

Critères de rupture

**Modélisation et simulation
par éléments finis**

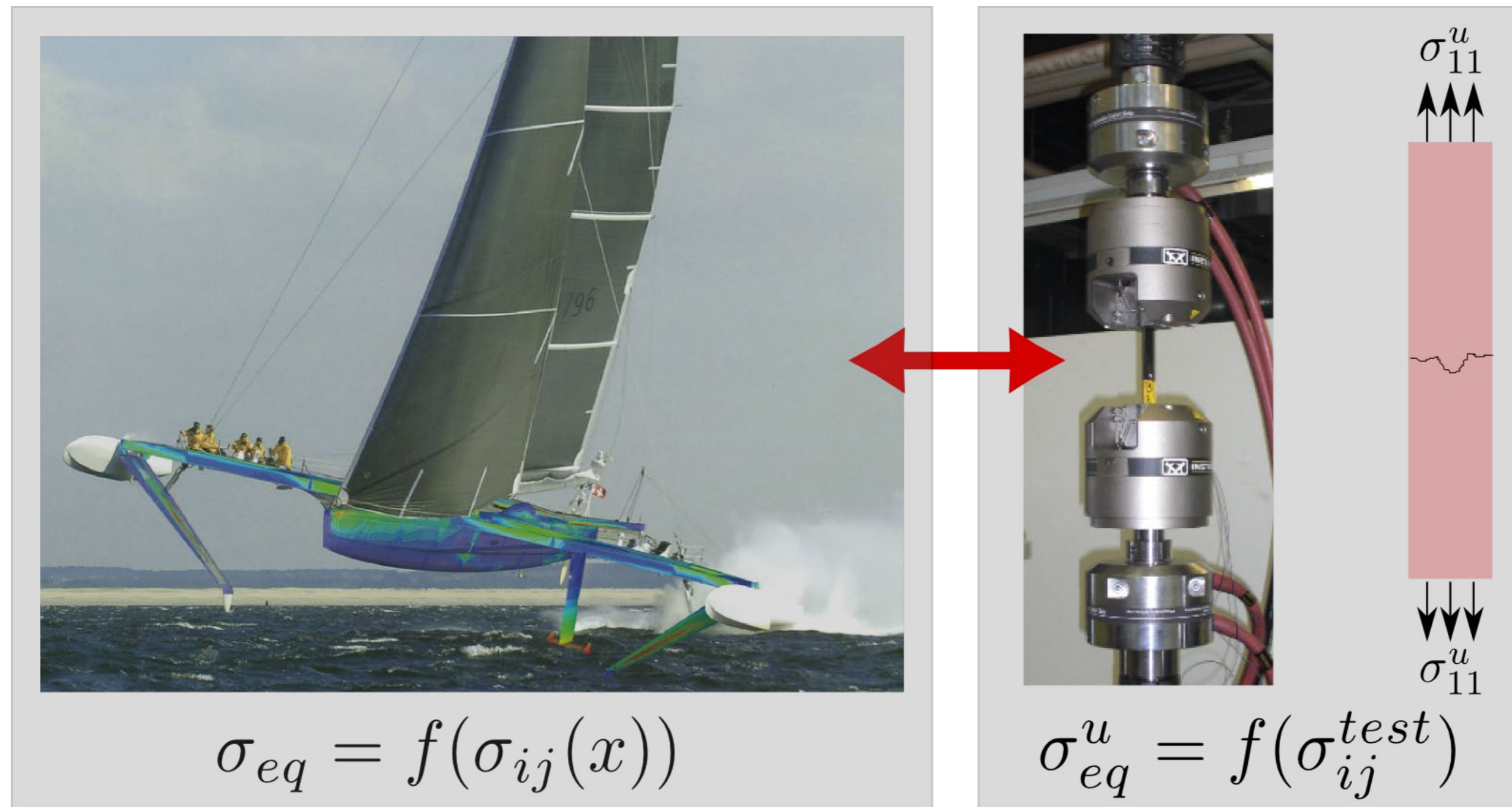
Critères de rupture en contraintes : concept

- Quand est-ce qu'un certain état de contraintes conduit à la **rupture** ? Comment l'évaluer à partir d'un **tenseur** (6 composantes σ_{ij}) ?



Critères de rupture en contraintes : concept

- Idée : utiliser un **critère scalaire** ("contrainte équivalente", fonction des composantes σ_{ij}), et comparer à une **valeur limite**. Critères et limites sont établis à partir de tests expérimentaux (traction, flexion, cisaillement...).



$$\text{Stress criterion: } \sigma_{eq}(x) \leq \sigma_{eq}^u \quad \forall x \subset \Omega$$

Invariants de contraintes, contraintes principales

- **Objectivité** : pour formuler des critères de rupture **objectifs** (indépendants du système de coordonnées), ces critères sont généralement écrits en fonction des **invariants** du tenseur de contraintes σ .
- Composantes principales : en calculant les valeurs / vecteurs propres de σ , on peut l'écrire dans le système de coordonnées principales sous forme diagonale.

