

Exercice III.1

Au cours, nous avons vu que la sortie d'une non linéarité statique $y(t) = \phi(u(t))$ lorsque $u(t) = A \sin(\omega t)$ peut s'approximer par le premier harmonique :

$$y(t) \approx a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$$

Démontrer que le gain équivalent N est dans ce cas donné par

$$N = \frac{1}{A} (b_1 + ja_1)$$

en procédant de la manière suivante :

- Poser $\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$ et $\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$.
- Factoriser les termes devant $e^{j\omega t}$ et ceux devant $e^{-j\omega t}$. Les deux expressions résultantes doivent être nulles.
- Expliquer l'apparente contradiction.

Corrigé :

La relation entre la sortie y et l'entrée de la non-linéarité $u = A \sin(\omega t)$ est approximée par un gain équivalent étant donné que l'on considère que la première harmonique. Ainsi

$$a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) = NA \sin(\omega t)$$

Ce qui conduit à

$$a_1 \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} + b_1 \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = AN \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

En factorisant les termes devant le facteur $e^{j\omega t}$ nous obtenons

$$(N - \frac{1}{A}(b_1 + ja_1))e^{j\omega t} = 0$$

mais en factorisant ceux devant le facteur $e^{-j\omega t}$, nous obtenons

$$(N - \frac{1}{A}(b_1 - ja_1))e^{-j\omega t} = 0 \tag{1}$$

ce qui semble une contradiction. Or, nous avons commis une erreur, car en considérant $e^{-j\omega t}$, on considère une pulsation négative $-\omega$ et toute relation de transfert harmonique, disons $G(j\omega)$,

possède la propriété que $G(-j\omega) = G(j\omega)^*$ où $*$ désigne le complexe conjugué. Ainsi, l'équation (1) devient

$$(N^* - \frac{1}{A}(b_1 - ja_1))e^{-j\omega t} = 0$$

ce qui lève la contradiction et conduit au résultat escompté

$$N = \frac{1}{A}(b_1 + ja_1)$$

étant donné que $e^{j\omega t} \neq 0$ tout comme $e^{-j\omega t} \neq 0$.

Exercice III.2

Soit la non-linéarité statique

$$\phi(u) = u + (1 - u) \left(\frac{1}{\pi} \arctan(\gamma(u - 1)) + \frac{1}{2} \right) - (u + 1) \left(\frac{1}{\pi} \arctan(-\gamma(u + 1)) + \frac{1}{2} \right)$$

pour $\gamma = 1, 2, 3, 10$. Dessiner la caractéristique pour ces quatre cas.

Evaluer le gain équivalent en approximant les intégrales par des sommes. Par exemple pour b_1 , l'expression

