

Convergence & Choix de discrétisation

**Modélisation et simulation
par éléments finis**

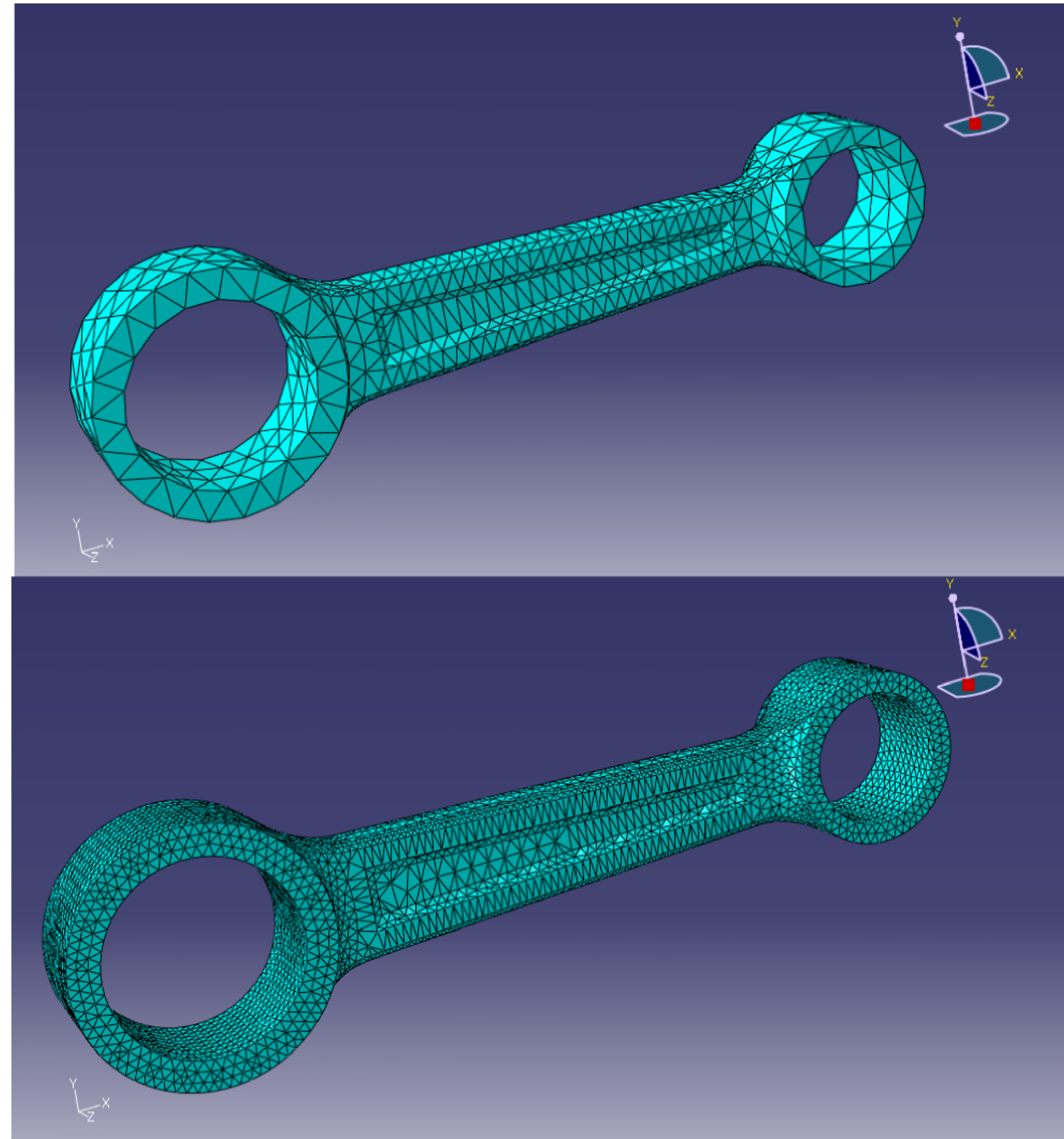
Approximations dans un modèle EF

Deux types d'approximations :

1. Discrétisation géométrique du domaine :
 - Taille caractéristique h des éléments ?
 - Détermine le nombre d'éléments.
2. Approximation interne dans chaque élément :
 - Ordre p des fonctions de base ?
 - Détermine le nombre de nœuds de chaque élément.

→ Comment choisir la taille h et l'ordre p ?