Vecteurs propres = directions
des contraintes principales

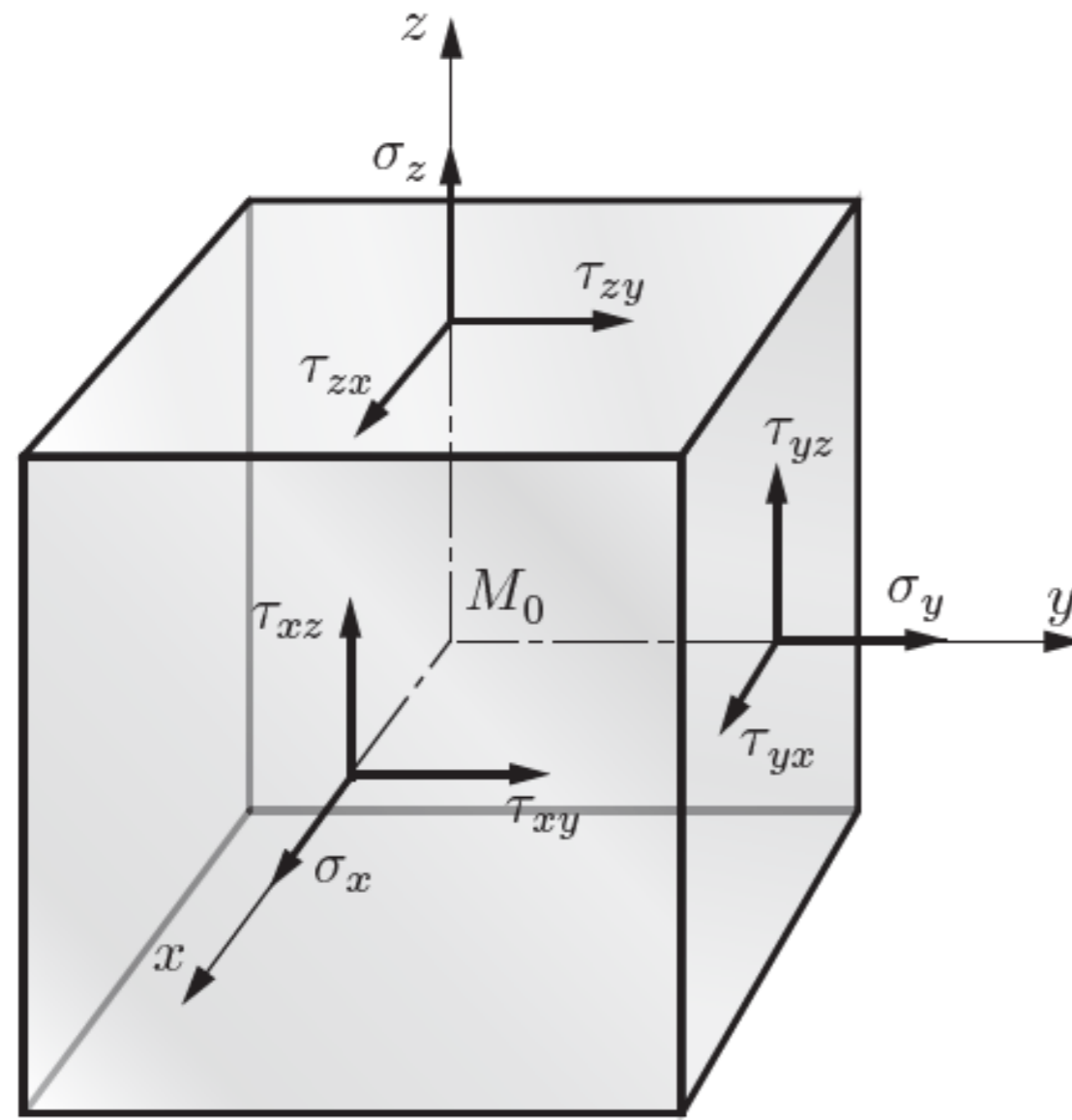
$$\sigma|_{\mathbf{e}_{1,2,3}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow \sigma|_{\hat{\mathbf{e}}_{1,2,3}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Pas de contraintes
de cisaillement.