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin(\omega t) d(\omega t)$$

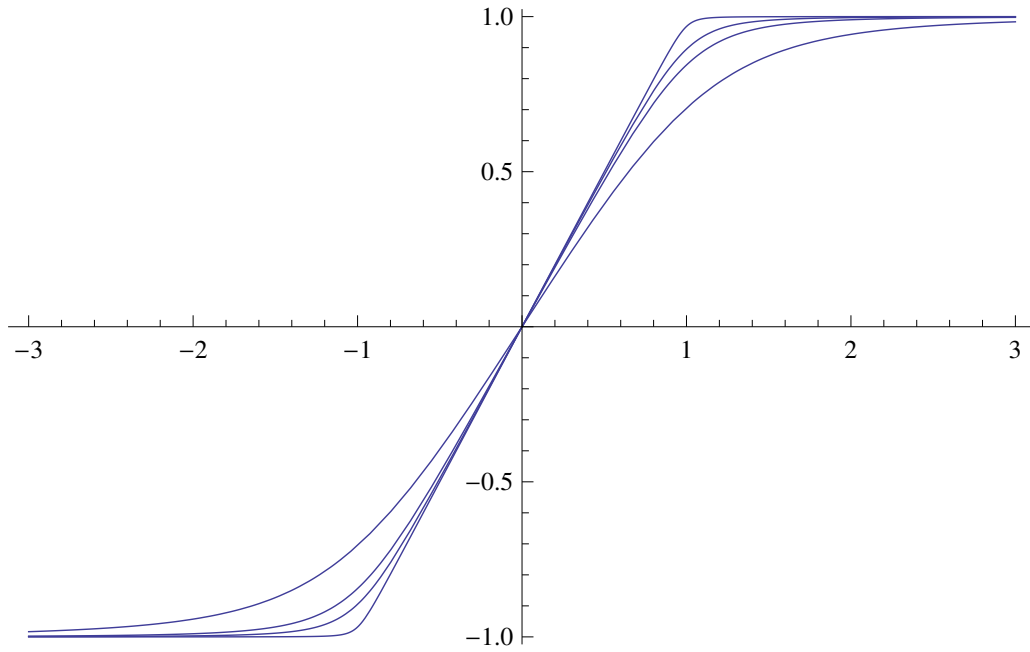
devient

$$b_1 \approx \frac{2}{N} \sum_{l=0}^{N-1} y \left(\frac{1}{\omega} \left(-\pi + \frac{2l\pi}{N} \right) \right) \sin \left(-\pi + \frac{2l\pi}{N} \right)$$

Représenter le gain équivalent $N = \frac{b_1}{A}$ en fonction de l'amplitude A , pour différentes valeurs de $N = 2, 10, 20, 100, 1000$. Comparer les résultats obtenus avec ceux d'une saturation pour laquelle $k = 1$ et $a = 1$.

Quel est l'avantage de la fonction ϕ proposée par rapport à la saturation ?

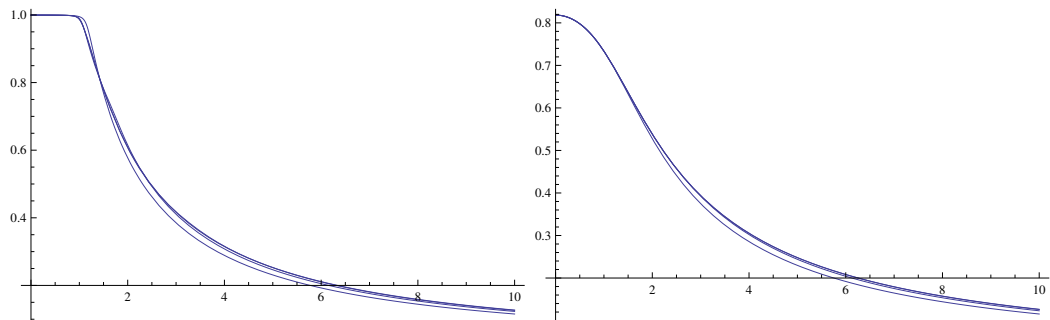
Voici la représentation graphique de la fonction donnée pour les quatre valeurs du paramètre $\gamma = 1, 2, 3, 10$:



En ce qui concerne l'approximation de l'intégrale, la chose essentielle est de bien poser la grandeur

