Commande non linéaire

STI - Master

Série VII

Dr. Ph. Müllhaupt

Exercice VII.1

Soit le système en représentation d'état

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= (x_3 - x_1)^3 + \cos(x_1 + x_3)u\\ \dot{x}_3 &= x_4\\ \dot{x}_4 &= (x_1 - x_3)^3\end{aligned}$$

1. Linéariser entrée-sortie le système en choisissant la sortie $y = x_1$.
2. Vérifier si le schéma est stable (utiliser la théorie de Lyapunov, et, éventuellement, la dynamique des zéros).
3. Est-ce que le schéma est stable de manière globale ?

Pour linéariser le système entrée-sortie, il suffit de dériver la sortie jusqu'à ce que l'entrée apparaisse.

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2\\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 = (x_3 - x_1)^3 + \cos(x_1 + x_3)u\end{aligned}$$

On pose alors $\ddot{y} = v$ où v représente une nouvelle entrée. En choisissant l'erreur $e = y_c - y$ avec la consigne $y_c = 0$ on peut imposer le polynôme caractéristique

$$\lambda(s) = s^2 + 2ks + k^2$$

avec les deux racines en $-k$ avec $k > 0$ le gain, et donc $\lambda(s)E(s) = 0$, autrement dit

$$\begin{aligned}(s^2 + 2ks + k^2)E(s) &= 0\\ \ddot{e} + 2k\dot{e} + k^2 e &= 0\\ \ddot{y} + 2k\dot{y} + k^2 y &= 0\\ v + 2kx_2 + k^2 x_1 &= 0\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant $v = (x_3 - x_1)^3 + \cos(x_1 + x_3)u$, la loi de commande suivante est obtenue

$$u = \frac{1}{\cos(x_1 + x_3)}\left(-(x_3 - x_1)^3 - 2kx_2 - k^2 x_1\right)$$

On constate que celle-ci n'est valable que lorsque $x_1 - x_3 \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$. La stabilité en boucle fermée n'est donc pas globale.

La dynamique des zeros est obtenue lorsqu'on particularise la dynamique sous les conditions $y = \dot{y} = \ddot{y} = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -x_3^3\end{aligned}$$

Pour montrer que cette dynamique est stable considérons le candidat de Lyapunov

$$V = \frac{1}{4}x_3^4 + \frac{1}{2}x_4^2$$

que l'on constate immédiatement être une fonction définie positive. Calculons la dérivée

$$\dot{V} = x_3^3\dot{x}_3 + x_4\dot{x}_4 = x_3^3x_4 - x_4x_3^3 = 0$$

Ainsi, la fonction V est conservée. Le système suit les lignes de niveau $V = C$. En effet, la quantité

$$C = \frac{1}{4}x_3(0)^4 + \frac{1}{2}x_4(0)^2 = \frac{1}{4}x_3(t)^4 + \frac{1}{2}x_4(t)^4$$

est constante puisque déterminée par les conditions initiales et que $\dot{V} = 0$. La dynamique est stable mais pas asympototiquement. Pour que la linéarisation entrée-sortie soit applicable, il est nécessaire de vérifier que le transitoire vers la dynamique des zéros demeure borné et que la dynamique des zéros soit stable. En d'autres termes, il s'agit de vérifier la stabilité de

$$\begin{aligned}\dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= (C_1e^{-kt} - x_3)^3\end{aligned}$$

ce qui est confirmé par simulation, et l'on remarque bien que les trajectoires convergent vers un cycle limite. La démonstration formelle sort toutefois du cadre de l'exercice proposé.

Exercice VII.2

Soit les fonctions de transfert

$$G_1(s) = \frac{s+1}{s^2 - 2s + 1} \qquad G_2(s) = \frac{s-2}{s^2 - 2s + 1}$$

1. Construire des représentations d'état.
2. Utiliser la méthodologie de la linéarisation entrée-sortie pour contrôler les deux systèmes.
3. Est-ce que cela conduit à des schémas de commande stable ?

Pour construire une représentation d'état, une technique consiste à isoler le numérateur et le dénominateur

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 - 2s + 1} \cdot (s+1) = \frac{X(s)}{U(s)}\frac{Y_1(s)}{X(s)}$$

Ensuite on pose $x_1 = \mathcal{L}^{-1}X(s)$. On aboutit donc aux équations

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 - x_1 + u \end{aligned}$$

Ensuite on traite la sortie en utilisant la relation $s + 1 = \frac{Y(s)}{X(s)}$. Ainsi, $Y_1(s) = (s + 1)X(s)$, autrement dit

$$y_1 = \dot{x}_1 + x_1 = x_2 + x_1$$

Pour la représentation d'état associée à $G_2(s)$, seule l'équation de la sortie change, $Y_2(s) = (s - 2)X(s)$, et donc

$$y_2 = \dot{x}_1 - 2x_1 = x_2 - 2x_1.$$

Appliquons la méthode de linéarisation entrée-sortie. Prenons la réalisation de $G_1(s)$ et dérivons la sortie y_1 jusqu'à ce que l'entrée apparaisse. Celle-ci apparaît après une dérivée seulement :