Raffinement en h



$$h = 5$$

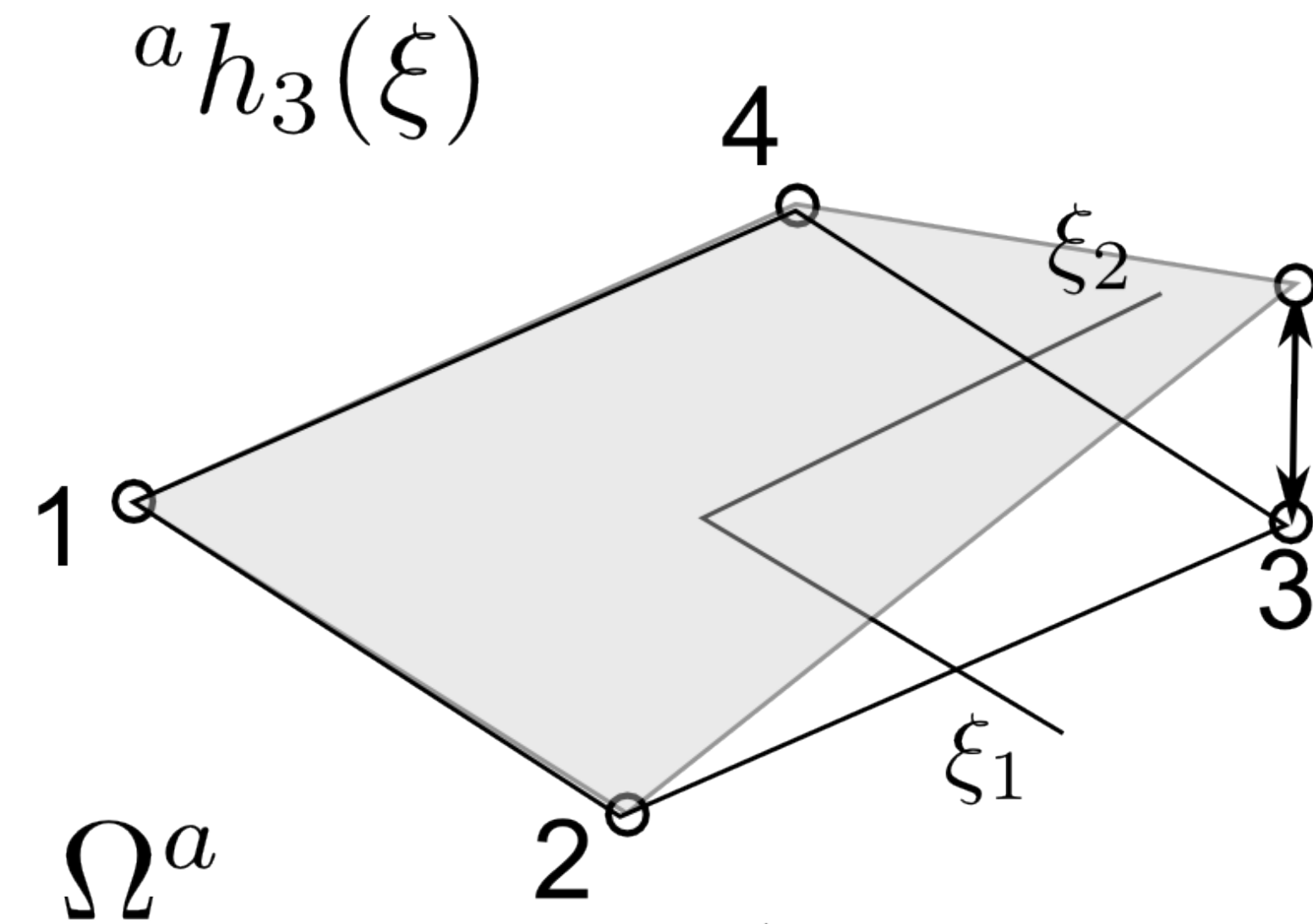
1421 nodes
5132 elements



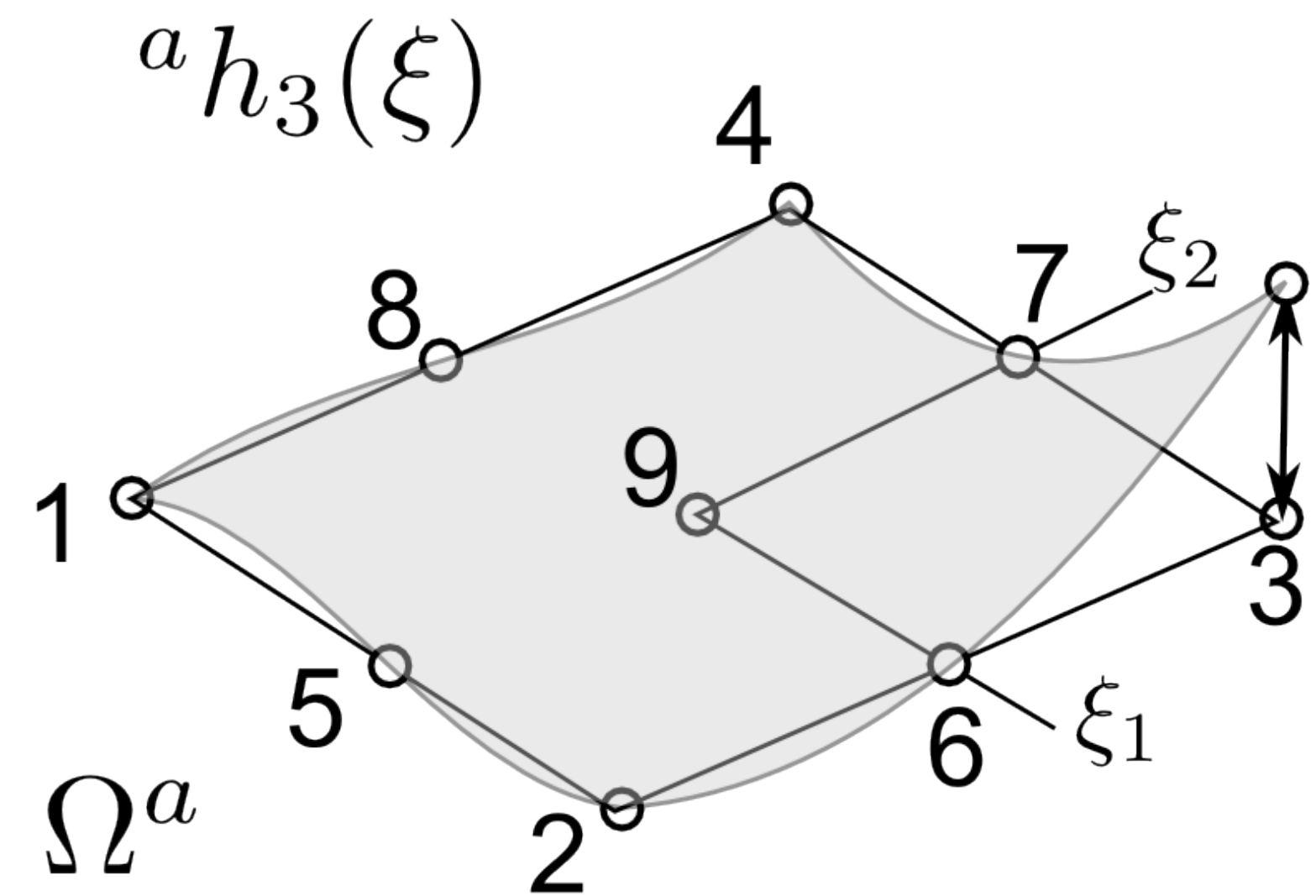
$$h = 1.5$$

8825 nodes
37913 elements

Raffinement en p



first order $p = 1$



second order $p = 2$

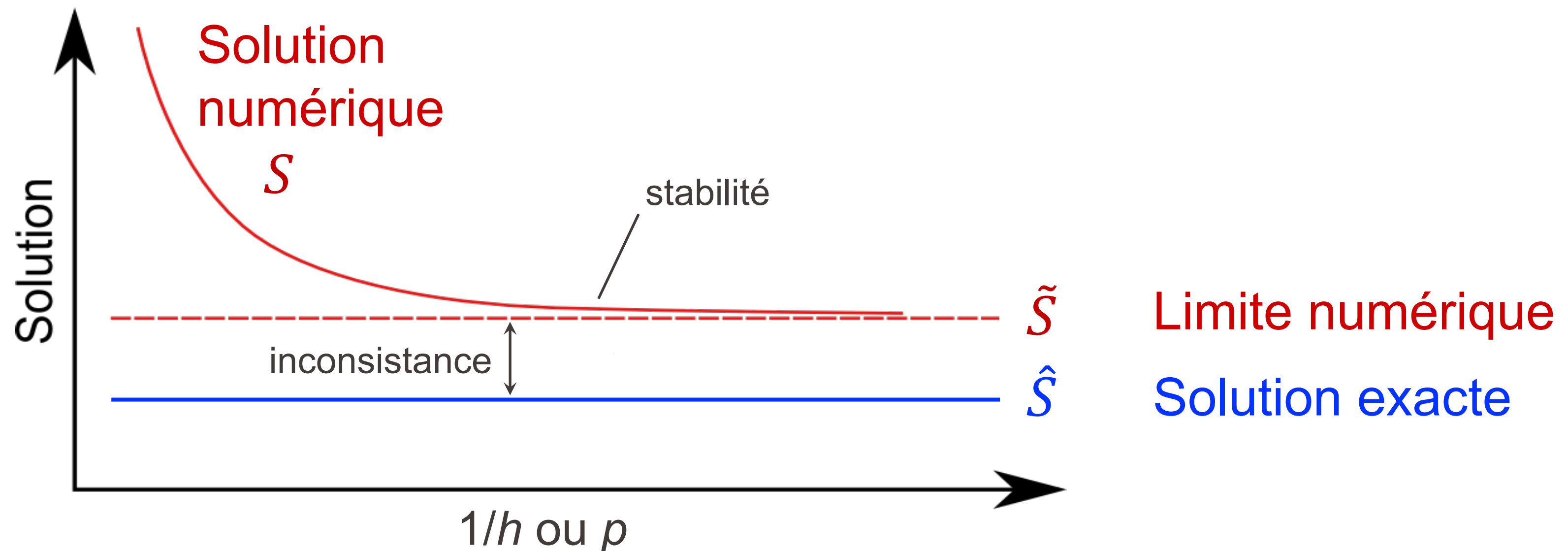
p -refinement

Compromis précision / coût de calcul

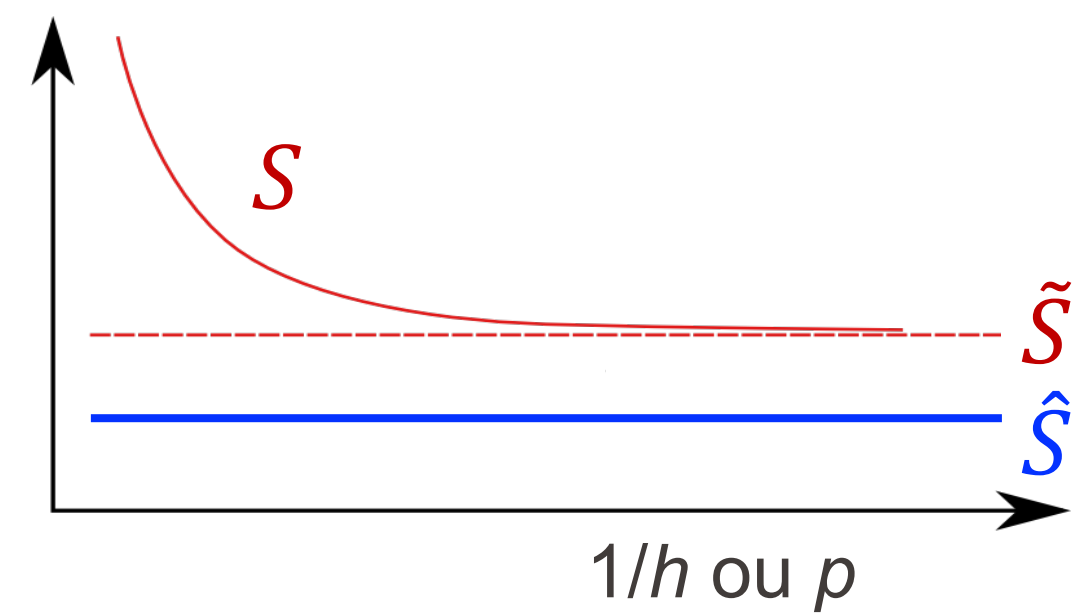
- Les paramètres h et p déterminent le nb. total N de DDLs du modèle.
 - Quand h diminue (maillage plus fin), N augmente.
 - Quand l'ordre p augmente, N augmente aussi.
 - Le coût de calcul pour résoudre le système linéaire $\mathbf{K}.\mathbf{q}=\mathbf{r}$ augmente environ comme $O(N^3)$.
- Un critère important est la précision en fonction du coût de calcul. En pratique, on choisit les paramètres (h,p) pour obtenir le meilleur compromis précision / coût de calcul : une solution précise en un temps raisonnable.

Définitions

- Un modèle approché **converge** si la solution numérique S tend vers la solution exacte \hat{S} quand $h \rightarrow 0$ et $p \rightarrow \infty$. Il y a convergence si la formulation numérique est stable et consistante.
 - Formulation **stable** : S tend vers une limite \tilde{S} (stagnation de la solution).
 - Formulation stable et aussi **consistante** : $\tilde{S} = \hat{S}$ (le modèle numérique résout le même problème que la formulation analytique).



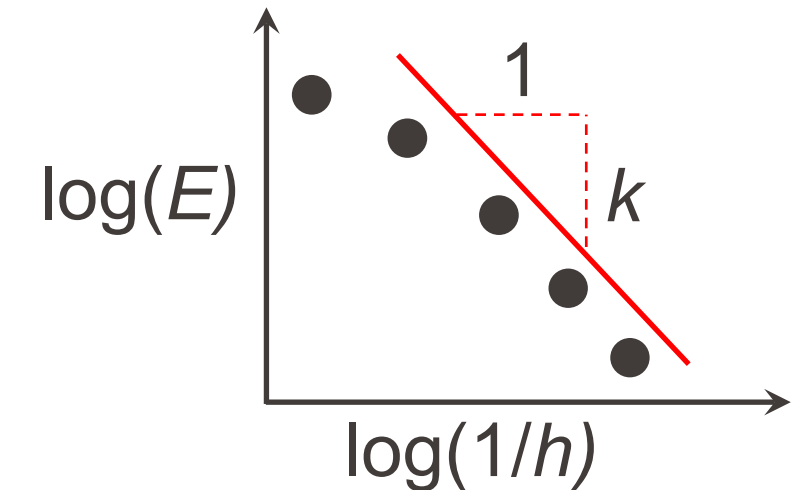
Etude de convergence



Deux scénarios :

1. Etude **théorique** par rapport à la **solution exacte (analytique)** \hat{S} .

- Quand on développe un code EF et qu'on veut le valider / étudier ses propriétés de convergence.
- Méthode : varier h ou p , et analyser l'erreur $E = \|S - \hat{S}\|$.
La formulation est consistante si $\tilde{S} \rightarrow \hat{S}$ (i.e. $E \rightarrow 0$).
L'ordre de convergence k est tel que E décroît comme h^k .