$$y(t) = \phi(A \sin(\omega t))$$

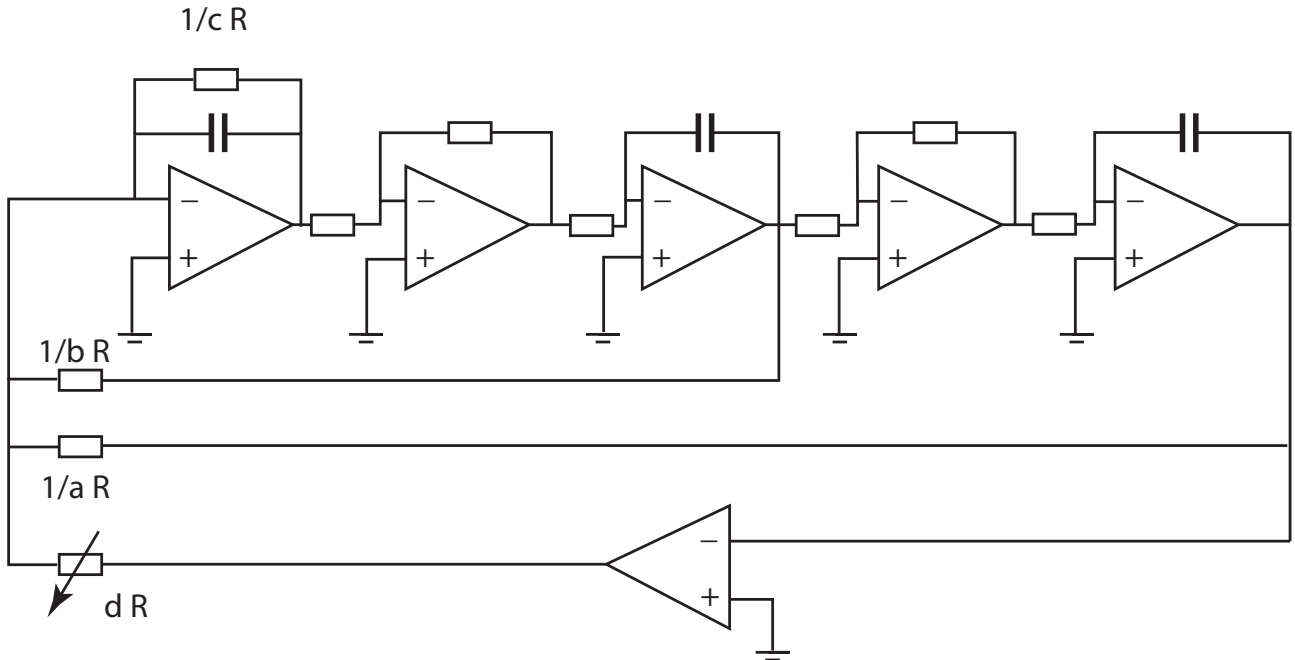
ce qui conduit pour le gain équivalent aux représentations suivantes (à gauche, $\gamma = 10$ et à droite $\gamma = 1$, et les valeurs de la discrétisation sont de 3, 10, 20, 100) :



L'axe horizontal représente l'amplitude A et l'axe vertical représente le gain équivalent (réel).

Lorsque $\gamma \rightarrow \infty$, la non-linéarité statique proposée ϕ tend vers la saturation tout en restant toujours différentiable (lisse), ce qui est un avantage.

Exercice III.3



- Modéliser le circuit électronique représenté ci-dessus. Toutes les capacités ont la même valeur, ainsi que les résistances. Une seule résistance est variable afin de modifier le comportement du circuit. Les valeurs numériques sont $a = 2.9$, $b = 1.8$, $c = 1.1$, $d \in [1; 2.5]$, $R = 1$ [k Ω] et $C = 33$ [nF].
- Isoler la non-linéarité statique et la partie dynamique linéaire.
- Analyser le comportement par la méthode du premier harmonique.
- Déterminer la pulsation ω et l'amplitude A d'une éventuelle oscillation.
- Simuler le circuit.

Le premier amplificateur opérationnel joue le rôle d'un intégrateur sommateur-inverseur. Quatre tensions u_1 , u_2 , u_3 et u_4 correspondent aux tensions appliquées aux résistances respectives $R_1 = \frac{1}{c}R$, $R_2 = \frac{1}{b}R$ et $R_3 = \frac{1}{a}R$ et $R_4 = dR$.

Comme l'impédance à l'entrée '-' du premier amplificateur opérationnel est infinie, la somme des quatre courants $\frac{u_1}{\frac{1}{c}R}$, $\frac{u_2}{\frac{1}{b}R}$, $\frac{u_3}{\frac{1}{a}R}$, et $\frac{u_4}{dR}$, est égale au courant qui circule dans la capacité $C \frac{du_C}{dt}$ du premier ampli-op.

