Commande non linéaire

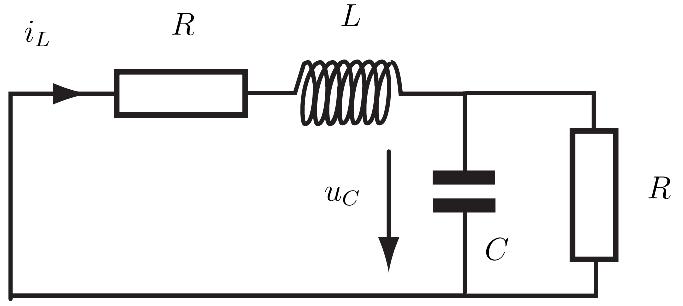
STI - Master

Série IV

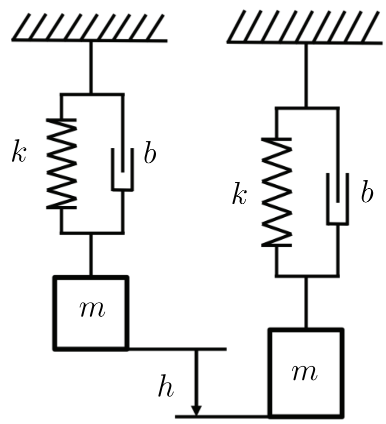
Dr. Ph. Müllhaupt

Exercice IV.1

Soit les deux systèmes suivants :
a) Un circuit RLC avec comme paramètres physiques $R = 1$ [kΩ], $C = 33$ [nF], et $L = 1$ [μH]



et
b) L'oscillateur masse ressort amorti (dashpot)



avec comme paramètres physiques $m = 0.2$ [kg], $k = 100$ [N/m] et $b = 0.01$ [Ns/rad].

1. Construire une représentation d'état en posant pour a) $x_1 = u_C$ et $x_2 = i_L$ et pour b) $x_1 = h$ et $x_2 = \dot{h}$.
2. Trouver une fonction de Lyapunov pour chacun des cas a) et b) basée sur l'énergie physique.

L'équation de la première maille (somme des tensions nulle) donne

$$Ri_L + L\frac{di_L}{dt} + u_c = 0$$

et l'équation du noeud (somme des courants nulle)

$$i_L - C\frac{du_c}{dt} - \frac{1}{R}u_c = 0$$

En posant $x_1 = u_c$ et $x_2 = i_L$

$$Rx_2 + L\frac{dx_2}{dt} + x_1 = 0$$

et

$$x_2 - C\frac{dx_1}{dt} - \frac{1}{R}x_1 = 0$$

En isolant les dérivées, cela conduit à la représentation d'état

$$\begin{array}{rcl}\dot{x}_1 & = & -\frac{1}{RC}x_1 + \frac{1}{C}x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2\end{array}$$

ou, en écriture matricielle, avec $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T$,

$$\dot{x} = Ax \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}$$

L'énergie physique se décompose en deux termes, l'énergie magnétique stockée dans la bobine $\frac{1}{2}Li_L^2$ et l'énergie électrique statique stockée sous la forme de charges dans la capacité $\frac{1}{2}Cu_C^2$. Ainsi,

$$V = \frac{1}{2}Cx_1^2 + \frac{1}{2}Lx_2^2$$

devient notre candidat de Lyapunov. Pour vérifier que ce candidat est bien une fonction de Lyapunov, calculons

$$\begin{array}{rcl}\dot{V} & = & Cx_1\dot{x}_1 + Lx_2\dot{x}_2 \\ & = & Cx_1(-\frac{1}{RC}x_1 + \frac{1}{C}x_2) + Lx_2(-\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2) \\ & = & -\frac{1}{R}x_1^2 + x_1x_2 - x_1x_2 - Rx_2^2 \\ & = & -\frac{1}{R}x_1^2 - Rx_2^2 < 0\end{array}$$

