Commande non linéaire

STI - Master

Série 0 - corrigé

Dr. Ph. Müllhaupt

Exercice 0.1

1. Soit
$$\dot{x} = -3x$$
Déterminer un intervalle pour la condition initiale x_0, c.-à-d. un $r > 0$, de telle sorte que
$$|x_0| < r$$
implique
$$|x(t)| < 5 \qquad \forall t > 0$$
2. Même question pour
$$\ddot{x} = -2\dot{x} - x$$
à savoir, déterminer $r > 0$, de telle sorte que
$$\|x_0\| < r$$
implique
$$\|\mathcal{X}(x_0, t)\| < 5 \qquad \forall t > 0$$
où $\mathcal{X}(x_0, t)$ désigne la solution $x(t)$. Cette notation est utilisée d'une part pour insister sur la dépendance de la condition initiale x_0, et, d'autre part, pour ne pas confondre la solution avec le vecteur d'état x.

Corrigé

1. L'équation différentielle $\dot{x} = -3x$ possède comme solution
$$\mathcal{X}(x_0, t) = x_0 e^{-3t}$$
Ainsi, lorsque $|x_0| < r$, il est garantit que $|\mathcal{X}(x_0, t)| < r$. En effet, $|x_0 e^{-3t}| < |x_0| < r$, $\forall t > 0$ étant donné que
$$|e^{-3t}| < 1 \qquad \forall t > 0$$
On peut ainsi choisir $0 < r < 5$ (cf. fig. 1)

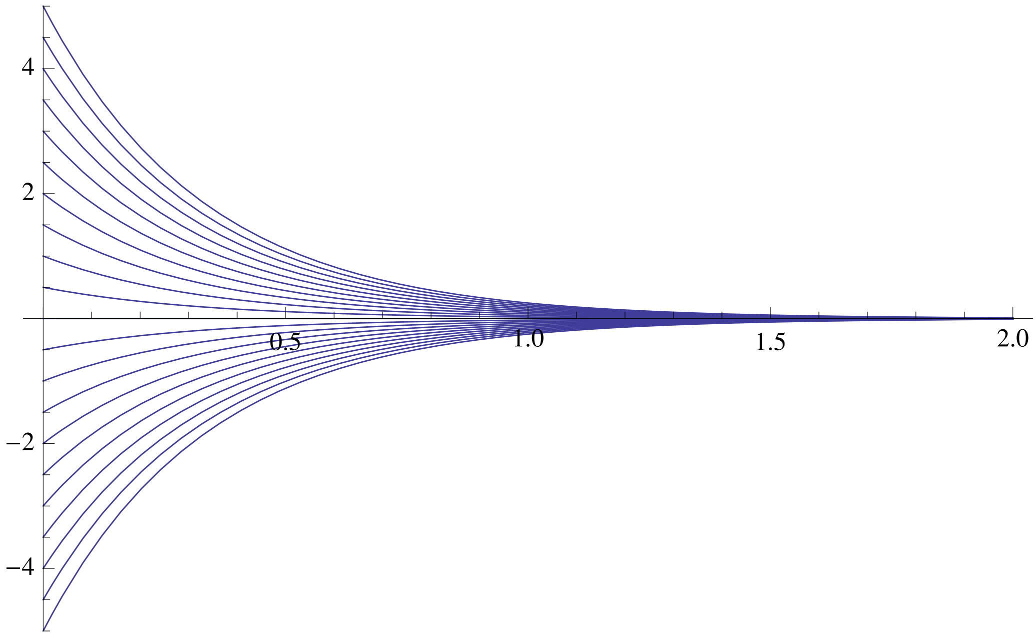

Figure 1: La condition initiale x_0 peut être choisie dans l'intervalle $-5 < x_0 < 5$ pour garantir $|\mathcal{X}(x_0, t)| < 5$, $\forall t > 0$.

