Commande non linéaire

STI - Master

Série II

Dr. Ph. Müllhaupt

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2^2 - 2\\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + x_2\end{aligned}$$

1. Trouver tous les points d'équilibre.
2. Linéariser autour des points d'équilibre et déterminer localement la nature des trajectoires (calculer les valeurs propres et les vecteurs propres).
3. Déduire ainsi le portrait de phase.
4. Déterminer l'index des points d'équilibre par la méthode graphique du cours. Pour la courbe de choix arbitraire prendre un cercle de rayon 1 centré sur les points d'équilibre et commencer par prendre 6 points équirépartis sur les cercles en question.
5. Calculer le signe du déterminant du Jacobien à chaque point d'équilibre.
6. Déterminer l'index d'un cercle de rayon 2, premièrement graphiquement en prennant 8 points équirépartis, deuxièmement à l'aide du théorème de l'index.

1. On pose

$$\begin{aligned}0 &= x_1^2 + x_2^2 - 2\\ 0 &= -x_1^2 + x_2\end{aligned}$$

La deuxième équation donne $x_2 = x_1^2$ ce qui conduit à une équation d'ordre

$$x_2^2 + x_2 - 2$$

dont les solutions sont 1 et -2. La valeur $x_2 = 1$ donne deux points d'‘équilibre réel $(1, -1)$ et $(1, 1)$. La valeur $x_2 = -2$ conduit à des valeurs x_1 complexes. Les points d'équilibre correspondant n'apparaissent ainsi pas en réalité.

2. L'approximation linéaire autour du point $(-1,1)$ est

$$A_1 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_1=1,x_2=1)} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ -2x_1 & 1 \end{pmatrix}_{x_1=1,x_2=1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   et pour le second point d'équilibre $(1,1)$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Les valeurs propres sont

$$\lambda(A_1) = \{-3, 2\}$$

   le point d'équilibre est un point selle. En ce qui concerne le deuxième point d'équilibre

$$\lambda(A_2) = \{\frac{1}{2}(3 + i\sqrt{15}), \frac{1}{2}(3 - i\sqrt{15})\}$$

   est un foyer instable (instable parceque la partie réelle $\frac{3}{2} > 0$ est positive). On peut calculer les vecteurs propres pour le point selle

$$A_1 v_1 = \lambda_1 v_1$$

   autrement dit

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

   ce qui donne

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   et pour le second vecteur propre

$$A_2 v_2 = \lambda_2 v_2$$

   on a

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = +2 \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

   ce qui donne

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. En utilisant la technique graphique, on constate que l'équilibre de gauche possède un index -1 et celui de droite une index de $+1$ (cf. Figures 2 et 3).

4. $$\text{sgn } (A_1) = \text{sgn } \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \text{sgn } (-6) = -1$$

   ce qui correspond bien à l'index du point d'équilibre correspondant (point gauche $(-1,1)$) et

$$\text{sgn } (A_2) = \text{sgn } \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \text{sgn } (+6) = +1$$

   ce qui correspond également à l'index du point d'équilibre droit (point $(1,1)$). Ainsi, on confirme, sans pour autant le démontrer, que le signe du déterminant du Jacobien évalué au point d'équilibre donne l'index de celui-ci.