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_2 + \dot{x}_1 = 2x_2 - x_1 + u + x_2 = 3x_2 - x_1 + u$$

On pose alors $\lambda(s) = s + k$ avec $k > 0$ et $e = y_{c1} - y_1 = -y_1$ (consigne nulle). Ensuite, en posant $\lambda(s)E(s) = 0$, ce qui donne $\dot{e} + ke = 0$, on obtient

$$3x_2 - x_1 + u = -ky_1 = -k(x_2 + x_1)$$

En d'autres termes,

$$u = (1 - k)x_1 - (3 + k)x_2$$

Vérifions la dynamique des zéros. On pose pour cela $y_1 = 0 = \dot{y}_1$ ce qui conduit à

$$x_2 + x_1 = 0$$

et l'équation de la dynamique $\dot{x}_1 = x_2$ devient une équation différentielle stable

$$\dot{x}_1 = -x_1.$$

On pourra donc appliquer le schéma de commande. Par contre, en ce qui concerne le deuxième système, la contrainte $y_2 = x_2 - 2x_1 = 0$ conduit à $2x_1 = x_2$ et donc la première équation dynamique de la représentation d'état donne

$$\dot{x}_1 = 2x_1$$

qui est instable. On ne peut donc pas appliquer la méthode de linéarisation entrée-sortie sur le second système. On remarque également que la procédure de linéarisation entrée-sortie appliquée à une fonction de transfert quelconque conduit aux remarques suivantes :

1. Le nombre d'intégrateurs équivalent r est égal au degré relatif de la fonction de transfert, à savoir la différence entre le nombre de pôles et le nombre de zéros.
2. Les valeurs propres de la dynamique des zéros sont identiques aux zéros de la fonction de transfert.

Exercice VII.3

Pour le problème VII.1, calculer les conditions de linéarisation exacte :

1. Involutivité de la famille de champs de vecteurs

$$\{\, g\,,\quad \mathrm{ad}_f g\,,\quad \mathrm{ad}_f^2 g\,\}.$$

2. Plein rang de la matrice

$$\left[\begin{array}{cccc} g & \mathrm{ad}_f g & \mathrm{ad}_f^2 g & \mathrm{ad}_f^3 g \end{array}\right].$$

Construire la sortie linéarisante et le bouclage stabilisant complet. Est-ce que le schéma assure la stabilité globale ?

Le premier crochet donne

$$[f,g] = \begin{pmatrix} -\cos(x_1+x_3) \\ -\sin(x_1+x_3)(x_2+x_4) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le crochet suivant

$$[f,[f,g]] = ad_f^2 g = \begin{pmatrix} 2\sin(x_1+x_3)(x_2+x_4) \\ -\cos(x_1+x_3)(3x_1^2+x_2^2-6x_1x_3+3x_3^2+2x_2x_4+x_4^2) \\ 0 \\ 3\cos(x_1+x_3)(x_1-x_3)^2 \end{pmatrix}$$

Ceci conduit au vecteur ligne annulateur $(0,0,1,0)$. En effet

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & [f,g] & [f,[f,g]] \end{pmatrix} = 0$$

Ainsi la sortie $y = x_3$ semble être un bon candidat pour la sortie linéarisante. Vérifions la seconde condition dite d'accessibilité.

$$\begin{vmatrix} g & [f,g] & [f,[f,g]] & [f,[f,[f,g]]] \end{vmatrix} = 9\cos(x_1+x_3)^4(x_1-x_4)^4$$

et cette condition devient nulle (et donc non satisfaite) lorsque le système aura convergé au point d'équilibre. Ainsi, on ne pourra pas forcer une équation d'erreur exponentiellement stable. Dérivons tout de même la sortie $y = x_3$:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= x_4 \\ \ddot{y} &= (x_1-x_3)^3 && (1) \\ y^{(3)} &= 3(x_1-x_3)^2(x_2-x_4) && (2) \\ y^{(4)} &= 6(x_1-x_3)(x_2-x_4)^2 + 3(x_1-x_3)^2(2(x_3-x_1)^3+\cos(x_1+x_3))u && (3) \end{aligned}$$

et c'est lorsqu'on force $y^{(4)}$ à obéir à une équation différentielle linéaire stable — (par exemple en forçant $y^{(4)} = -4ky^{(3)} - 6k^2\ddot{y} - 4k^3\dot{y} - k^4 y)$ — que se pose le problème de la division par zéro. Le schéma de commande résultant ne conduit pas à la stabilité globale.