On peut également tout calculer matriciellement : On pose

$$V = \frac{1}{2}x^TPx$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}$$

qui est une matrice définie positive car c'est une matrice diagonale avec tous les éléments dans la diagonale qui sont positifs, et on développe

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & -1 \\ 1 & -R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 1 \\ -1 & -R \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{2}{R} & 0 \\ 0 & 2R \end{pmatrix} =: -Q \end{aligned} \tag{1}$$

On constate, que Q est bien une matrice définie positive car elle est diagonale avec des éléments positifs, et que l'on confirme bien que $\dot{V} = -\frac{1}{2} x^T Q x = -\frac{1}{R} x_1^2 - R x_2^2 < 0$, et donc que V est une fonction de Lyapunov.

Pour le système masse-ressort, l'énergie se compose de deux termes, l'énergie potentielle élastique $E_p = \frac{1}{2} k h^2$ et de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m \dot{h}^2$. On applique la méthode de la mécanique analytique (à des fins pédagogiques). Le système comporte une seule coordonnée généralisée h. Le frottement est la seule force non conservative (ne provenant pas du Lagrangien) et constribuera à la force généralisée F_h. Pour l'obtenir on effectue un déplacement infinitésimal δh et on regarde les forces extérieures qui travaillent. Seul le frottement contribue et on a

$$W_{\text{ext}} = F_\delta \delta h = -b\dot{h}\delta h$$

et ceci permet de définir la force généralisée $F_\delta = -b\dot{h}$. On pose le lagrangien

$$\mathcal{L} := E_c - E_p = \frac{1}{2} m \dot{h}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

et on utilise alors l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} = F_\delta$$

ce qui conduit à une seule équation différentielle ordinaire du second ordre

$$m\ddot{h} + kh = -b\dot{h}$$

En posant $x_1 = h$ et $x_2 = \dot{h}$ comme variables d'état, l'équation différentielle du deuxième ordre donne naissance à deux équations différentielles du premier ordre

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m} x_1 - \frac{b}{m} x_2 \end{aligned}$$

que l'on peut mettre sous la forme matricielle, avec $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T$,

$$\dot{x} = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix}$$

Pour le candidat de Lyapunov, on va prendre l'énergie qui est la somme

$$V = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{h}^2 + \frac{1}{2}kh^2 = \frac{1}{2}mx_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$$

et on calcule

$$\begin{aligned} \dot{V} &= mx_2\dot{x}_2 + kx_1\dot{x}_1 \\ &= mx_2(-\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2) + kx_1x_2 \\ &= -bx_2^2 \leq 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

et on a seulement le signe semi-défini non négatif. On obtient le même résultat en procédant par calcul matriciel une fois que l'on pose $V = \frac{1}{2}x^TPx$ avec

$$P = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^TP + PA &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{m} \\ 1 & -\frac{b}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & -b \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix} =: -Q \end{aligned}$$

et comme la matrice Q est diagonale et que les éléments le long de la diagonale sont positifs ou nuls, cette matrice est semi-définie positive. Elle n'est pas positive définie pour autant étant donné la présence d'un facteur nul dans le premier élément de la diagonale.

Exercice IV.2

1. A partir de la question IV.1, poser

   $$z = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x$$

   et exprimer les fonctions de Lyapunov obtenues en IV.1 dans les variables z_1 et z_2. Dessiner les courbes de niveau des fonctions de Lyapunov dans le plan x_1-x_2 et dans le plan z_1-z_2.
2. Soit $R = 0.5$, estimer le plus grand $r > 0$ tel que

   $$\forall x_0,\ \|x_0\| < r \Rightarrow \|\mathcal{X}(x_0, t)\| < R,\ \forall t$$

   en considérant les normes suivantes :

(a) $\| \cdot \|_{2,x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

(b) $\| \cdot \|_{1,x} = |x_1| + |x_2|$

(c) $\| \cdot \|_{2,z} = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$

(d) $\| \cdot \|_{1,z} = |z_1| + |z_2|$

Représenter dans chaque cas les 'boules' calculées.