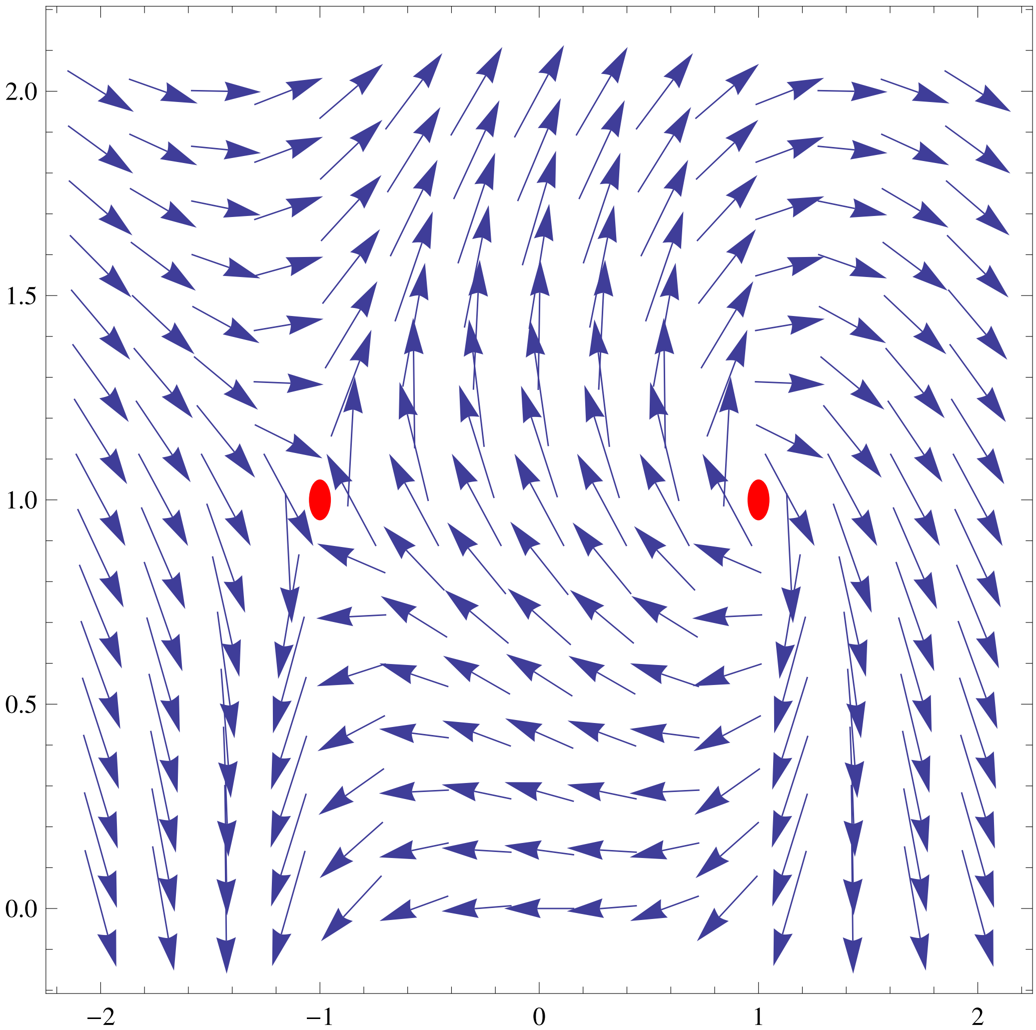

Figure 1: Plan de phase et équilibres. Le champ de vecteurs normalisés y est représenté.

5. En prenant un cercle de rayon 2 centré sur l'origine, on obtient un index de 0 conformément au théorème de l'index. Ceci est illustré à la figure 4.