Exercice VII.4

On considère la cinématique commandée de la roue qui roule sans glisser dans le plan. Les équations cinématiques sont

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u\cos\theta \\ \dot{y} &= u\sin\theta \\ \dot{\theta} &= v \end{aligned}$$

avec x et y qui désignent la position dans le plan et θ l'angle de la roue. Les entrées sont la vitesse tangentielle u et la vitesse angulaire v.

1. Déterminer les champs de vecteurs associés aux entrées u et v, autrement dit mettre la cinématique sous la forme
$$\dot{x} = g_1(x)u + g_2(x)v$$
où x désigne cette fois l'état du système.
2. Déterminer si la famille $\{g_1, g_2\}$ est involutive.
3. Déterminer une 1-forme ω qui annule la distribution $\{g_1, g_2\}$ (un co-champ perpendiculaire aux deux champs de vecteurs g_1 et g_2 en tout point de l'espace d'état).
4. Calculer $d\omega$ et $d\omega \wedge \omega$.
5. Que signifie la forme ω au niveau physique ? Déduire qu'il n'est pas possible de réduire les coordonnées x, y et θ pour obtenir que deux coordonnées généralisées.

---

1. Champs de vecteurs g_1 et g_2

En comparant la cinématique avec la formulation $\dot{x} = g_1(x)u + g_2(x)v$ on obtient avec $x = \begin{pmatrix} x & y & \theta \end{pmatrix}^T$

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Involutivité de $\{g_1, g_2\}$

Calculons le crochet

$$[g_1, g_2] = \frac{\partial g_2}{\partial x} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial x} g_2 = 0 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculons le déterminant

$$\left| \ g_1 \quad g_2 \quad [g_1, g_2] \ \right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = -(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = -1$$

La famille n'est donc pas involutive. La bonne nouvelle est que l'on peut générer toutes les directions et donc accéder à tout l'espace d'état x, y et θ.

3. La 1-forme ω annulante

Il faut déterminer un vecteur ligne qui annule la matrice $(g_1\, g_2)$. On trouve par inspection et sans trop de difficulté la ligne suivante

$$\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

En écrivant le vecteur ligne sous la forme d'une 1-forme, on obtient la 1-forme

$$\omega = \sin\theta\, dx - \cos\theta\, dy$$

4. Intégrabilité de la 1-forme ω

Calculons

$$d\omega = \cos\theta d\theta \ \wedge dx + \sin\theta \ d\theta \wedge dy \neq 0$$

et ω n'est pas exacte. De plus

$$\begin{aligned} d\omega \wedge \omega &= (\cos\theta\, d\theta \wedge dx + \sin\theta\, d\theta \wedge dy) \wedge (\sin\theta dx - \cos\theta dy) \\ &= -\cos^2\theta \ d\theta \wedge dx \wedge dy + \sin^2\theta \ d\theta \wedge dy \wedge dx \\ &= -d\theta \wedge dx \wedge dy \neq 0 \end{aligned}$$

et ω n'est pas intégrable, ce qui correspond au fait que la famille $\{g_1, g_2\}$ n'est pas involutive.

La signification de cette perte d'intégrabilité est qu'il n'existe aucune paire de fonctions $\alpha(x, y, \theta)$ et $h(x, y, \theta)$ telles que

$$\begin{aligned} \alpha(x)\omega &= \alpha(x, y, \theta)\sin\theta\, dx - \alpha(x, y, \theta)\cos\theta\, dy \\ &= \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta \end{aligned}$$

5. Signification physique

En divisant ω par dt on obtient une expression avec l'angle et les vitesses $\dot{x}$ et $\dot{y}$

$$\omega \frac{1}{dt} = \sin\theta \frac{dx}{dt} - \cos\theta \frac{dy}{dt} = \sin\theta\, \dot{x} - \cos\theta\, \dot{y}$$

qui représente la composante perpendiculaire de la vitesse lors du déplacement de la roue. Cette composante est nulle si la roue ne glisse pas le long de la direction perpendiculaire à son déplacement. C'est en effet le cas, car en remplaçant $\dot{x}$ et $\dot{y}$ par la cinématique du départ on a bien la contrainte cinématique

$$\sin\theta\ \dot{x} - \cos\theta\ \dot{y} = \sin\theta\ \cos\theta u - \cos\theta\ \sin\theta u = 0$$

La contrainte cinématique $\sin\theta\dot{x} - \cos\theta\dot{y} = 0$ est une contrainte sur les vitesses $\dot{x}$ et $\dot{y}$ qui comporte la coordonnée θ mais qui ne s'intègre pas pour donner une contrainte uniquement sur les coordonnées

$$h(x, y, \theta) = 0$$

Si la famille $\{g_1, g_2\}$ avait été involutive, alors cela aurait été le cas.

On fait ainsi la distinction entre contrainte holonome (lorsque ω est intégrable) et non-homolonome (lorsque ω n'est pas intégrable).
