Introduction
Système, Equilibre et Particularités

Analyse et Commande des Systèmes Non Linéaires

Leçon 1

Systèmes avec entrées et sorties

Prinicipe de superposition

- Entrée : u_1 et u_2
- Sortie : y_1 et y_2

La réponse à la somme des deux entrées individuelles particulières $u = u_1 + u_2$ est la somme des réponses individuelles, c.-à-d. $y = y_1 + y_2$.

Système non linéaire

Le prinicipe de superposition n'est pas respecté

Classe de systèmes

La classe de système est celle décrivant les modèles de systèmes physiques qui peuvent se représenter par un ensemble d'équations différentielles ordinaires.

Description (avec entrée)

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Description (sans entrée)

$$\dot{x} = f(x)$$

Cas particulier : systèmes linéaires

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T \; u = (u_1, u_2, \dots u_m)^T$$

Solution de l'équation différentielle

Système

$\dot{x} = f(x)$

Solution

$\mathcal{X}(x_0, t)$

- C'est une trajectoire temporelle
- Condition initiale x_0
- Trajectoire unique pour une condition initiale donnée
- Instant t indique lorsque x prend la valeur $\mathcal{X}(x_0, t)$
- Satisfait l'équation différentielle $\frac{d}{dt}\mathcal{X}(x_0, t) = f(\mathcal{X}(x_0, t))$

Prinicipe de superposition et solution

Système (non linéaire et linéaire)

$\dot{x} = f(x)$

Principe de superposition (système linéaire)

- Solutions : $\mathcal{X}(x_0, t)$ et $\mathcal{X}(\bar{x}_0, t)$
- Conditions initiales : x_0 et $\bar{x}_0$

Lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\alpha\mathcal{X}(x_0, t) + \beta\mathcal{X}(\bar{x}_0, t)$$

est également une solution.

Equilibre

Système sans entrée

$\dot{x} = f(x)$

Equilibre

- Toute solution $\bar{x}$ telle que $f(\bar{x}) = 0$.
- Lorsque l'état x est à l'équilibre $\bar{x}$, pas de dynamique.
- Plusieurs équilibres isolés possibles.

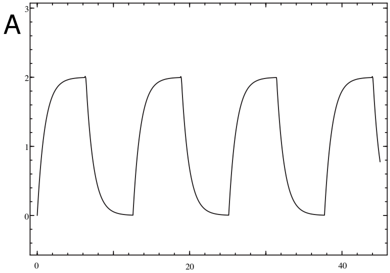
Particularité I) Réponse indicielle disymétrique

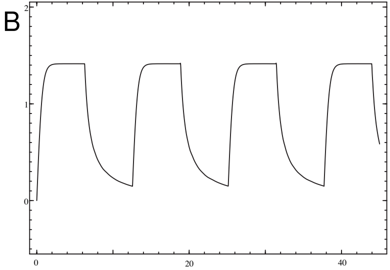
A) Système linéaire : Réponse indicielle symétrique

$\dot{x} = -x + u$

B) Système non linéaire particulier : Réponse indicielle disymétrique

$\dot{x} = -|x|x + u$





Particularité II) Termes d'ordre supérieur

Système

$\dot{x} = -x + x^2$

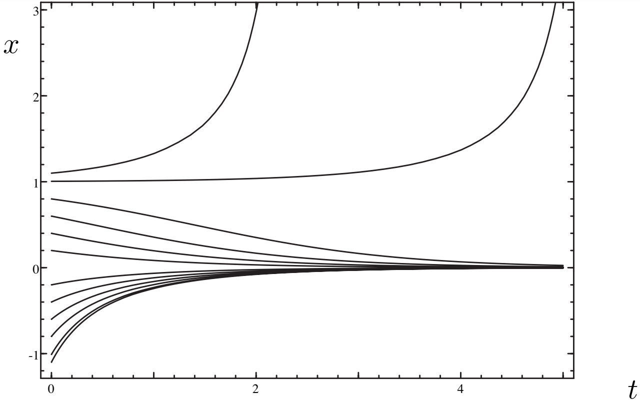
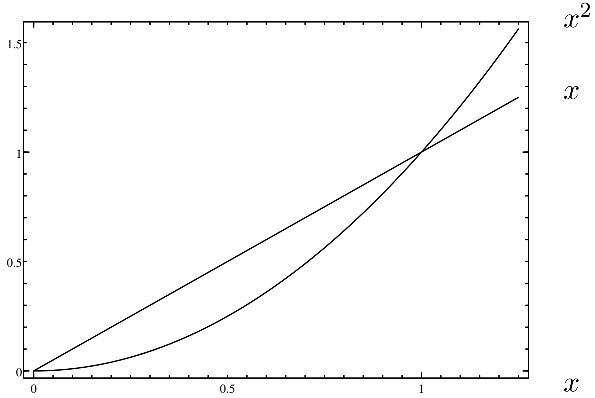


FIGURE : $x(0)$: ± 0.2, ± 0.4, ± 0.6, ± 0.8, ± 1.01, ± 1.1.

Particularité II) Termes d'ordre supérieur

Signe devant $\dot{x}$

Pour $0 \leq x < 1$, $-x$ domine x^2



Particularité III) Points d'équilibre isolés multiples

En examinant...

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + x^2 \\ &= x(x-1)\end{aligned}$$

... il y a deux points d'équilbre :

- Point d'équilibre $x = 0$
- Point d'équilibre $x = 1$

Particularité IV) Explosion en temps fini

Système linéaire

Instabilité bornée par une exponentielle.

$$\dot{x} = 3x$$

$$\mathcal{X}(x_0, t) = x_0 e^{3t}$$

Exemple précédent $\dot{x} = -x + x^2$

$$\mathcal{X}(x_0, t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}}$$

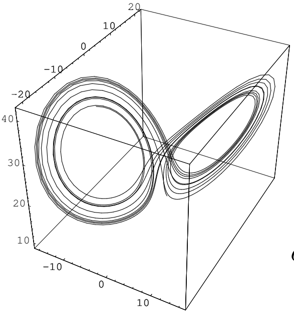
La solution diverge vers l'infini en un temps fini, lorsque :

$$x_0 > 1, t \to -\ln\left(\frac{x_0 - 1}{x_0}\right)$$

Orbites chaotiques

Oscillateur de Lorenz

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\
\dot{y} &= rx - y - zx \\
\dot{z} &= -bz + xy,
\end{aligned}
$$



$\sigma = 10,\ b = \frac{8}{3},\ r = 28$

Objectif

Transformer le système en jouant avec l'entrée

- Comprendre et définir la stabilité
- Modifier le type et le nombre de points d'équilibre
- Construire des lois de commande $u = k(x)$ stabilisante
- Modifier les trajectoires du système initial
- Obtenir un domaine de stabilité aussi grand que possible