Commande non linéaire

STI - Master

Série V

Dr. Ph. Müllhaupt

Exercice V.1

Commençons par résoudre directement le systèmes d'équations $A^T P + PA = -I$ avec

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$$

et les matrices A obtenues dans la série précédante

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix}$$

Dans le premier cas,

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne trois équations

$$\begin{aligned} -2\frac{1}{RC}p_{11} - 2\frac{1}{L}p_{12} &= -1 \\ -\frac{1}{RC}p_{12} - \frac{1}{L}p_{22} + \frac{1}{C}p_{11} - \frac{R}{L}p_{12} &= 0 \\ 2\frac{1}{C}p_{12} - 2\frac{R}{L}p_{22} &= -1 \end{aligned}$$

que l'on peut arranger matriciellement

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{RC} & -\frac{2}{L} & 0 \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} - \frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{2}{C} & -2\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

ce qui conduit à la solution

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{CR\left(CR^2 + C + 2L\right)}{4\left(CR^2 + L\right)} \\ p_{12} &= \frac{CL\left(R^2 - 1\right)}{4\left(CR^2 + L\right)} \\ p_{22} &= \frac{L\left(2CR^2 + LR^2 + L\right)}{4R\left(CR^2 + L\right)} \end{aligned}$$

et en valeurs numériques

$$P = \begin{pmatrix} 8.25026 \cdot 10^{-6} & 2.49992 \cdot 10^{-7} \\ 2.49992 \cdot 10^{-7} & 8.07552 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix}$$

De manière similaire, la solution du système masse-ressort est

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{km + k^2 + b^2}{2kb} \\ p_{12} &= \frac{m}{2k} \\ p_{22} &= \frac{km + m^2}{2bk} \end{aligned}$$

avec comme application numérique

$$P = \begin{pmatrix} 5010 & 0.001 \\ 0.001 & 10.02 \end{pmatrix}$$

Il est intéressant de remarquer que le fait de forcer $\dot{V} < 0$, $\forall x \neq 0$, par le choix de $-Q = -I$, entraîne une fonction de Lyapunov $V = x^T P x$ qui n'a plus de relation directe avec l'énergie du système mécanique. (Rappel : si la fonction de Lyapunov est la somme de l'énergie potentielle et cinétique, nous avions vu que $\dot{V} \leq 0$ au lieu de $\dot{V} < 0$.)
Pour le point 2, et pour le système masse ressort, calculons $I \otimes A^T + A^T \otimes I$:

$$A^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} I \otimes A^T + A^T \otimes I &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} & 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 & -\frac{R}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{RC} & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} - \frac{1}{RC} & 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 & -\frac{1}{RC} - \frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & -\frac{2R}{L} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

L'inverse de cette matrice est

$$\begin{pmatrix} -\frac{CR\left(CR^2+2L\right)}{4(CR^2+L)} & \frac{C^2R^2}{4CR^2+4L} & \frac{C^2R^2}{4CR^2+4L} & -\frac{C^2R}{4(CR^2+L)} \\ -\frac{CLR^2}{4(CR^2+L)} & -\frac{3CLR}{4(CR^2+L)} & \frac{CLR}{4CR^2+4L} & \frac{CL}{4CR^2+4L} \\ -\frac{CLR^2}{4(CR^2+L)} & \frac{CLR}{4CR^2+4L} & -\frac{3CLR}{4(CR^2+L)} & \frac{CL}{4CR^2+4L} \\ -\frac{L^2R}{4(CR^2+L)} & -\frac{L^2}{4(CR^2+L)} & -\frac{L^2}{4(CR^2+L)} & -\frac{L^2+2CR^2L}{4CR^3+4LR} \end{pmatrix}$$

ce qui conduit ainsi, en considérant $p = -(I \otimes A^T + A^T \otimes I)^{-1} q$, à la solution précédemment calculée. On pourrait tout aussi bien remarquer qu'une des colonnes 2 et 3 de la matrice (2) est redondante étant donné que $p_{12} = p_{21}$. Ainsi, en additionnant les coefficients respectifs des colonnes 2 et 3 de la matrice (2), et en supprimant la ligne 3 de la matrice qui en résulte, on obtient la matrice apparaissant dans l'expression (1), ce qui confirme le développement effectué par l'entremise du produit de Kronecker.