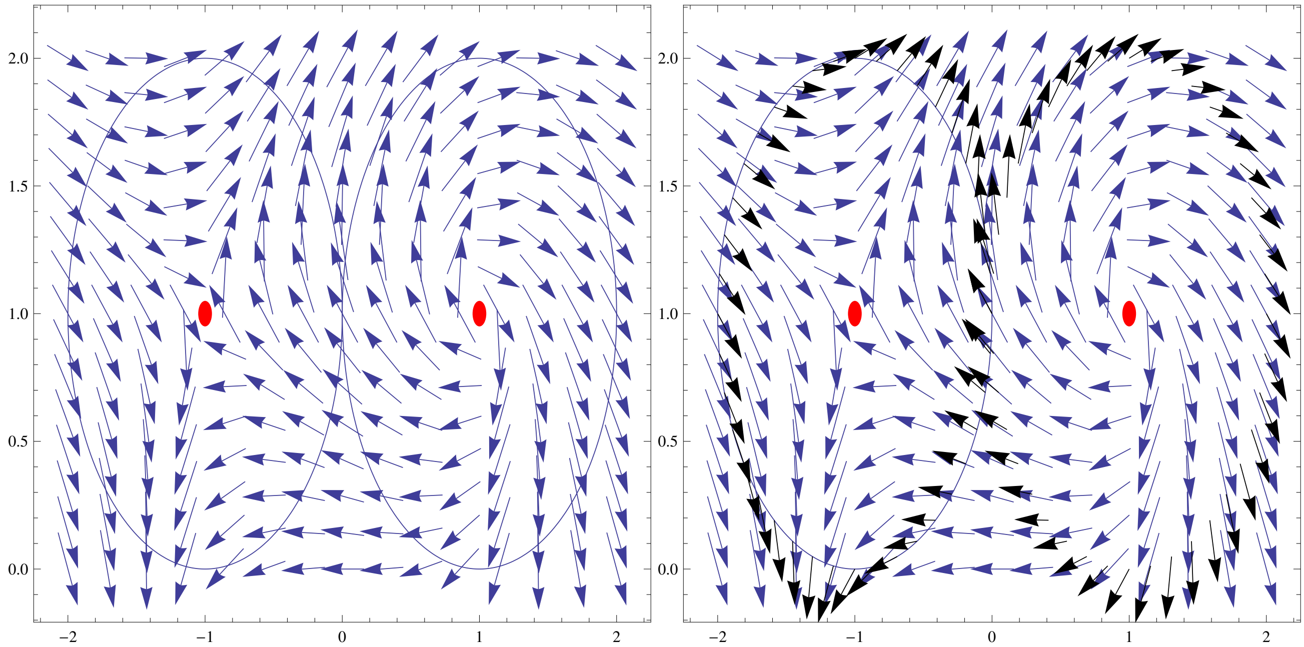

Figure 2: A gauche les deux contours de rayon 1 sont représentés. Attention à l'échelle différente entre l'axe des abscisse et celui des ordonnées. Ceci crée une distortion faisant apparaître les contours circulaires sous la forme d'ellipses. A droite on a reporté le champs de vecteur normalisé et évalué le long des contours respectifs (couleur noire).