2. L'équation différentielle $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$ possède un polynôme caractéristique ayant les deux racines identiques en -1. La solution comporte donc une partie polynômiale (due à la multiplicité des racines) et une partie exponentielle avec la valeur -1 dans l'exposant. Autrement dit,
$$\mathcal{X}(x_0, t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$$
avec des constantes d'intégration C_1 et C_2 à déterminer en fonction de conditions initiales :
$$\begin{aligned} \mathcal{X}(x_0, \dot{x}_0, 0) &= x_0 = C_1 \\ \dot{\mathcal{X}}(x_0, \dot{x}_0, 0) &= \dot{x}_0 = C_2 - C_1 \end{aligned}$$
d'où on tire les constantes en fonction des conditions initiales
$$\begin{aligned} C_1 &= x_0 \\ C_2 &= x_0 + \dot{x}_0 \end{aligned}$$
de telle sorte que x et $\dot{x}$ sont donés par
$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= (x_0 + t(x_0 + \dot{x}_0))\, e^{-t} \\ \dot{\mathcal{X}} &= (x_0 + \dot{x}_0)e^{-t} - (x_0 + t(x_0 + \dot{x}_0))\, e^{-t} \\ &= \dot{x}(0)e^{-t} - (x(0) + \dot{x}(0))te^{-t} \end{aligned}$$
Choisissons un ϵ tel que $0 < \epsilon < 1$. A partir de la série de la fonction exponentielle
$$e^{\epsilon t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\epsilon t)^k = 1 + \epsilon t + \frac{1}{2}\epsilon^2 t^2 + \cdots$$

on a la majoration suivante après division par ϵ

$$\frac{e^{\epsilon t}}{\epsilon} > t$$

que l'on peut utiliser dans les expressions de $\mathcal{X}$ et $\dot{\mathcal{X}}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} &= x_0 + t(x_0 + \dot{x}_0)e^{-t} \\
|\mathcal{X}| &\leq |x_0| + t(|x_0| + |\dot{x}_0|)e^{-t} \\
&< |x_0| + \frac{e^{\epsilon t}}{\epsilon}(|x_0| + |\dot{x}_0|)e^{-t} \\
&< |x_0| + (|x_0| + |\dot{x}_0|)\frac{1}{\epsilon}
\end{aligned}$$

avec $0 < \epsilon < 1$. Un ϵ proche de 0 conduit à une estimation conservative. On a donc tout intérêt à prendre la valeur maximum possible autrement dit une valeur $\epsilon = 1^-$ (juste inférieur à l'unité), et prendre la limite ensuite pour $\epsilon \to 1$. Toutefois, il faut encore vérifier que la deuxième valeur de l'état (c'est-à-dire $\dot{x}$) demeure également bornée (éventuellement en renforçant la borne)

$$\begin{aligned}
|\dot{\mathcal{X}}| &\leq |\dot{x}(0)| + \frac{1}{\epsilon}|x(0)| + \frac{1}{\epsilon}|\dot{x}(0)| \\
&< 3 \max\left(|x(0)|, |\dot{x}(0)|\right)
\end{aligned}$$

(après passage à la limite $\epsilon \to 1$), de telle sorte que

$$\|\underline{\mathcal{X}}\| = \sqrt{\mathcal{X}^2 + \dot{\mathcal{X}}^2} \leq \sqrt{2}\max(|\mathcal{X}|, |\dot{\mathcal{X}}|) < 3\sqrt{2}\max(|x(0)|, |\dot{x}(0)|)$$

En choisissant $R = 5$ et en voulant garantir $\|\underline{\mathcal{X}}\| < R = 5$, il faudra choisir

$$r < \frac{R}{3\sqrt{2}} = \frac{5}{3\sqrt{2}}$$

Cependant (cf. fig. 4) l'estimation de te^{-t} par $\frac{1}{\epsilon}e^{\epsilon t}e^{-t}$ est très conservative et entraîne une surestimation de l'effet de la condition initiale sur la trajectoire du système. La nature conservative de la borne obtenue n'enlève rien au fait qu'elle est suffisante pour établir la stabilité de l'équation différentielle sans devoir établir celle-ci par les valeurs propres. L'objectif de cet exercice est de montrer que l'on peut définir la stabilité par le fait que l'on peut borner les trajectoires du système en choisissant convenablement les conditions initiales de telle sorte à permettre une définition de la stabilité qui sera également valable pour les systèmes non linéaires.