Les tensions de sortie des ampli-ops qui contiennent des capacités sont dénommées respectivement, y_1 (sortie du premier ampli-op depuis la gauche), y_3 (sortie du troisième ampli-op), y_5 (sortie du 5^{ème} ampli op du haut ; le dernier et sixième ampli-op est celui du bas qui joue le rôle du relais).

Ainsi, en boucle ouverte (toutes les quatre boucles sont ouvertes, celles provenant de y_1 , y_3 , y_5 et de la sortie du relais $-\hat{V} \text{sgn}(y_5)$, où \hat{V} désigne la tension maximale symétrique), on obtient la relation (y_1 est la tension à la sortie du 1^{er} ampli-op) :

$$Y_1 = -\frac{1}{R_1 C s} U_1 - \frac{1}{R_2 C s} U_2 - \frac{1}{R_3 C s} U_3 - \frac{1}{R_4 C s} U_4. \quad (2)$$

Cette formule se justifie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u_1 + \frac{1}{c} R i_1 &= 0 \\ u_2 + \frac{1}{b} R i_2 &= 0 \\ u_3 + \frac{1}{a} R i_3 &= 0 \\ u_4 + d R i_4 &= 0 \\ 0 + u_c &= y \\ C \frac{du_{C1}}{dt} &= i_1 + i_2 + i_3 + i_4 \end{aligned}$$

En effet, les quatre premières relations d'égalité proviennent de la propriété d'avoir une tension nulle entre les deux bornes d'entrées (du premier ampli-op) et la dernière égalité est la conséquence d'une impédance infinie (du premier ampli-op). Finalement, en appliquant la transformée de Laplace, nous avons (condition initiale stationnaire nulle) $s C U_{C1} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ et $0 + U_{C1} = Y_1$, ce qui donne (2).

Le deuxième ampli-op est en montage inverseur. En désignant sa sortie par y_2 , on a $Y_1 = -Y_2$ qui se justifie par les tensions nulles aux bornes d'entrée du deuxième ampli-op. En effet,

$$\begin{aligned} y_2 + R i &= 0 \\ 0 + R i &= y_3 \end{aligned}$$

ce qui confirme $y_2 = -y_1$ et donc $Y_2 = -Y_1$. De manière similaire, nous déduisons $Y_3 = -\frac{1}{RCs} Y_2$, $Y_4 = -Y_3$ et $Y_5 = -\frac{1}{RCs} Y_4$, ce qui achève l'analyse et la modélisation en boucle ouverte.

Pour obtenir la fonction de transfert, qui sera utilisée dans l'analyse du premier harmonique, on ouvre la boucle simplement au niveau du relais en laissant u_4 non défini (entrée de la fonction de transfert en boucle fermée) et on impose $u_1 = y_1$, $u_2 = y_3$, et $u_3 = y_5$. Ceci transforme (2) en une nouvelle relation

$$(RCs)^2 Y_5 = -\frac{1}{\frac{1}{c} RCs} (RCs)^2 Y_5 - \frac{1}{\frac{1}{b} RCs} RCs Y_5 - \frac{1}{\frac{1}{a} RCs} Y_5 - \frac{1}{d RCs} U_4, \quad (3)$$

laquelle, après réduction en fraction rationnelle en s , donne

$$\begin{aligned} \left(R^2 C^3 s^3 + \frac{R^2 C^2}{\frac{1}{c} R} s^2 + \frac{R}{\frac{1}{b} R} C s + \frac{1}{\frac{1}{a} R} \right) Y_5 &= -\frac{1}{d R} U_4 \\ G(s) = \frac{Y_5}{U_4} &= -\frac{1/d}{(RCs)^3 + c(RCs)^2 + b(RCs) + a} \end{aligned} \quad (4)$$