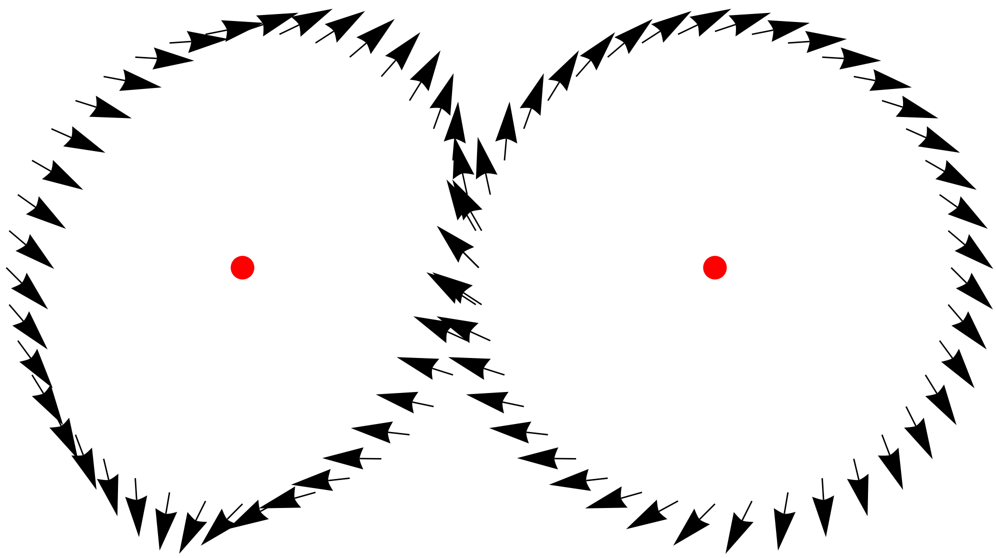

Figure 3: On constate facilement en suivant le sens trigonométrique des points d'ancrage de la flèche que la pointe de la flèche tourne dans le sens trigonométrique négatif pour le point d'équilibre gauche, et dans le sens trigonométrique positif pour le point déquilibre droit, une fois l'ancrage de la flèche ramenée sur une point commun. L'index est ainsi de -1 (1 seul tour complet des têtes des flêches) pour le point gauche et index $+1$ pour le point droit.

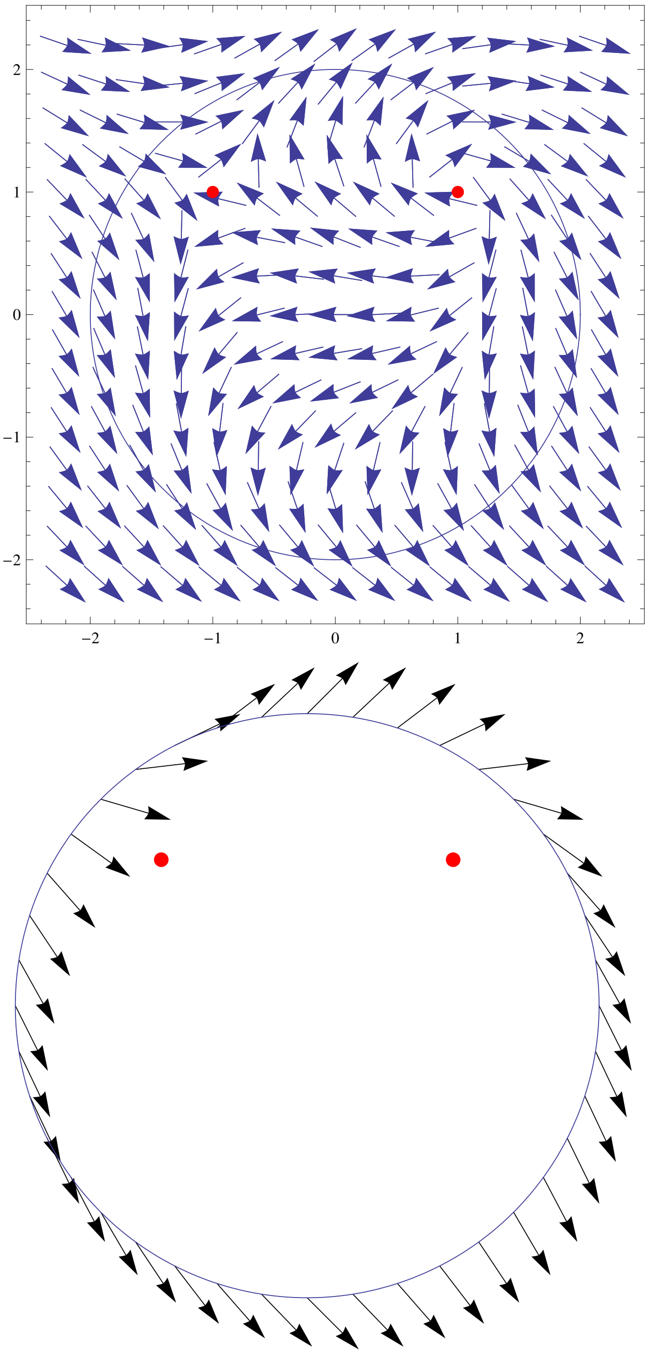

Figure 4: Lorsqu'un contour englobe les deux points d'équilibres, on constate qu'il est impossible pour les pointes des flêches du champ de vecteur normalisé d'effectuer un tour complet lorsqu'on parcours le contour et après report des vecteurs sur une origine commune. L'index est 0 et le théorème de l'index donne bien $-1 + 1 = 0$