En ce qui concerne le système masse-ressort, les calculs sont analogues, et on confirme la solution donnée plus haut.

Dans les deux cas, une ligne Matlab pour le calcul de P est :

```
P=-inv(kron(eye(2),A')+kron(A',eye(2)))*[1;0;0;1]
```

Exercice V.2

$$E_c = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

$$E_p = -\int_{x_2-L}^{x_1} \sigma(x_2-\xi)d\xi$$

Vérifions que l'expression de l'énergie potentielle donne le bon résultat lorsqu'elle est appliquée au ressort classique. Pour celui-ci, on a une caractéristique linéaire

$$\sigma(x_2 - x_1) = k(x_2 - x_1 - L)$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned}
E_p &= -\int_{x_2-L}^{x_1} \sigma(x_2-\xi)\,d\xi \\
&= -k\int_{x_2-L}^{x_1} (x_2-\xi-L)\,d\xi \\
&= -k\left[x_2\xi - \frac{\xi^2}{2} - L\xi\right]_{x_2-L}^{x_1} \\
&= -k\left(x_1x_2 - \frac{x_1^2}{2} - Lx_1 - x_2(x_2-L) + \frac{(x_2-L)^2}{2} + L(x_2-L)\right) \\
&= -k\left(-\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} - \frac{L^2}{2} + x_1x_2 - Lx_1 + Lx_2\right) \\
&= \frac{1}{2}k\left(x_1^2 + x_2^2 + L^2 - 2x_1x_2 + 2Lx_1 - 2Lx_2\right) \\
&= \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - L)^2
\end{aligned}$$

ce qui donne bien le potentiel d'un ressort linéaire qui atteint son minimum lorsqu'il est au repos avec $x_2 - x_1 = L$.

Les forces extérieures suivantes sont appliquées

$$F_{ext2} = -b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$F_{ext1} = u = -k_p x_1 - k_d \dot{x}_1$$

Le lagrangien est $\mathcal{L} = E_c - E_p$ et les forces généralisées

$$\begin{array}{rcl} F_{x_1} & = & F_{ext1} + F_{ext2} \\ F_{x_2} & = & -F_{ext2} \end{array}$$

Les deux équations de la dynamiques $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = F_{x_1}$ et $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = F_{x_2}$ donnent

$$\begin{array}{rcl} M\ddot{x}_1 & = & +\sigma(x_2 - x_1) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_p x_1 - k_d \dot{x}_1 \\ m\ddot{x}_2 & = & -\sigma(x_2 - x_1) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{array}$$

Remarque : Les deux dérivées partielles du potentiel s'écrivent

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_1} = -\sigma(x_2 - x_1)$$

et

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial E_p}{\partial x_2} & = & \sigma(L) - \displaystyle\int_{x_2 - L}^{x_1} \sigma^{'}(x_2 - \xi)\, d\xi \\ & = & \sigma(L) - (\sigma(x_2 - x_1) - \sigma(L - x_2 + x_1)) \\ & = & +\sigma(x_2 - x_1) \end{array}$$

En ce qui concerne la deuxième expression, il faut remarquer que non seulement la borne de l'intégrale

$$E_p = -\int_{x_2 - L}^{x_1} \sigma(x_2 - \xi)\, d\xi$$

varie (car elle dépend de x_2) mais également la fonction à intégrer varie car l'argument contient x_2. Lorsque on fait varier l'argument x_2 de la fonction à intégrer, on obtient une différence finie $\sigma(x_2 + \Delta x_2 - \xi) - \sigma(x_2 - \xi)$ qui lorsque divisée par l'accroissement Δx_2 donne pour de petit Δx_2 la dérivée $\sigma'(x_2 - \xi)$.