La première chose que l'on va faire est de considérer une dilatation de l'échelle du temps qui force $RCs = s'$ ou s' joue le rôle d'une nouvelle variable de Laplace associée à la dérivation

selon la nouvelle échelle du temps $\frac{d}{dt'} = RC \frac{d}{dt}$ et donc $t' = RCt$. Dorénavant on désigne par \dot{x}_1 la dérivée $\frac{d}{dt'}x_1$. Pour construire une représentation d'état, on pose comme variables d'état $x_1 = y_5$, $x_2 = \dot{y}_5$, $x_3 = \ddot{y}_5$, de telle sorte, qu'en boucle fermée (avec le relais $u_4 = -\hat{V}\text{sgn}(y_5)$), on ait

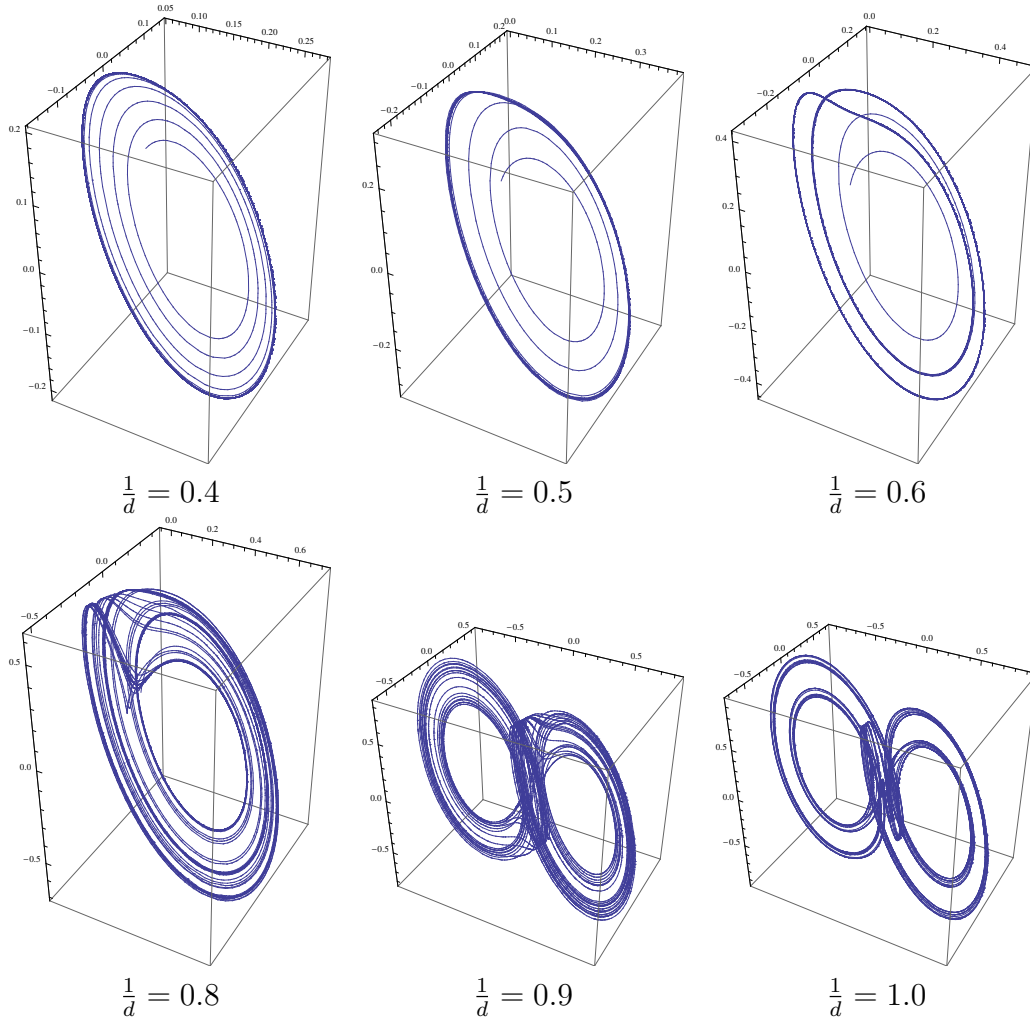
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{d}\hat{V}\text{sgn}(x_1) - ax_1 - bx_2 - cx_3\end{aligned}$$

avec comme paramètres numériques $a = 2.9$, $b = 1.8$, $c = 1.1$ et d pouvant varier entre 1 et 2.5.