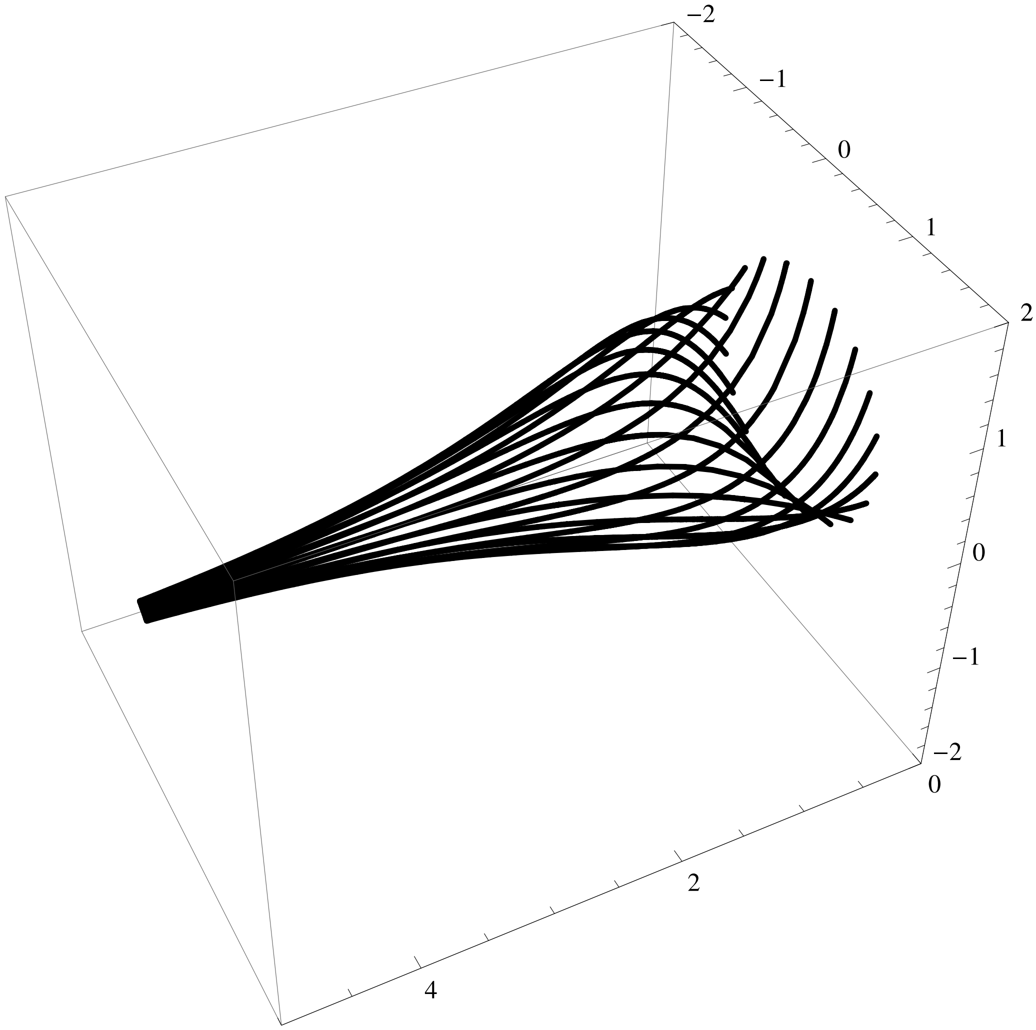

Figure 2: Trajectoires pour un vecteur de conditions initiales x_0 tels que $\|x_0\| = 1$. Comme le module $\|\mathcal{X}(x_0, t)\| < 1$ pour tout $t > 0$, On constate que l'on aurait pu prendre $r = R$ au lieu du facteur $\frac{1}{3\sqrt{2}}$. L'estimée obtenue est donc conservatrice.