Pour le système mécanique, et en utilisant le changement de coordonnées proposé

$$z = \Phi x \qquad \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc avec $x = \Phi^{-1} z$,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} x^T P x \\ &= \frac{1}{2} (\Phi^{-1} z)^T P \Phi^{-1} z = z^T (\Phi^{-1})^T P \Phi^{-1} z \\ &= \frac{1}{2} z^T \bar{P} z \\ &= \frac{1}{18} z^T \begin{pmatrix} k+4m & -2(k+m) \\ -2(k+m) & 4k+m \end{pmatrix} z \end{aligned} \tag{3}$$

Les lignes de niveaux sont des ellipses dont les axes principaux sont tournés par rapport à l'horizontale. Il sont colinéaires aux vecteurs propres de la matrice $\bar{P}$. Un calcul similaire s'effectue pour le circuit électrique.

2. (a)

En ce qui concerne la norme $\| \cdot \|_{2,x} = R = 0.5$, on cherche le contour de niveau le plus grand de la fonction de Lyapunov $V = \frac{1}{2} x^T P x$ contenue dans la sphère $x_1^2 + x_2^2 \leq R^2 = (0.5)^2$. Ceci se produit lorsque on se déplace le long de l'axe (de l'ellipse) correspondant à la plus petite valeur propre. Pour le système électrique, c'est le long de x_1 (pour le système masse-ressort c'est le long de x_2). Prenons, pour commencer, uniquement le système électrique. On calcule le niveau de V par

$$\bar{V} = \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} R & 0 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} 33 \cdot 10^{-9} \cdot (0.5)^2$$

La petite boule de conditions initiales de rayon r est telle qu'elle est tangente et inscrite dans l'ellipse du contour de niveau que l'on vient de calculer. Cela se produit lorsqu'on se déplace cette fois-ci le long de l'axe principal court correspondant *à la plus grande valeur propre*, c.-à-d. le long de x_2 (x_1 pour le système masse-ressort).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \begin{pmatrix} 0 & r \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} = \frac{1}{2} 1000 \cdot 10^{-9} r^2 = \bar{V} = \frac{1}{2} 33 \cdot 10^{-9} (0.5)^2 \\ r &= \sqrt{\frac{33}{1000}} 0.5 \end{aligned}$$

Pour le système masse-ressort, on trouve de manière analogue,

$$r = \sqrt{\frac{0.2}{100}}0.5 \approx 0.02236$$

On procède de la même manière pour obtenir la formule tout à fait générale,

$$r = \sqrt{\frac{\lambda_{\text{min}}}{\lambda_{\text{max}}}}R$$

qui est toujours valable pour la norme $\|\cdot\|_2$ et l'on résoud ainsi la point 2.(c).

En ce qui concerne 2.(b), le contour de niveau correspondant à $\|\cdot\|_{1,x} = |x_1| + |x_2| = R = 0.5$ est un carré de sommets $(0, R)$, $(R, 0)$, $(-R, 0)$, $(0, -R)$. Par conséquent, il faut inscrire l'ellipse correspondant au plus grand contour de niveau de la fonction de Lyapunov $\frac{1}{2}x^T Px$ à l'intérieur de ce carré. L'ellipse y est tangente en quatre points obtenus lorsque la normale de l'ellipse est colinéaire à la perpendiculaire aux côtés du carré. Pour résoudre le problème, seul un de ces quatre points de tangence est nécessaire (les autres s'obtiennent par symétrie). Calculons celui se produisant sur le bord supérieur droit du carré c.-à-d. le long de la droite

$$x_2 = -x_1 + R$$

La perpendiculaire est générée par le vecteur $(1 \quad 1)^T$ et la normale à l'ellipse d'équation $\bar{V} = \frac{1}{2}x^T Px$ est générée par

$$Px.$$

Etant donné que le point de tangence se situe sur la bord du carré, on pose

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha \\ x_2 &= -\alpha + R. \end{aligned}$$