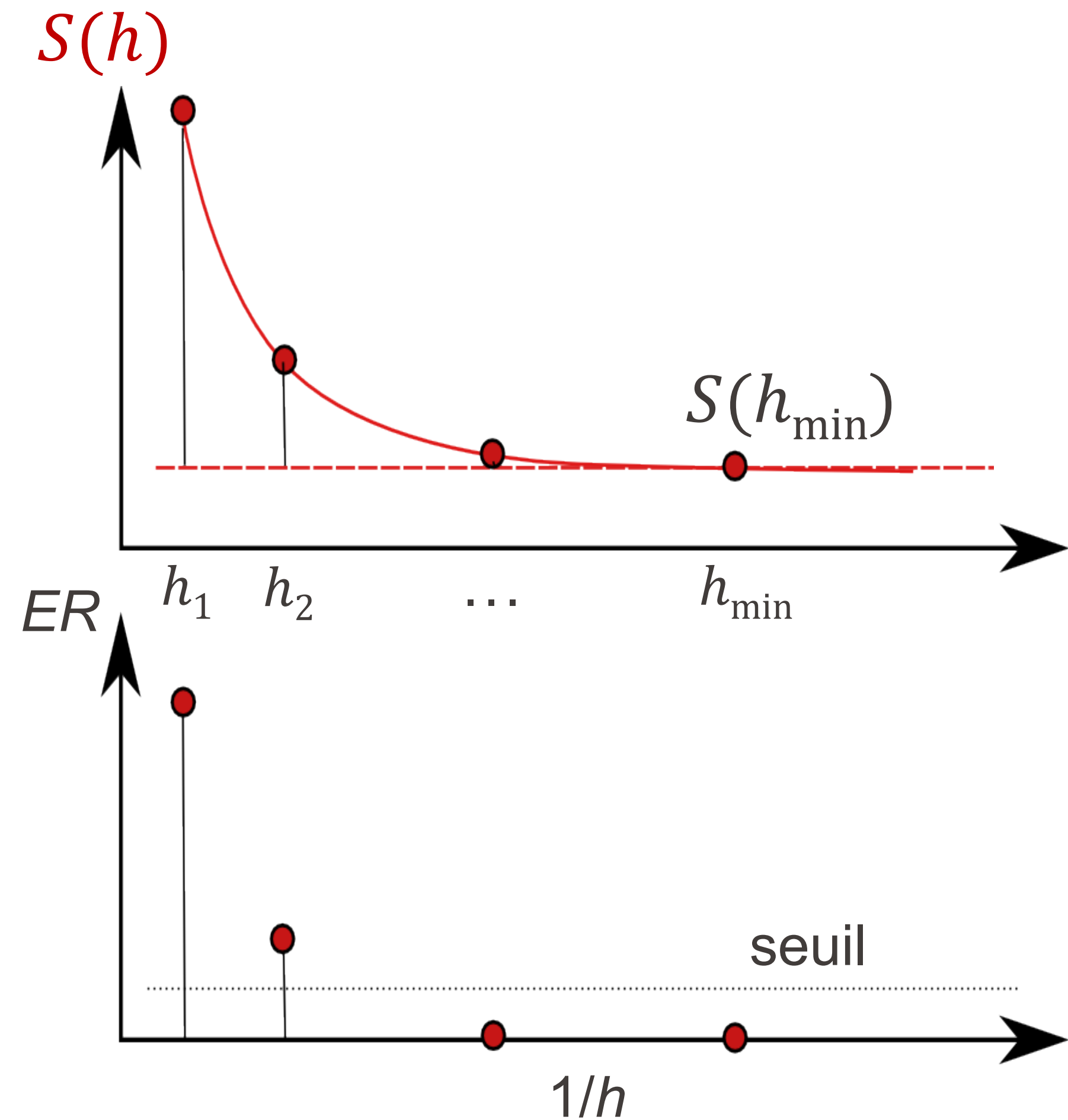
2. Etude **pratique** sans solution exacte (inconnue).

- La plupart des formulations EF sont consistantes \rightarrow on ne vérifie pas la consistance de manière systématique à chaque étude.
- Par contre, la **convergence avec h doit toujours être vérifiée**.
- Deux méthodes (slides suivants) : calculer (A) l'erreur par rapport au maillage "le plus fin possible", ou (B) la variation relative au fur et à mesure qu'on raffine.

Etude de convergence : méthode A

- Varier la taille h (au moins 3 valeurs). Commencer avec h_{\min} pour obtenir le maillage le plus fin possible dans la limite des ressources disponibles (temps, mémoire, etc).
- Utiliser le **maillage le plus fin comme référence**, et analyser l'évolution de l'**erreur relative**

$$ER_i = ||S(h_i) - S(h_{\min})|| / ||S(h_{\min})||.$$
- Maillage suffisamment fin quand ER plus petite qu'un seuil prédéfini (qui dépend des exigences de précision, des incertitudes, des marges de sécurité etc).
- Méthode coûteuse, rarement utilisée.

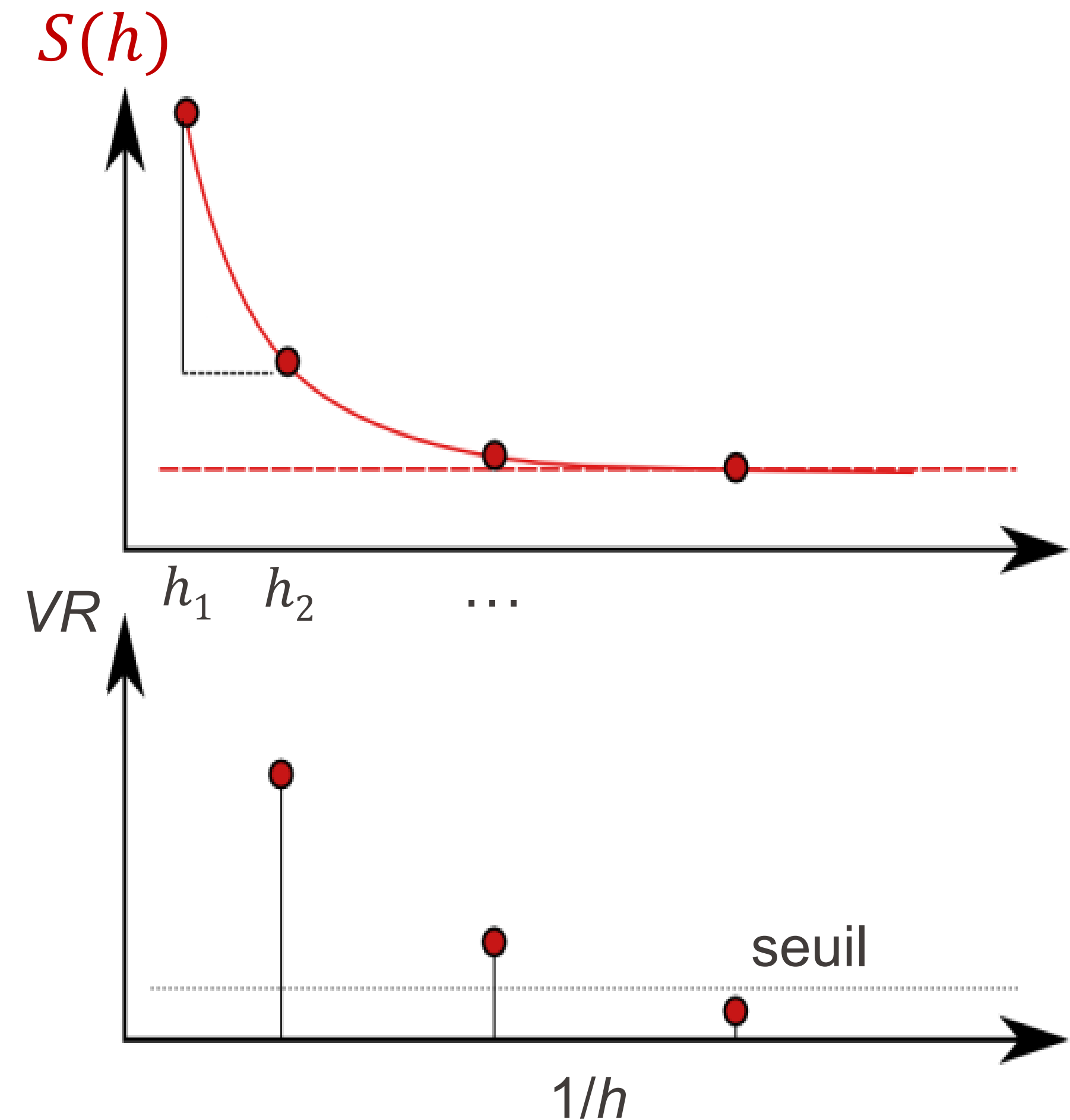


Etude de convergence : méthode B

- Commencer avec h_1 assez grande (maillage assez grossier) $\rightarrow S_1(h_1)$
- Raffiner de manière **significative** (augmenter le nb. de nœuds d'au moins 50%) $\rightarrow S_2(h_2)$
- Utiliser le **maillage précédent comme référence**, et analyser l'évolution de la **variation relative**

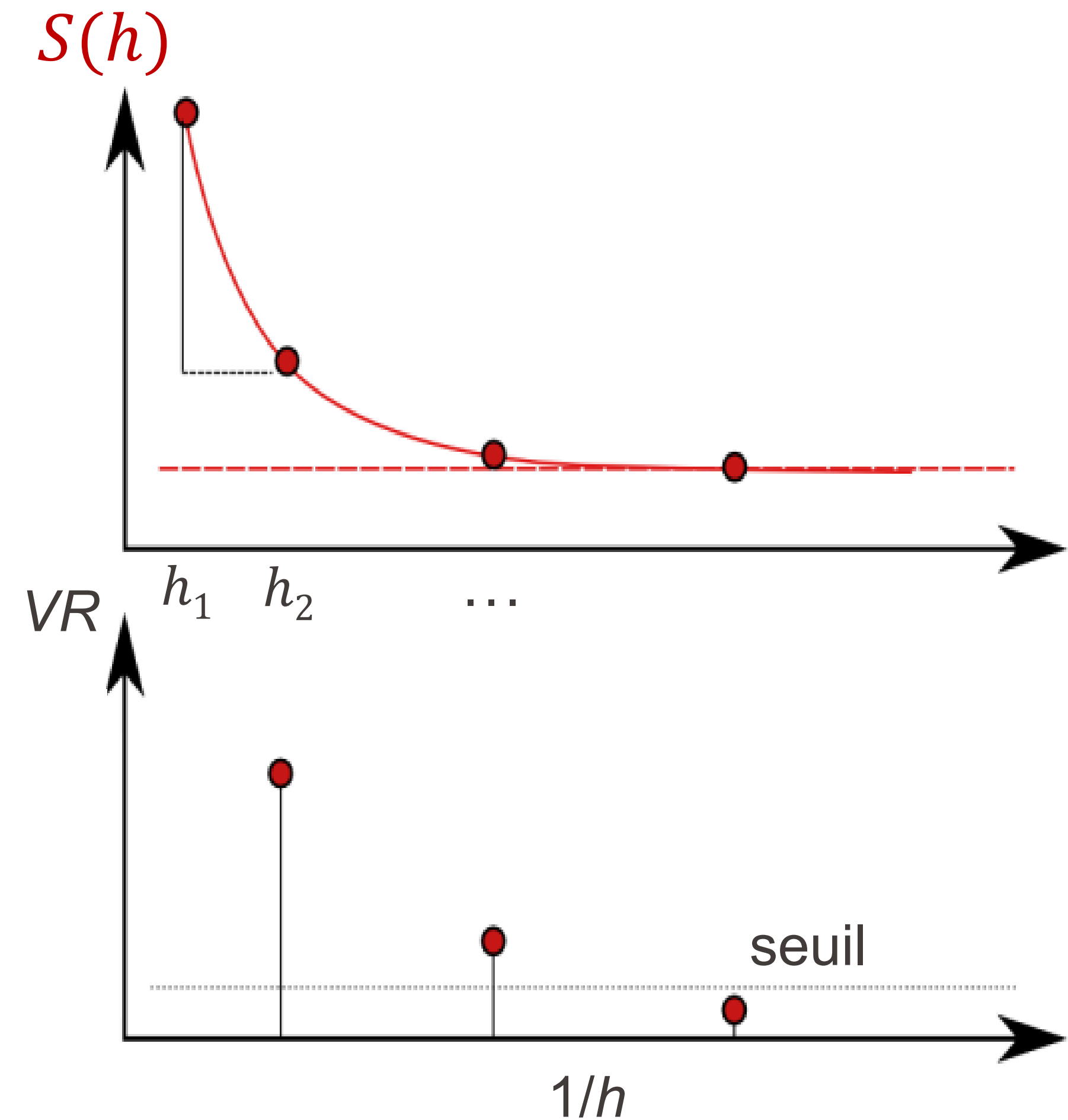
$$VR_i = ||S(h_i) - S(h_{i-1})|| / ||S(h_{i-1})||.$$