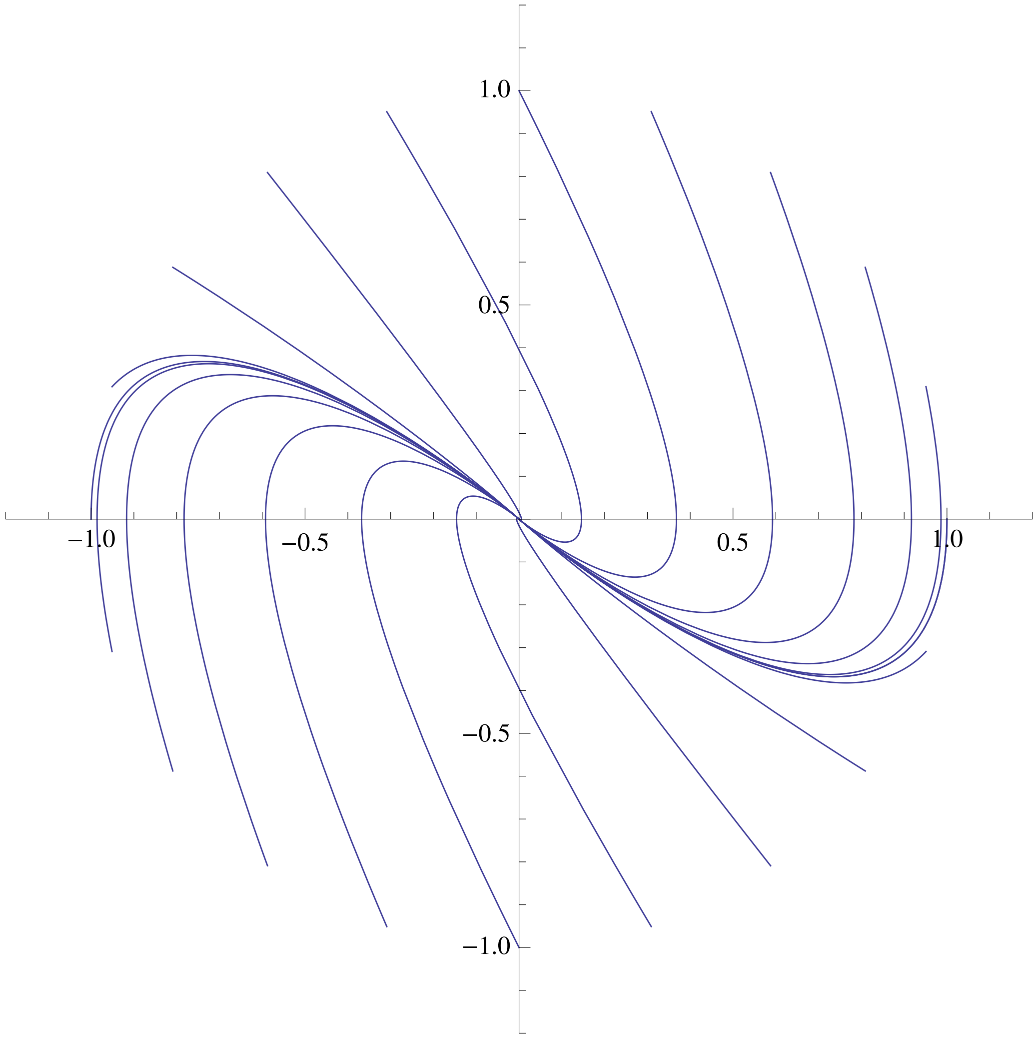

Figure 3: Représentation dans le plan x, $\dot{x}$ de la trajectoire (le temps n'apparaît pas explicitement) pour un vecteur de conditions initiales x_0 tels que $\|x_0\| = 1$. Comme le module $\|\mathcal{X}(x_0, t)\| < 1$ pour tout $t > 0$, On constate que l'on aurait pu prendre $r = R$ au lieu du facteur $\frac{1}{3}$. L'estimée obtenue est donc conservatrice.

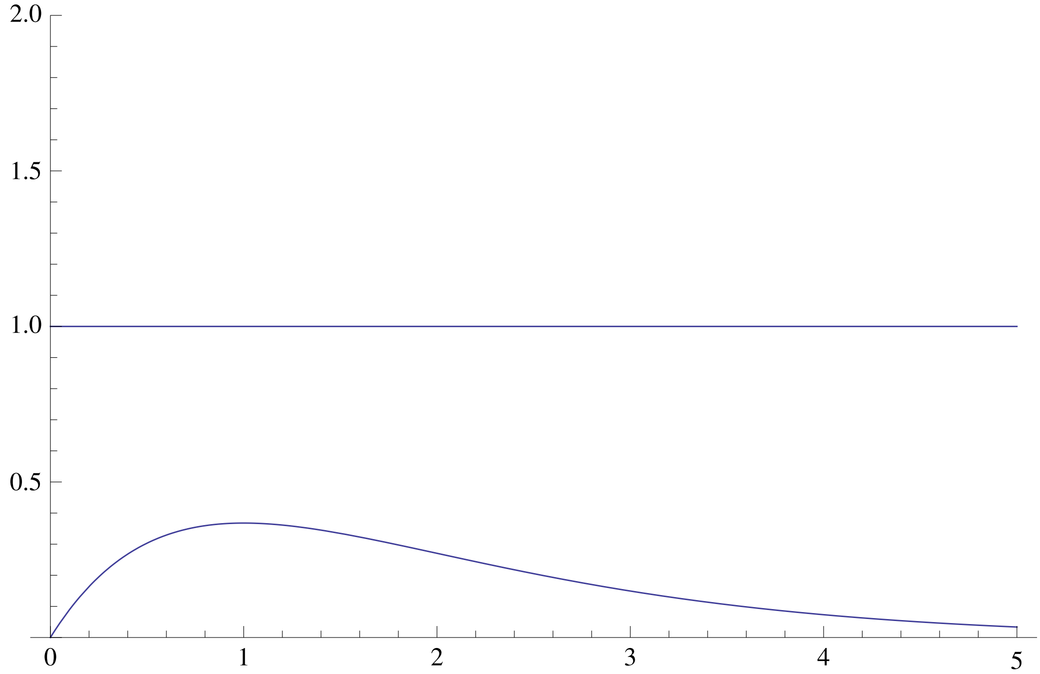

Figure 4: Estimer te^{-t} par $\frac{1}{\epsilon}e^{\epsilon t}e^{-t}$ avec $\epsilon = 1^-$ est très conservateur.