Comme au point correspondant à α, la normale doit être colinéaire à la perpendiculaire, il s'en suit

$$\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha + R \end{pmatrix}.$$

Pour le circuit électrique,

$$\begin{aligned} \beta &= 33 \cdot 10^{-9}\alpha \\ \beta &= 1000 \cdot 10^{-9}(-\alpha + 0.5) \end{aligned}$$

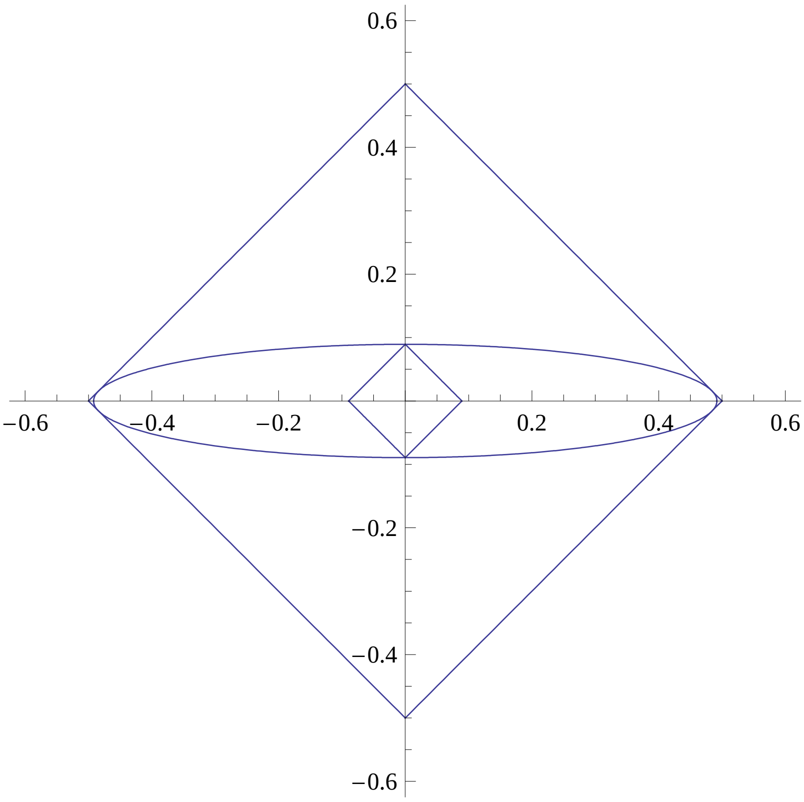
Ce qui donne $\alpha \approx 0.484$ correspondant au point sur le bord du carré $(0.484, 0.016)$ et donc à la valeur de la fonction de Lyapunov

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0.484 & 0.016 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 33 \cdot 10^{-9} & 0 \\ 0 & 1000 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.484 \\ 0.016 \end{pmatrix} \approx 3.9932 \cdot 10^{-9}$$

Pour trouver la petite "boule", qui est en fait un carré, on inscrit un carré à l'intérieur de l'ellipse correspondant à $\hat{V}$. On arrive à cela en remarquant que les sommets supérieurs et inférieurs du carré de sommets $(r, 0)$, $(0, r)$, $(-r, 0)$, et $(0, -r)$ touchent l'ellipse. En d'autres termes, le long de l'axe x_2 le petit carré touche l'ellipse :

$$\frac{1}{2}r^2 1000 \cdot 10^{-9} = \hat{V} \approx 3.99322 \cdot 10^{-9}$$

et donc $r = \sqrt{\frac{3.99322}{500}} \approx 0.08937$. En ce qui concerne les derniers cas en coordonnées z on répète le raisonnement ci-dessous en faisant attention aux points de tangence (un desquels est paramétré par un paramètre α comme ci-dessus) pour trouver l'ellipse inscrite ; et ensuite en considérant la bonne paire de sommets opposés du carré, on inscrit le petit carré dans l'ellipse précédemment calculée.



La "boule" $R = 0.5$ et la "boule" $r = 0.08937$ ainsi que la courbe de niveau de $V = \frac{1}{2}x^T P x$ pour $\hat{V}$.