- Maillage suffisamment fin quand VR plus petite qu'un seuil prédéfini (qui dépend des exigences de précision, des incertitudes, des marges de sécurité etc).
- Méthode couramment utilisée.



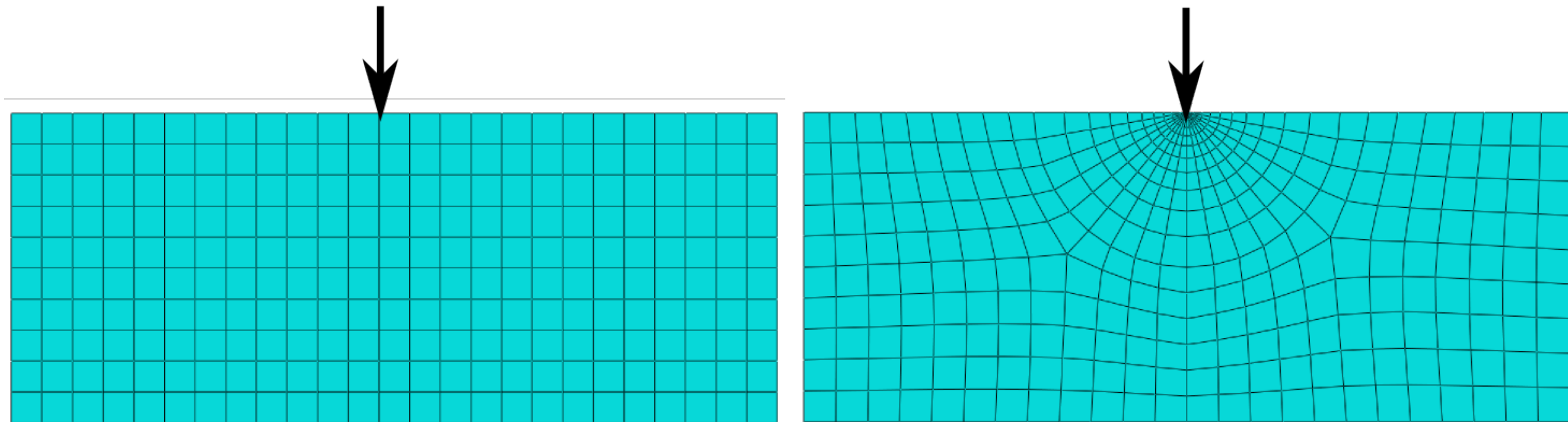
Etude de convergence

- Graphe de convergence = "assurance qualité", qui démontre que la **solution est indépendante du maillage**.
- C'est seulement avec un graphe de convergence qu'on peut **faire confiance aux résultats**.



Raffinement local

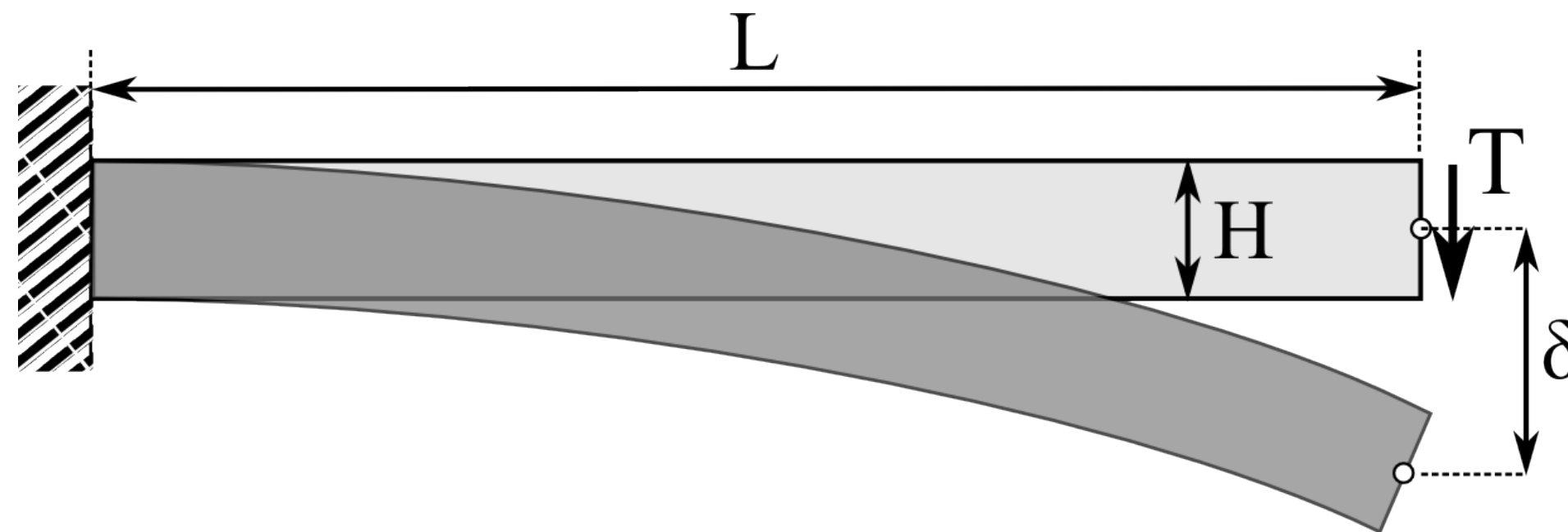
- Quand on s'intéresse à une valeur locale (par ex. contrainte max), il est possible d'utiliser un raffinement local ($h_{\text{local}} < h_{\text{global}}$).



- En plus de l'étude de convergence avec h_{global} , il est recommandé de vérifier la convergence avec h_{local} .

Etude de convergence : exemple 2D

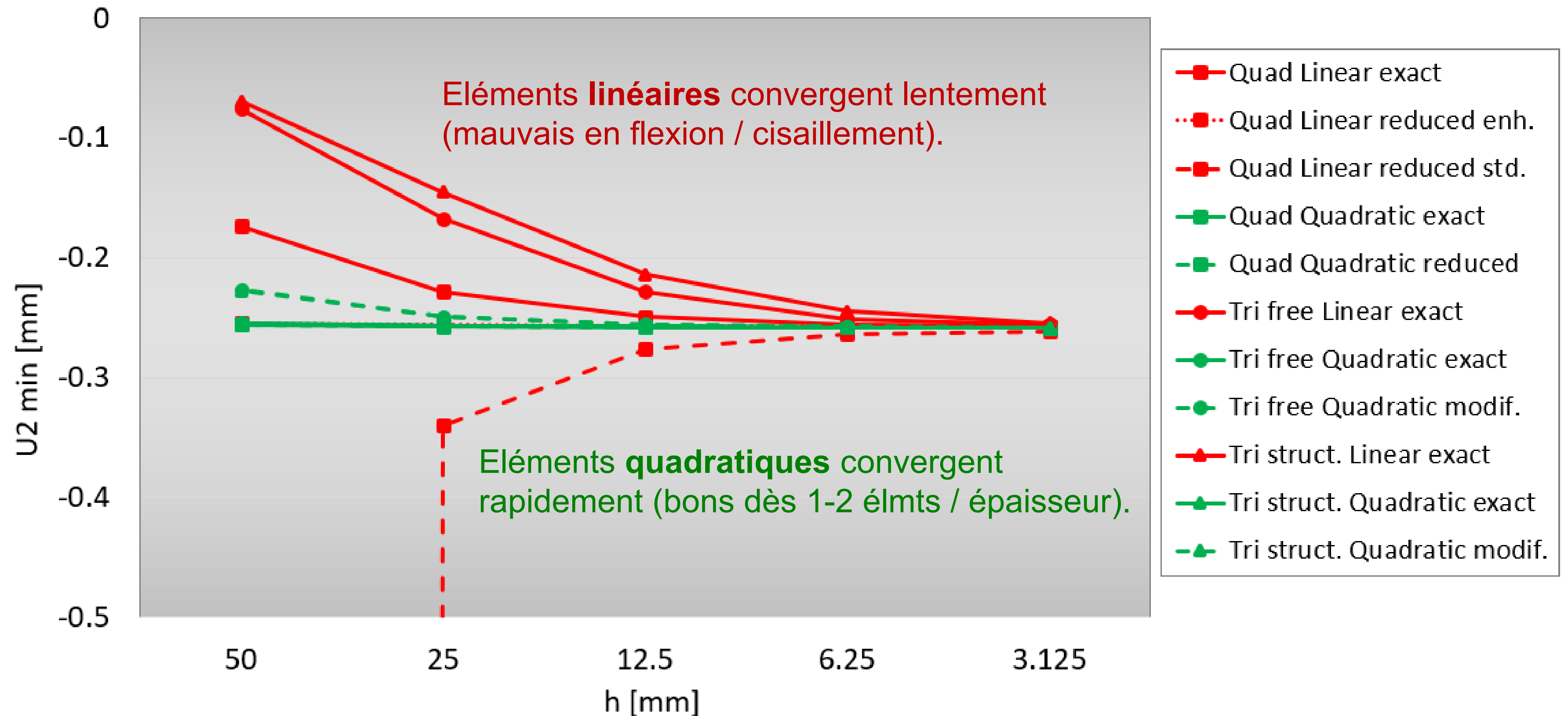
- Compare différentes formulations 2D (ici contraintes planes)
- Variables : ordre p , taille maillage h , forme éléments, options d'intégration
- Cas test : poutre encastrée