Le candidat de Lyapunov est

$$V = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \int_{x_2-L}^{x_1} \sigma(x_2-\xi)d\xi + \frac{1}{2}k_p x_1^2$$

On constate que lorsque σ appartient aux cadrants I et III, le candidat de Lyapunov V est une fonction positive définie de z_1 et z_2 lorsque on pose $z_1 = x_1$ et $z_2 = x_2 - L$, ce qui correspond bien au point d'équilibre $x_1 = 0$ et $x_2 = L$. En posant

$$E_p(x_1, x_2) = -\int_{x_2-L}^{x_1} \sigma(x_2-\xi)d\xi$$

il s'en suit

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= M\ddot{x}_1\dot{x}_1 + m\ddot{x}_2\dot{x}_2 + \frac{\partial E_p}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial E_p}{\partial x_2}\dot{x}_2 + k_p x_1\dot{x}_1 \\
&= \sigma(x_2-x_1)\dot{x}_1 - \sigma(x_2-x_1)\dot{x}_2 - \sigma(x_2-x_1)\dot{x}_1 + \sigma(x_2-x_1)\dot{x}_2 \\
&\quad -k_p x_1\dot{x}_1 + k_p x_1\dot{x}_1 - k_d\dot{x}_1^2 - b(\dot{x}_1-\dot{x}_2)^2 \\
&= -k_d\dot{x}_1^2 - b(\dot{x}_1-\dot{x}_2)^2
\end{aligned}$$

On constate que $\dot{V} = 0$ implique à la fois $\dot{x}_1 = 0$ et $\dot{x}_2 = 0$ car la somme de deux termes négatifs ne peut devenir nul que lorsque les deux termes sont nuls simultanément (à savoir $-k_d\dot{x}_1^2 = 0$ et $-b(\dot{x}_1-\dot{x}_2)^2 = 0$ simultanément et donc $\dot{x}_1 = 0$ et $\dot{x}_2 = 0$). En posant l'état $x = \begin{pmatrix} x_1 & \dot{x}_1 & x_2 & \dot{x}_2 \end{pmatrix}^T$, on associe le champ de vecteurs

$$f = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \frac{1}{M}\sigma(x_2-x_1) - \frac{b}{M}(\dot{x}_1-\dot{x}_2) - \frac{k_p}{M}x_1 - \frac{k_d}{M}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ -\frac{1}{m}\sigma(x_2-x_1) + \frac{b}{m}(\dot{x}_1-\dot{x}_2) \end{pmatrix}$$

à la dynamique $\dot{x} = f(x)$. Dans l'ensemble, $\mathcal{V} = \{x_1, \dot{x}_2, x_2, \dot{x}_2 | x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0\}$, le champ de vecteur f s'écrit

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M}\sigma(x_2-x_1) - \frac{k_p}{M}x_1 \\ 0 \\ -\frac{1}{m}\sigma(x_2-x_1) \end{pmatrix}$$

L'ensemble $\mathcal{V}$ représente un hyper-espace qui est aussi une sous-variété. Pour que les trajectoires restent piégées dans cet ensemble $\mathcal{V}$, il faut que la dynamique n'ait pas de composante le long des vecteurs normaux à la sous-variété (vecteurs normaux à l'hyper-espace). Or, les vecteurs normaux sont

$$\begin{aligned}
n_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
n_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ce qui entraîne que $n_1 f_1 = 0$ et $n_2 f = 0$ que lorsque

$$\begin{aligned} \frac{1}{M}\sigma(x_2 - x_1) - \frac{k_p}{M}x_1 &= 0 && (3) \\ \frac{1}{m}\sigma(x_2 - x_1) &= 0 && (4) \end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre que la définition du point d'équilibre ((4) entraîne $x_2 - x_1 = L$ et (3) donne alors $x_1 = 0$ ce qui conduit finalement à $x_2 = L$ et $x_1 = 0$, ce qui donne le point d'équilibre). Ainsi, toutes les trajectoires convergeront vers cet unique point d'équilibre. Remarquons que si la caractéristique σ n'est pas monotone, plusieurs points d'équilibre pourraient exister, tout en garantissant la stabilité de l'un de ceux-ci (celui pour lequel V demeure une forme localement positive définie). Par contre, si V n'est pas positive définie, alors on ne peut pas garantir la stabilité (par exemple, si la caractéristique σ n'appartient pas aux bons cadrants).