURE : $x_1(0) = 1$ et $x_2(0) = 1$; $\epsilon = 0.5$.

Exemple : oscillateur de Van der Pol

Graphe des pentes

avantageux lors d'un grand nombre de conditions initiales



Exemple : oscillateur de Van der Pol

Méthode des isoclines

$$\alpha = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = -\epsilon(x^2 - 1) - \frac{x}{\dot{x}}$$

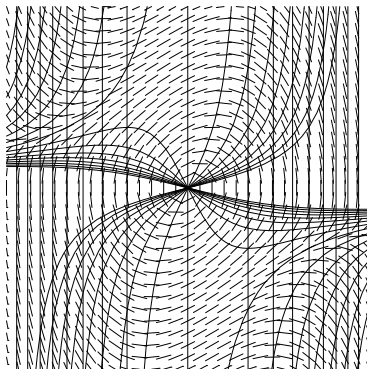


FIGURE : Méthode des isoclines appliquée à l'oscillateur de van der Pol.

Cycles limites

Definition

Un système $\dot{x} = f(x)$ possèdent un cycle limite \mathcal{C} s'il existe un interval de temps $[t_0; t_0 + T[$ et un point de départ $x_0 \in \mathcal{C}$, tel que en désignant par $\mathcal{X}(x_0, t)$ la solution de système avec pour condition initiale $x(t_0) = x_0 = \mathcal{X}(x_0, t_0)$ on ait :

- $\mathcal{X}(x_0, t) \in \mathcal{C} \quad \forall t \in [t_0; t_0 + T[$,
- $\mathcal{X}(x_0, T) = x_0$.

Classification des cycles limites

Definition

Un cycle limite \mathcal{C} est dit :

- ① **stable** : si toutes les trajectoires dans un voisinage du cycle $\rightarrow \mathcal{C}$.
- ② **instable** : si toutes les trajectoires divergent de \mathcal{C} .
- ③ **semi-stable** : si certaines trajectoires convergent vers \mathcal{C} .

Index topologique

Index en un point du plan de phase

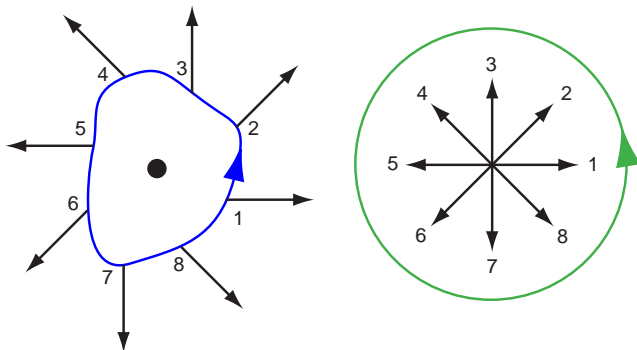
- 1 Une courbe autour du point auquel l'index est évalué.
- 2 Une paramétrisation de la courbe dans le sens trig. +.
- 3 Une suite arbitraire de points de la courbe, $(x_i, i = 1, \dots, n)$, avec $x_n = x_1$.
- 4 On calcule la suite $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$.
- 5 On représente ces vecteurs avec une origine commune.

Definition

L'index mesure alors l'angle modulo 2π que l'extrémité des vecteurs f_i parcourent dans le sens trigonométrique positif.

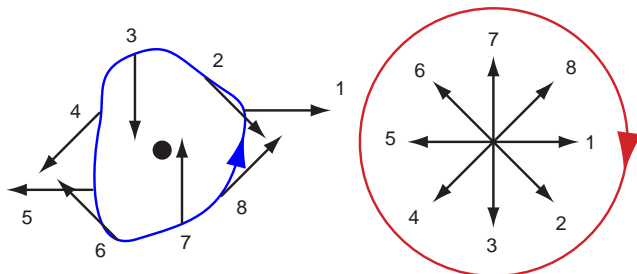
Index ; exemple 1

Index +1



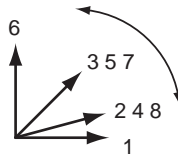
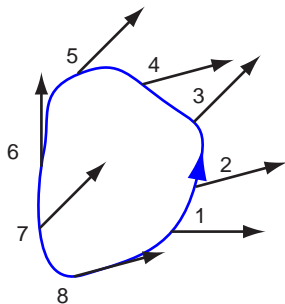
Index ; exemple 2

Index -1



Index ; exemple 3

Index 0



Théorème de l'index

Theorem

(Th. de l'index de Poincaré) Soit N le nombre de noeuds, centres et de foyers et S le nombre de points selles. Si un cycle limite existe, les points singuliers (points \bar{x} tels que $f(\bar{x}) = 0$) que le cycle encercle sont tels que $N = S + 1$.

Theorem

(Somme des index) Soit une courbe particulière donnée. L'index de cette courbe est la somme des index de tous les points d'équilibre compris à l'intérieur de cette courbe.

Théorème de Bendixson

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

Theorem

Pour un tel système, aucun cycle limite ne peut exister dans une région Ω du plan de phase dans laquelle $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ ne s'annule pas ni ne change de signe.

Théorème de Bendixson (Démonstration)

C'est une conséquence du théorème de Stokes. $\frac{dx_1}{dt} = f_1$ et $\frac{dx_2}{dt} = f_2$,

$$dt = \frac{f_1}{dx_1} = \frac{f_2}{dx_2}$$

$\omega = -f_1 dx_2 + f_2 dx_1$ s'annule le long du cycle.

$$\oint \omega = \iint d\omega$$

$$0 = \oint -f_1 dx_2 + f_2 dx_1 =$$

$$\begin{aligned} & \iint -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 \\ & + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \\ & = - \iint \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

Impossibilité du chaos planaire

Theorem

Si une trajectoire demeure dans une région finie Ω alors une des trois propositions suivantes est vraie :

- ❶ *La trajectoire va vers un équilibre.*
- ❷ *La trajectoire tend asymptotiquement vers un cycle limite.*
- ❸ *La trajectoire est elle même un cycle limite.*