- $L \times H = 250 \times 50 \text{ mm}^2$, $E = 100 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, traction $T = 1 \text{ MPa}$
- Quantité d'intérêt : $U_2 \text{ min}$ (déplacement vertical minimum)

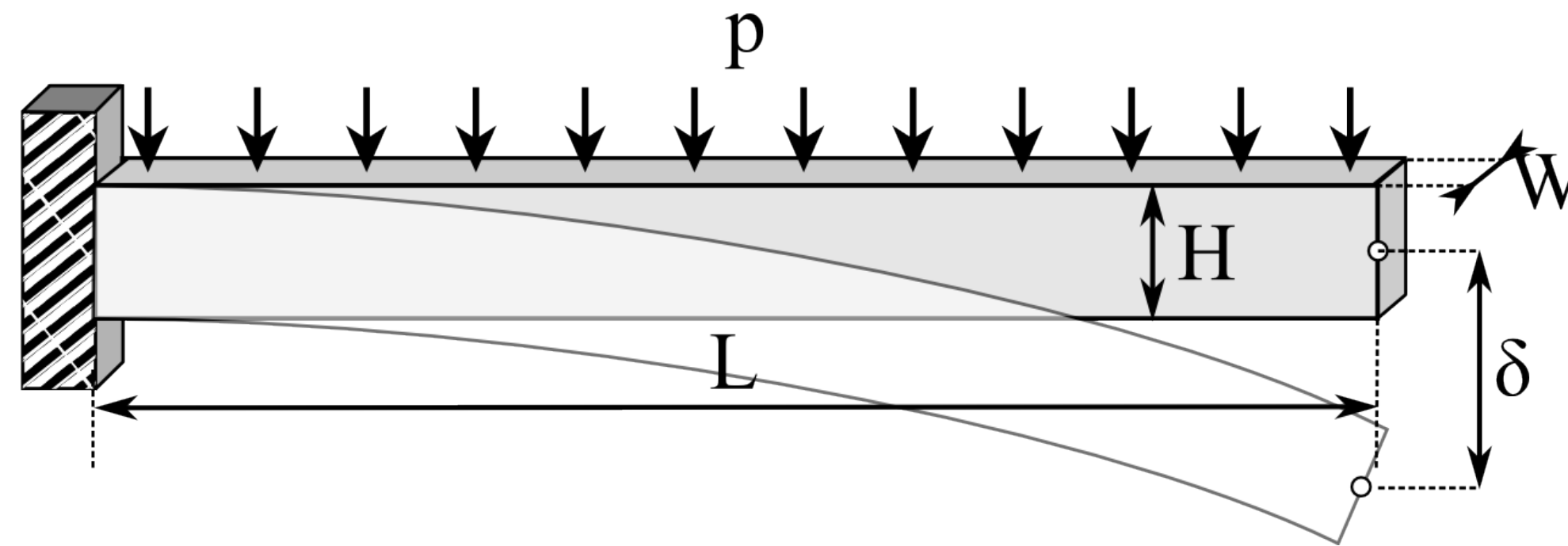
Etude de convergence : exemple 2D

- Très grande variabilité si seulement 1-2 élmts dans l'épaisseur.
- En raffinant, convergence pour toutes les formulations.



Etude de convergence : exemple 3D

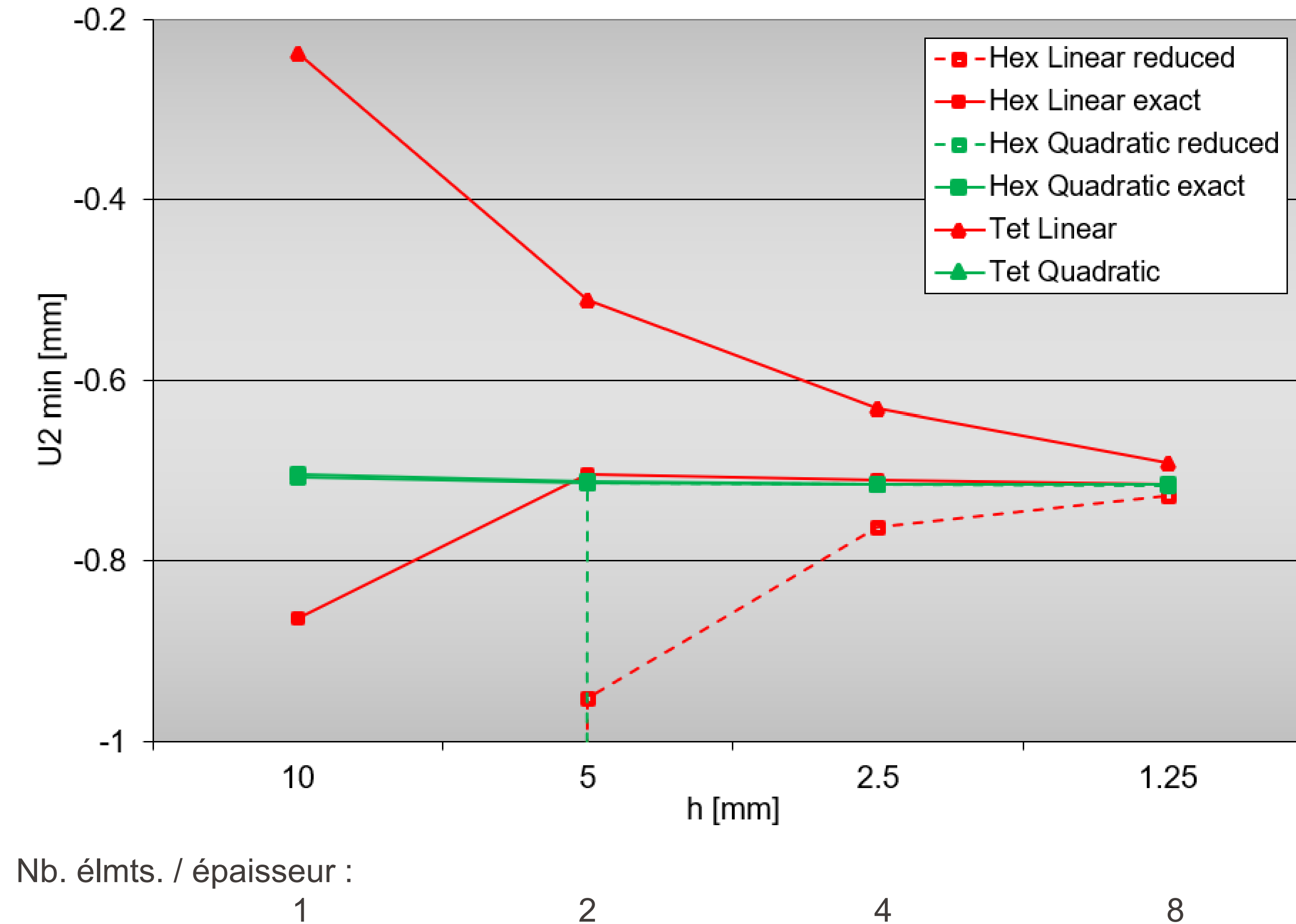
- Compare différentes formulations 3D
- Variables : ordre p , taille maillage h , options d'intégration
- Cas test : poutre encastrée



- $L \times H \times W = 100 \times 10 \times 10 \text{ mm}^3$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, pression $p = 1 \text{ MPa}$
- Quantité d'intérêt : U_2 min (déplacement vertical minimum) et S max (contraintes Von Mises maximales).

Etude de convergence : exemple 3D

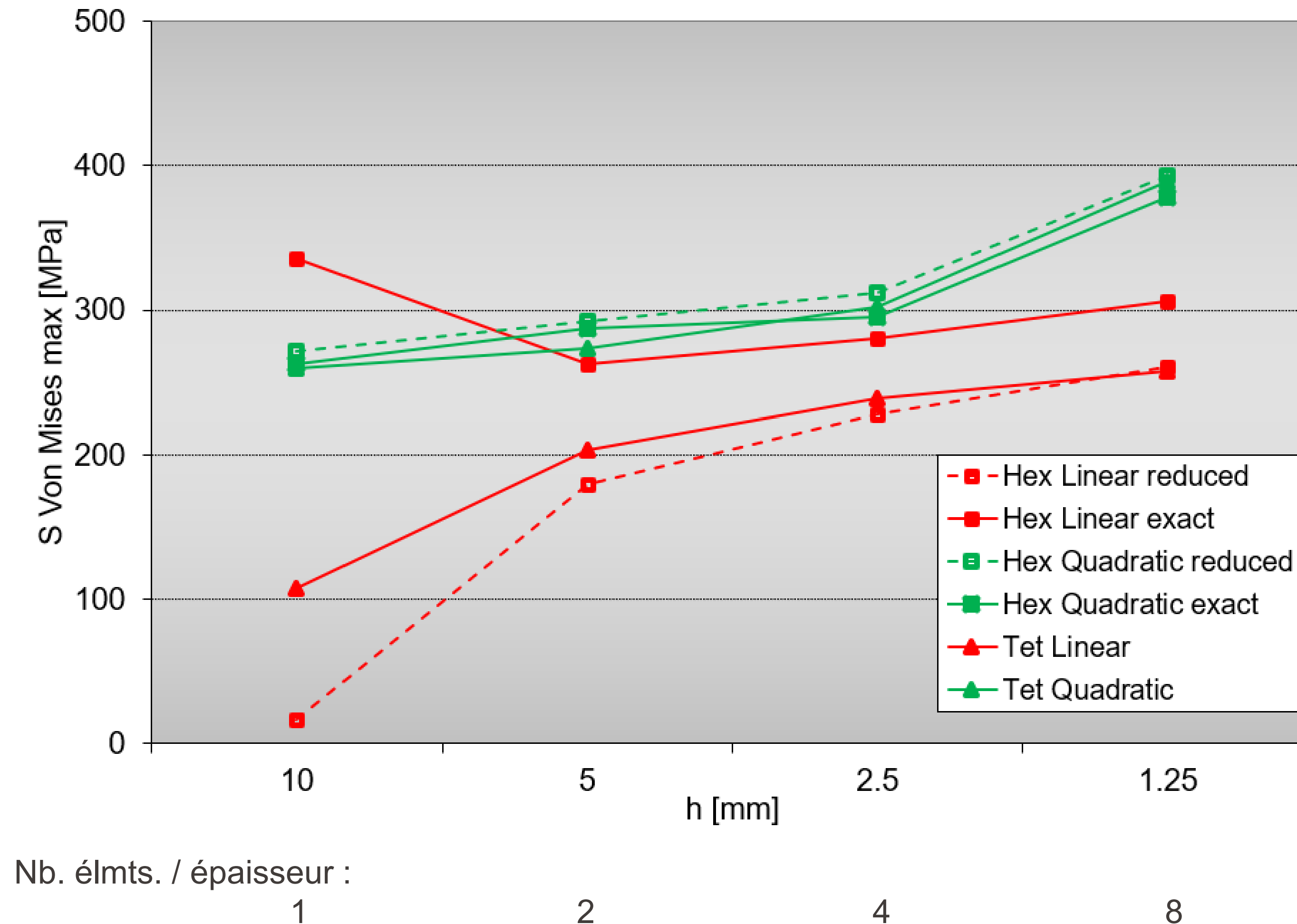
Modélisation et simulation par éléments finis



Déplacement : là encore, les éléments **quadratiques** convergent beaucoup plus rapidement.