Pour la simulation, on approxime la fonction $\text{sgn}(x)$ par

$$\text{sgn}(x) \approx \frac{2}{\pi} \arctan(20x),$$

avec le facteur 20 pouvant augmenter afin de mieux en mieux approximer la fonction en question. En faisant varier d entre les valeurs 0.4 et 1.3, nous obtenons divers cas de simulation qui sont représentés ci-dessous, pour la même condition initiale $x_1(0) = 0.1$, $x_2 = 0.01$ et $x_3(0) = 0.1$:



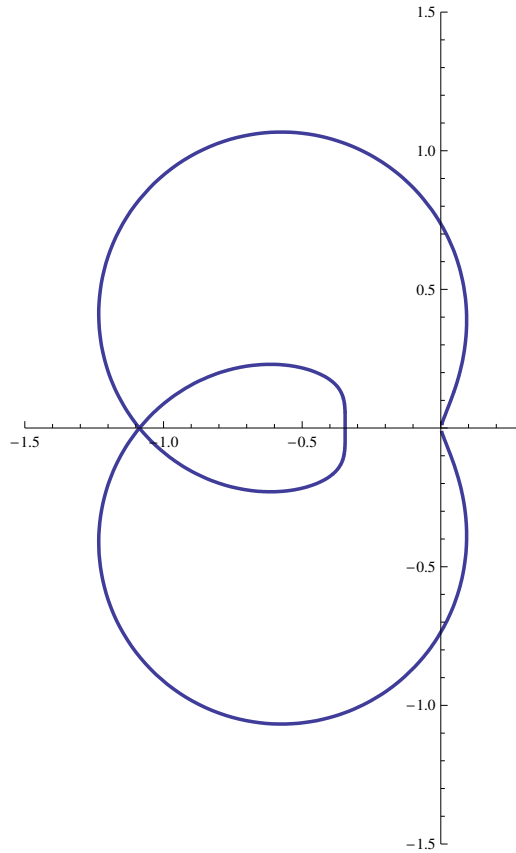
Pour l'analyse par la méthode du premier harmonique, on revient à la fonction de transfert dans l'échelle temporelle t' :

$$G(s) = -\frac{1/d}{s^3 + cs^2 + bs + a} \quad (5)$$

avec les valeurs numériques mentionnées précédemment. En remplaçant s par $j\omega$, on obtient la réponse harmonique

$$G(j\omega) = -\frac{1/d}{a - c\omega^2 + (b\omega - \omega^3)j} \quad (6)$$

que nous pouvons représenter dans un plan complexe ($d = 1$) :



On constate que $G(j\omega)$ intersecte l'axe réel en trois points : 1) à l'origine correspondant à une pulsation ω infinie (phénomène passe-bas) et en un autre point correspondant à l'annulation de la partie imaginaire de (6), et par conséquent aux deux pulsations :

$$\omega = \pm\sqrt{b};$$

ce qui correspond au point sur l'axe réel négatif en

$$G(j\sqrt{b}) = \frac{1/d}{bc - a} = -\frac{1}{N(A)}.$$

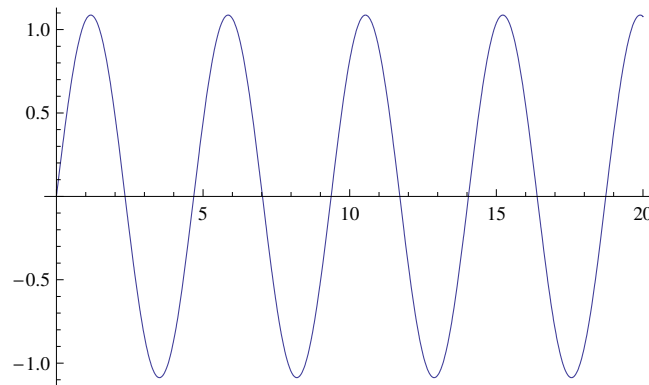
Comme le gain équivalent du relais est donné par