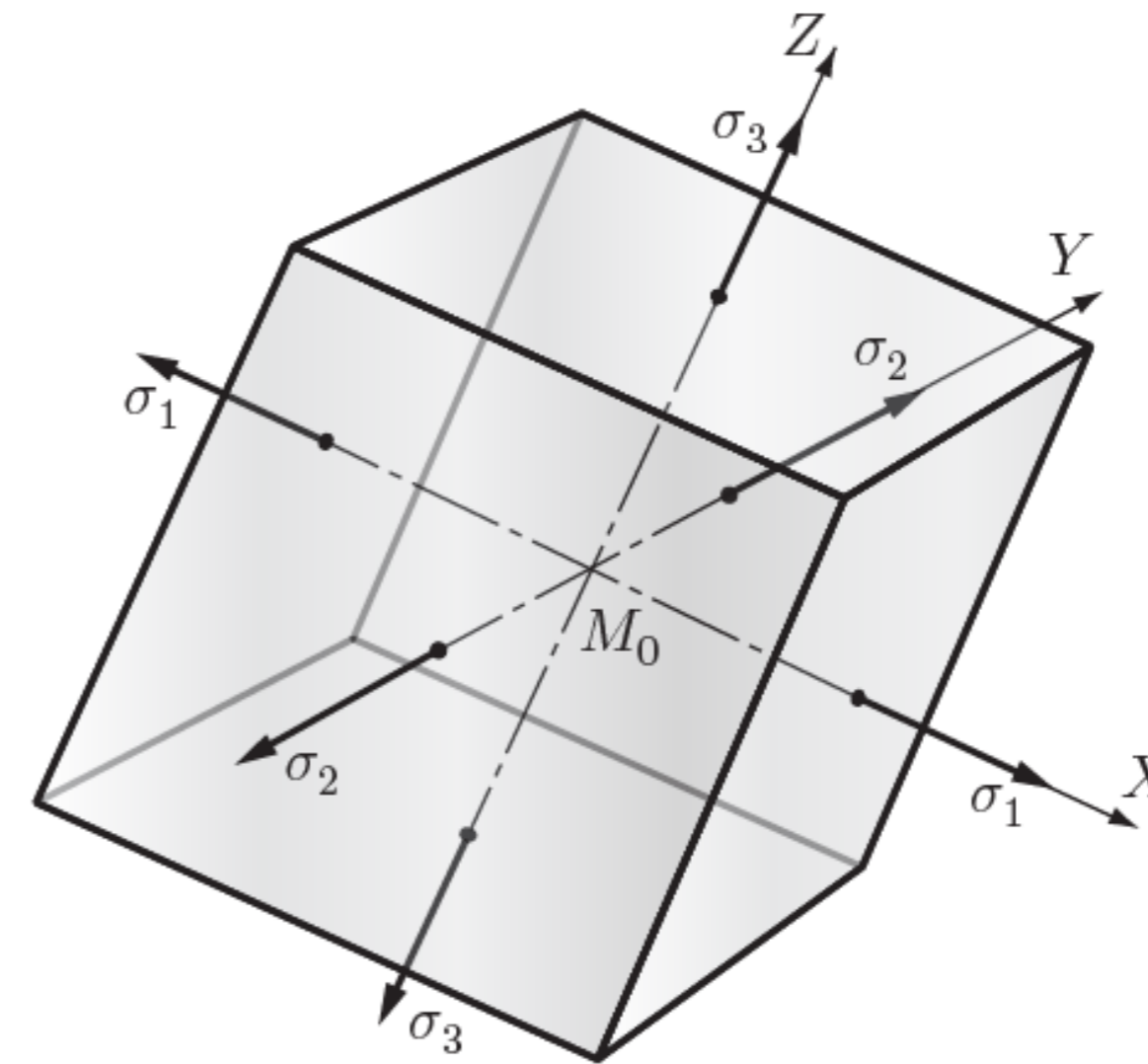
Contraintes normales σ_i = contraintes
principales. Un des d'invariants de σ .

Contraintes principales

Repère quelconque



Repère des directions principales



Pas de contraintes de cisaillement.

Vecteurs propres = directions des contraintes principales

Contraintes normales σ_i = contraintes principales. Un des d'invariants de σ .

Contraintes hydrostatique et déviatorique

- On peut toujours décomposer σ en deux parties, hydrostatique et déviatorique :

$$\sigma = \sigma^h + \tilde{\sigma} = p\mathbf{I} + \tilde{\sigma}$$

- $p = \sigma_{ii}/3$: pression hydrostatique, ne provoque qu'un changement de volume.
- Déviateur : ne provoque qu'une distorsion.
- Décomposition intéressante car la rupture de certains matériaux est indépendante de p , ou bien dépend de manière différente des parties hydrostatique et déviatorique.
- Avec cette décomposition pour σ (et pour ε), on peut aussi décomposer l'énergie de déformation :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} (\sigma : \varepsilon) \\ &= \frac{1}{2} (\sigma^h : \varepsilon^h + \tilde{\sigma} : \tilde{\varepsilon}) \\ &= E^h + \tilde{E} \end{aligned}$$