Etude de convergence : exemple 3D

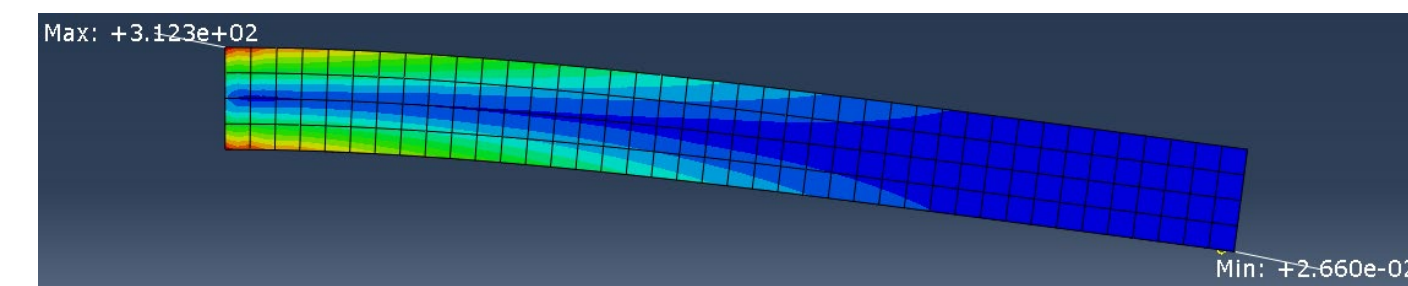
Modélisation et simulation par éléments finis



Contraintes : les éléments quadratiques donnent des résultats plus regroupés, MAIS il n'y a pas convergence !

Contrairement aux déplacements, la **convergence en contraintes** n'est pas garantie.

Ici, présence d'un **concentrateur de contraintes** au niveau de l'encastrement :



Qu'est-ce qui affecte la convergence ?

- **Famille d'éléments :**
 - L'ordre p des fonctions de base.
 - Les formulations complètes (élmts lagrangiens) sont plus précises que les formulations incomplètes (élmts sérendipiens).
 - Forme peu importante.
- **Type / position de la quantité d'intérêt :**
 - Déplacements : convergence plus rapide, et garantie.
 - Contraintes : convergence moins rapide, et non garantie (singularités).
- **Problème :** géométrie, états de contraintes / déformations, conditions limites.
- **Qualité du maillage :** problèmes numériques si éléments distordus ou de grand rapport d'aspect.

→ Assurer la convergence d'un modèle n'est pas trivial ! Il est nécessaire de démontrer que les résultats sont convergés.

Pathologies numériques

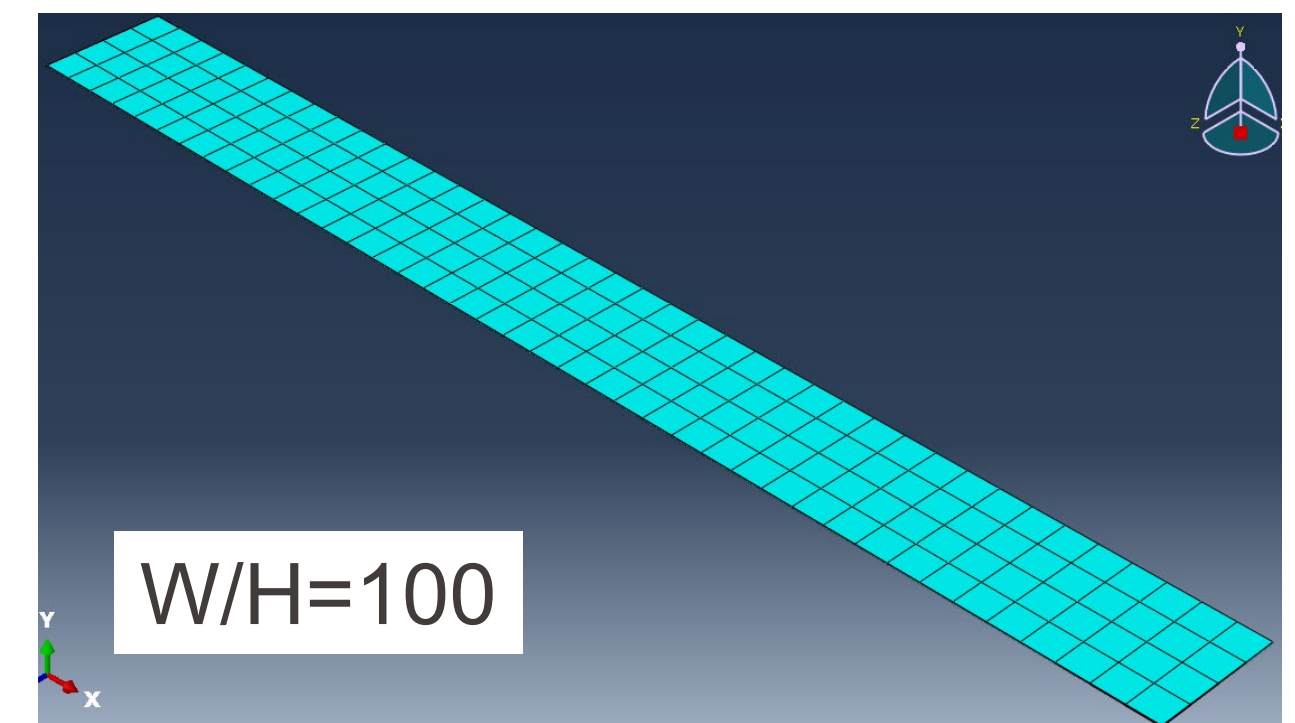
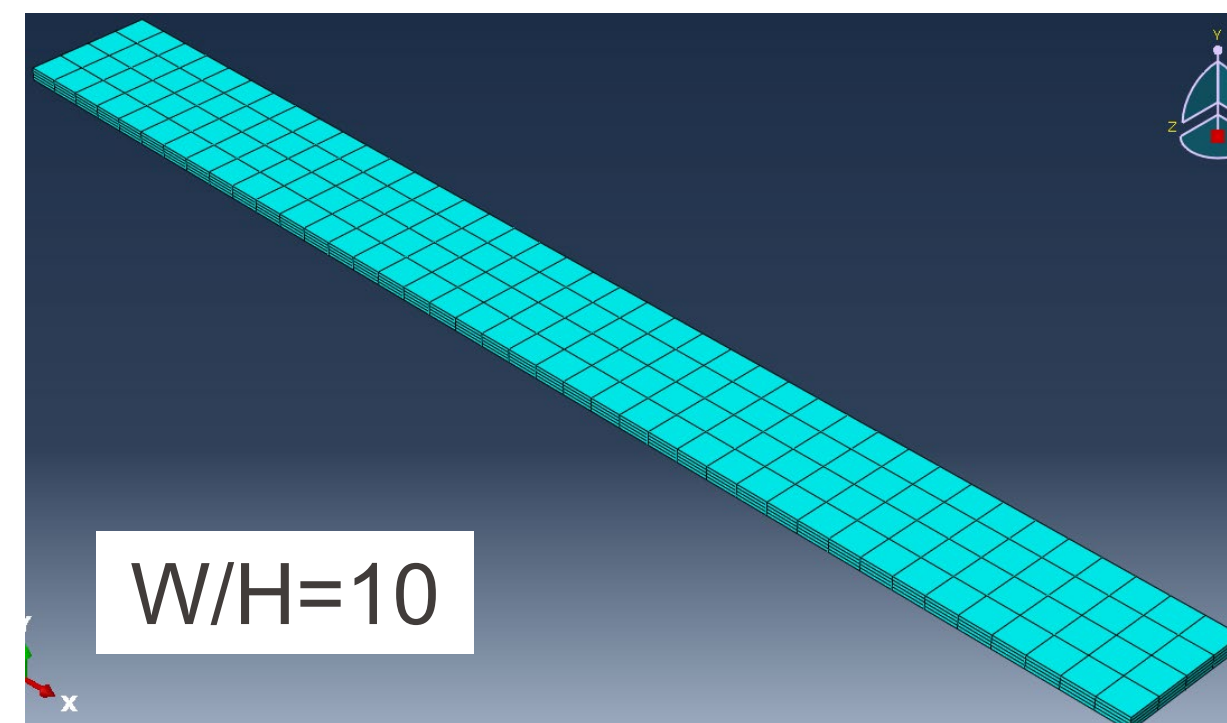
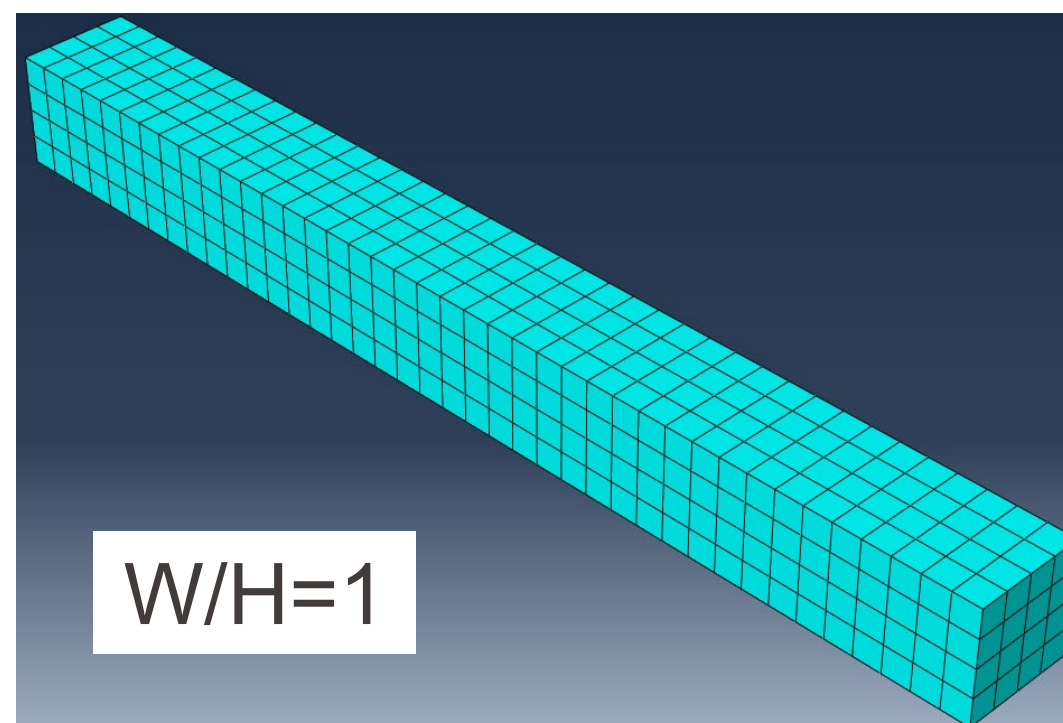
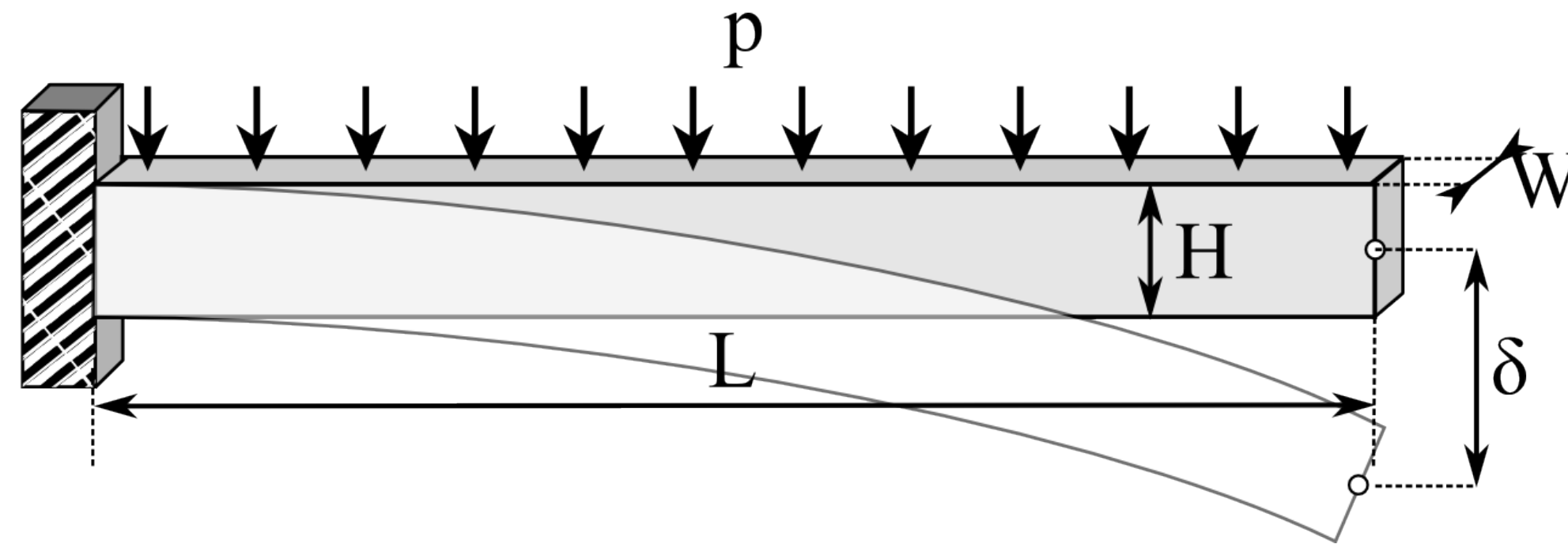
Selon la formulation numérique, il est possible que les matrices obtenues soient mal conditionnées. Deux problèmes principaux :