$$N(A) = \frac{4\hat{V}}{\pi A}$$

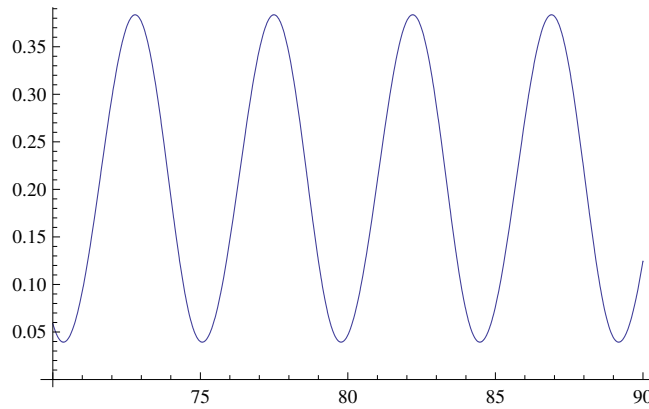
on obtient l'estimée de l'amplitude prédite par la méthode du premier harmonique

$$A = \frac{4\hat{V}}{\pi} \frac{1}{(a - bc)d}.$$

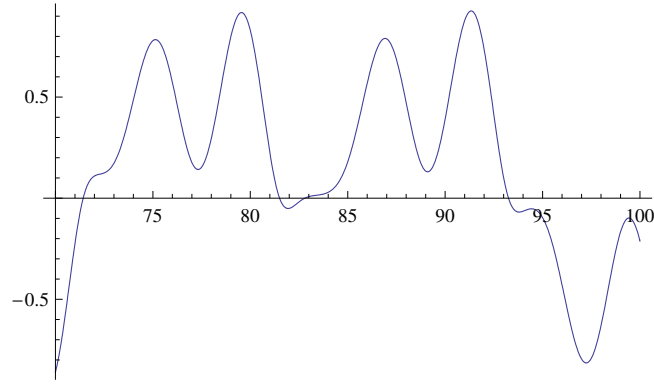
Pour $d = 2$ et $\hat{V} = \frac{\pi}{2}$ on obtient les valeurs numériques $\omega = 1.34164$ et $A = 1.08696$. Ceci est représenté ci dessous :



et on peut comparer avec la simulation :



pour remarquer que la pulsation est très bien prédite mais que l'amplitude n'est pas terrible. Bien évidemment, pour les autres valeurs de d qui sont inférieures, la méthode du premier harmonique n'est pas capable de prédire le comportement chaotique. En effet, pour $d = 1$, la simulation donne pour y_5 :



alors que la méthode du premier harmonique ne prédit qu'une seule fondamentale à la même fréquence que celle pour $d = 0.5$, à savoir, $\omega = 1.34164$.

Une expérience avec le circuit électronique confirme la présence d'une solution chaotique (Figure 1). Trois circuits TLO82 (contenant deux amplificateurs opérationnels chacun) sont alimentés à partir d'une source de tension continue 9V et un pont diviseur de tension pour créer le 0V. Un oscilloscope à deux canaux permet de tracer une projection similaire à un portrait de phase (le système possède trois états et seul une projection permet d'avoir les deux dimensions du portrait de phase). L'entrée X (signal jaune) est la sortie du dernier amplificateur du haut (5ème amplificateur) et l'entrée Y (signal bleu) est la sortie du 3ème amplificateur.