Exercice 0.2

Soit le système

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 16 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} u$$

1. On considère la sortie $y = x_1$. Dériver la sortie y jusqu'à ce que l'entrée u apparaisse. Est-ce qu'il est possible de stabiliser la sortie en utilisant l'entrée une fois que celle-ci est apparue ?
2. Même question avec la sortie $y = -5x_1 + 2x_2$.
3. Selon vous, quel est l'avantage de la deuxième sortie par rapport à la première ?

Corrigé

En écrivant le système de manière explicite (sans la notation matricielle)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1 - x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 &= 16x_1 - 4x_2 + 5u \end{aligned} \qquad (1)$$

1. En prenant $y = x_1$ et en dérivant une fois, l'entrée fait son apparition

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = 4x_1 - x_2 + 2u$$

de telle sorte que l'on peut stabiliser y en choisissant une équation différentielle stable du premier ordre pour y, par exemple

$$\dot{y} = -ky$$

avec $k > 0$ un paramètre (gain) qui définit la vitesse de convergence étant donné que la solution s'écrit

$$y(t) = y_0 e^{-kt}$$

La loi de commande associée est

$$4x_1 - x_2 + 2u = -ky = -kx_1$$

autrement dit

$$u = -\frac{1}{2}(k+4)x_1 + \frac{1}{2}x_2$$

Il reste à comprendre ce qui va se passer asymptotiquement une fois que y aura convergé vers 0. L'équation (1) deviendra alors (avec $x_1 = y = 0$)

$$\dot{x}_2 = 16x_1 - 4x_2 - \frac{5}{2}(k+4)x_1 + \frac{5}{2}x_2 = -4x_2 + \frac{5}{2}x_2 = -\frac{3}{2}x_2$$

qui est une équation stable dont le solution est

$$x_2(t) = x_2(0)e^{-\frac{3}{2}t}$$

2. En prenant

$$y = -5x_1 + 2x_2 \tag{2}$$

les dérivées successives jusqu'à l'apparition de l'entrée sont

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= -5\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 \\
&= -5(4x_1 - x_2 + 2u) + 2(16x_1 - 4x_2 + 5u) \\
&= -20x_1 + 5x_2 - 10u + 32x_1 - 8x_2 + 10u \\
&= 12x_1 - 3x_2 && (3) \\
\ddot{y} &= 12\dot{x}_1 - 3\dot{x}_2 \\
&= 12(4x_1 - x_2 + 2u) - 3(16x_1 - 4x_2 + 5u) \\
&= 48x_1 - 12x_2 + 24u - 48x_1 + 12x_2 - 15u \\
&= 9u && (4)
\end{aligned}$$

On peut choisir un polynôme ayant des racines à partie réelle négative, par exemple

$$(s+\lambda_1)(s+\lambda_2) = s^2 + (\lambda_1+\lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2$$

avec $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. En multipliant par $Y(s)$ et en prenant la transformée de Laplace inverse (à condition initiale nulle) pour revenir dans le domaine temporel '

$$\ddot{y} + (\lambda_1+\lambda_2)\dot{y} + \lambda_1\lambda_2 y = 0$$

Finalement, en substituant y, $\dot{y}$ et $\ddot{y}$ donnés par (2),(3) et (4), il vient

$$9u + (\lambda_1 + \lambda_2)(12x_1 - 3x_2) + \lambda_1\lambda_2(-5x_1 + 2x_2) = 0$$

ce qui donne la loi de commande

$$u = \frac{1}{9}(-2\lambda_1 - 12\lambda_2 + 5\lambda_1\lambda_2)x_1 + \frac{1}{9}(3\lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_2)x_2$$

3. L'avantage de la seconde méthode sur la première est la modification des deux valeurs propres (que l'on a placé en $-\lambda_1$ et $-\lambda_2$). Seul une des deux valeurs propres est assignée dans la première méthode (placé en $-k$). L'autre valeur propre est fixe et non influençable (située en -4). On a eu de la chance car cette dernière est à partie réèlle négative. Mais cela n'aurait très bien pas eu être le cas.