1. Blocage (locking) :

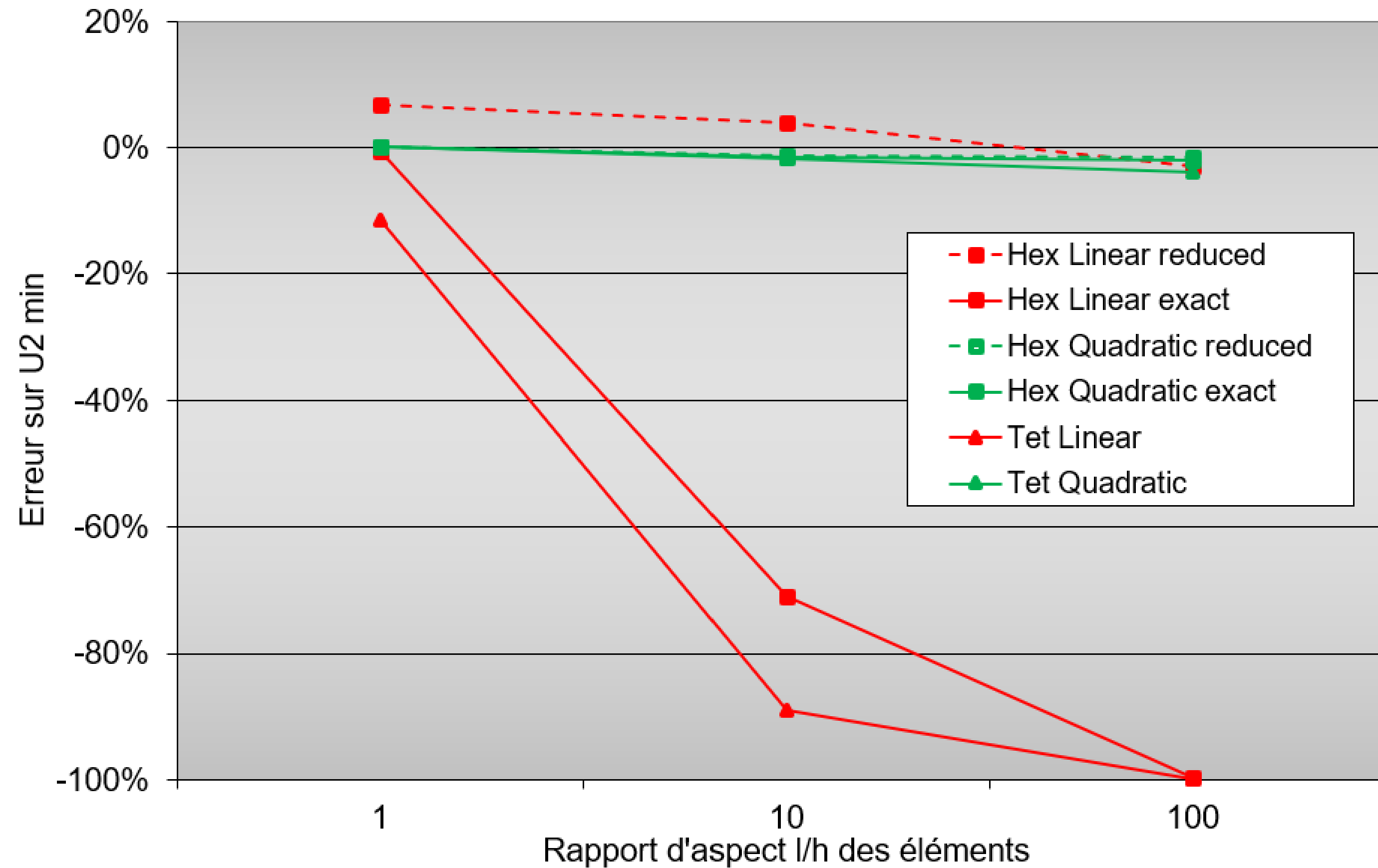
- Peut apparaître pour des éléments aplatis (grand rapport d'aspect).
- Rigidité surestimée \leftrightarrow déformation en cisaillement sous-estimée.
- Typiquement observé pour **éléments linéaires** avec **intégration exacte**
→ peut résoudre le problème avec **éléments quadratiques** et/ou **intégration réduite**.

Blocage (locking)

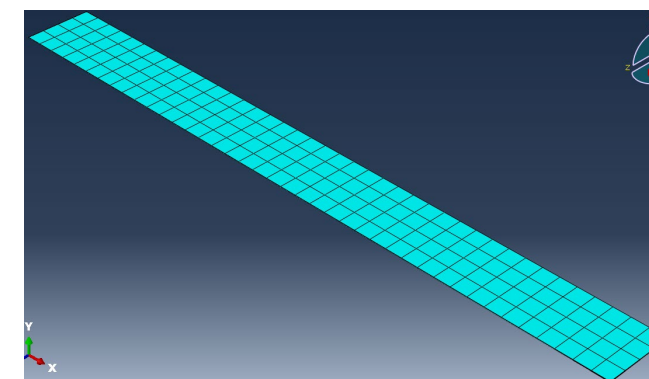
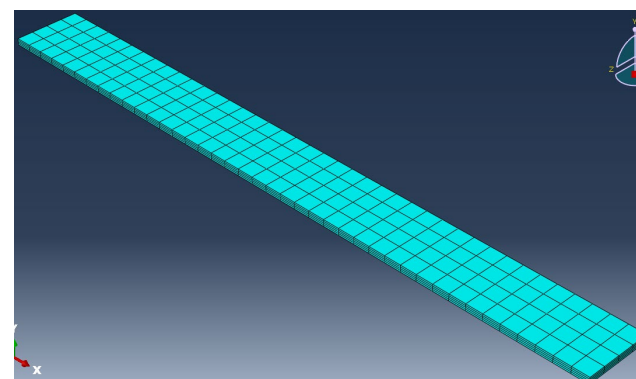
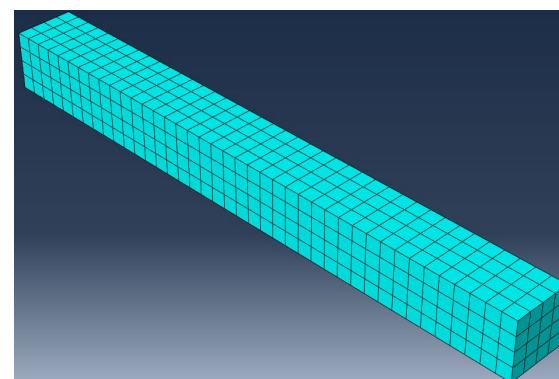
- Illustration : poutre 3D, épaisseur variable
 - $L = 100$ mm, $W = 10$ mm, $H \in [0.1, 10]$ mm, $E = 210$ GPa, $\nu = 0.3$, $p = 1$ MPa
 - Maillage de $40 \times 4 \times 4$ éléments