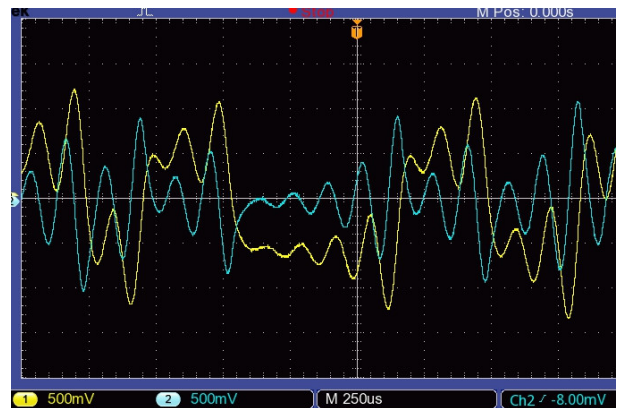
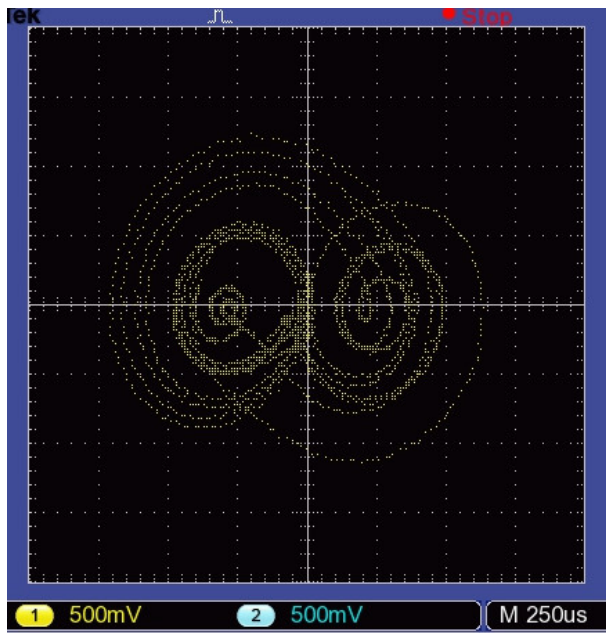
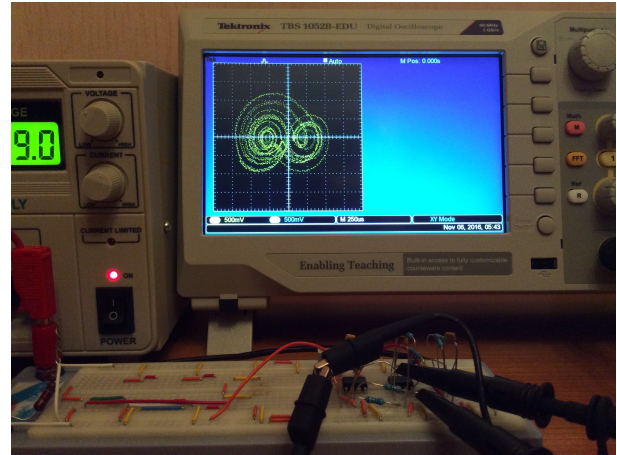
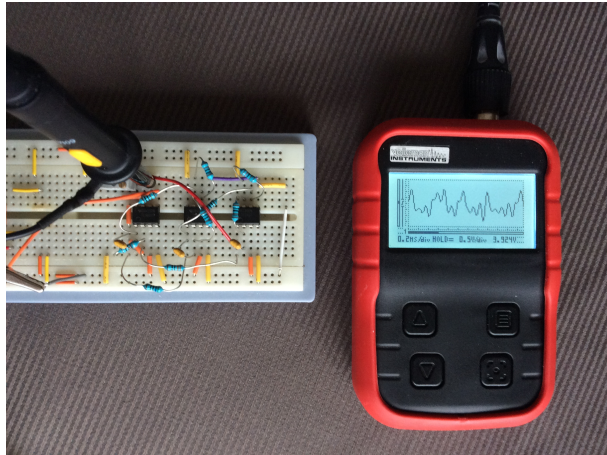


Figure 1: Un montage électronique confirme la présence d'un attracteur chaotique. Un oscilloscope à deux canaux permet de visualiser un pseudo-plan de phase (une projection des trajectoires de l'espace d'états tridimensionnel dans un espace bidimensionnel).