Blocage (locking)



Blocage avec
élmts linéaires +
intégration exacte



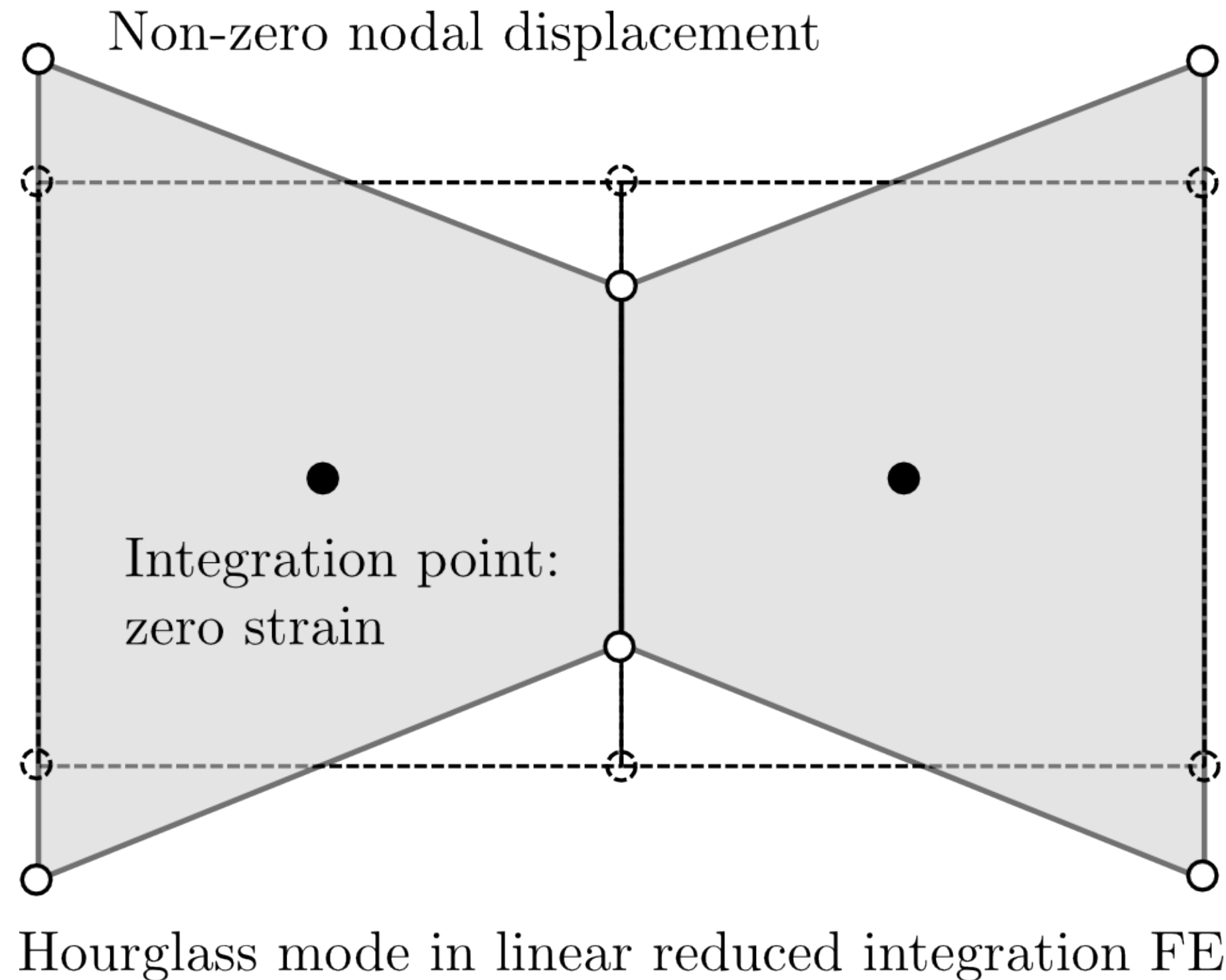
Pathologies numériques

Selon la formulation numérique, il est possible que les matrices obtenues soient mal conditionnées. Deux problèmes principaux :

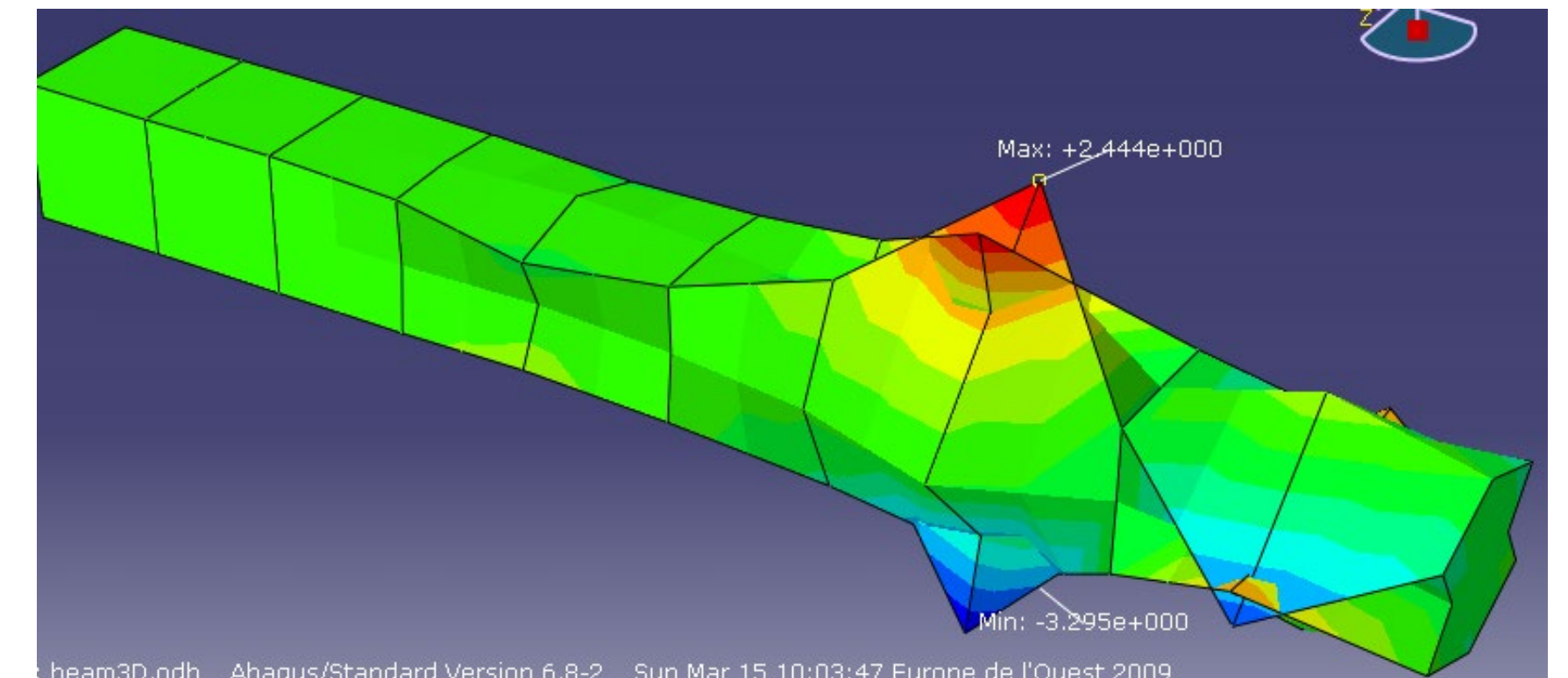
2. "Mécanismes" ou modes "sablier" (hourglass)

- Peuvent apparaître avec intégration réduite.
- Modes d'énergie de déformation nulle : les points d'intégration "voient" une déformation nulle même si le déplacement global n'est pas nul.
- Plus souvent observés pour des maillages grossiers structurés → peut résoudre le problème avec **intégration exacte**, et/ou **maillage plus fin**, et/ou **maillage non structuré**.

Modes sablier



Exemple :



Modes parasites, de rigidité apparente nulle : une force peut créer un déplacement non nul aux nœuds mais nul aux points d'intégration
→ pas d'énergie de déformation, pas de rigidité.

Choix de la formulation EF

- **Critère** : meilleurs résultats globaux et meilleur robustesse.
- **Recommandations** :
 - Choisir des éléments **quadratiques**.
 - Utiliser par défaut l'intégration réduite. Sur des maillages grossiers structurés, préférer l'intégration exacte (pour éviter modes sablier).
 - Pour une bonne précision en flexion, utiliser hexaèdres / prismes avec plus d'un élément dans l'épaisseur.
 - Développer sa **propre expérience** en faisant des **tests de convergence** !

Etude de convergence

Une fois le type d'élément choisi, il faut **toujours démontrer la convergence** du modèle avec le maillage (raffinement en h).

- Choisir la quantité "output" et la région les plus pertinentes, en fonction du problème. (Par ex., pour dimensionner une pièce part à partir des contraintes Von Mises max, utiliser cette quantité comme critère.)
- Raffiner le maillage (globalement et localement). Au moins 3 maillages différents, de tailles assez différentes (au moins 50% de variation sur le nombre de nœuds).
- Tracer l'évolution de l'"output" avec h (et/ou avec le nombre de nœuds).
- Evaluer le compromis coût / précision :
 - Quelle est la précision requise (estimation réaliste) ?
 - Quel est le temps de calcul max. acceptable ?

Méthodologie : résumé

Comment choisir les paramètres h et p d'un modèle EF ?

1. Choisir la formulation en fonction du problème et des considérations de maillage. Pour une analyse en contraintes, toujours choisir des éléments quadratiques
2. Optionnel mais recommandé : vérifier l'influence du schéma d'intégration numérique.
3. Faire une étude de convergence basée sur un output pertinent.
4. Choisir un maillage adapté (compromis coût / précision).

Démonstration : étude de convergence en h

Modélisation et simulation par éléments finis