Critères en contraintes

- **Tresca** : critère basé sur le cisaillement maximum, i.e. la différence maximum entre les contraintes principales :

$$\sigma_{Tresca}^{eq} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|)$$

- Le critère de rupture s'écrit simplement en comparant avec le cisaillement max autorisé τ_u (ou avec la contrainte uni-axiale ultime σ_u) :

$$\sigma_{Tresca}^{eq} \leq \sigma_u = 2\tau_u$$

Critères en contraintes

- **Rankine** : critère asymétrique, qui impose que les contraintes principales soient bornées entre σ_c (compression) et σ_t (traction) :

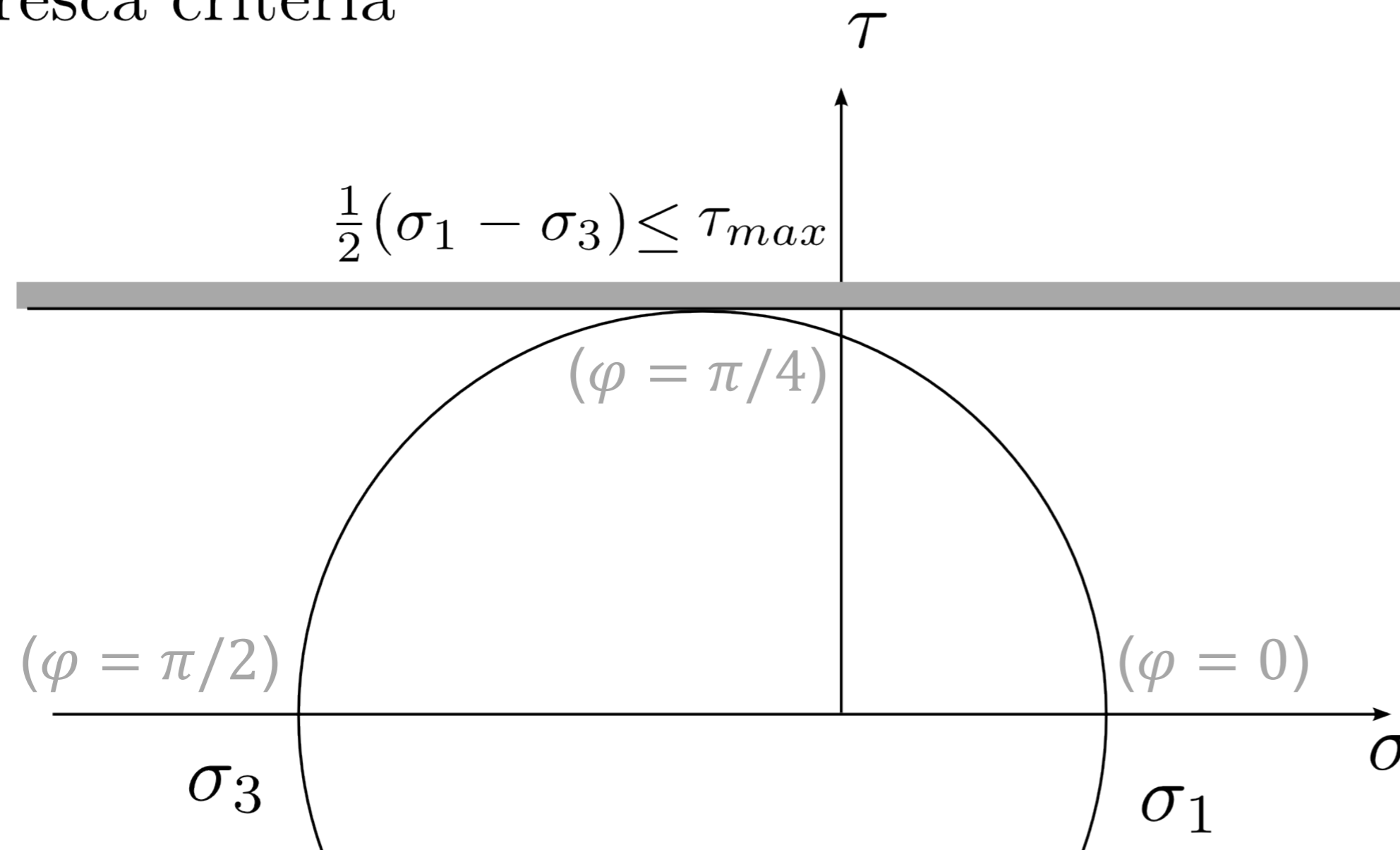
$$\sigma_c < \sigma_i < \sigma_t, \quad i = 1, 2, 3$$

- Indirectement, le cisaillement maximum est aussi borné :

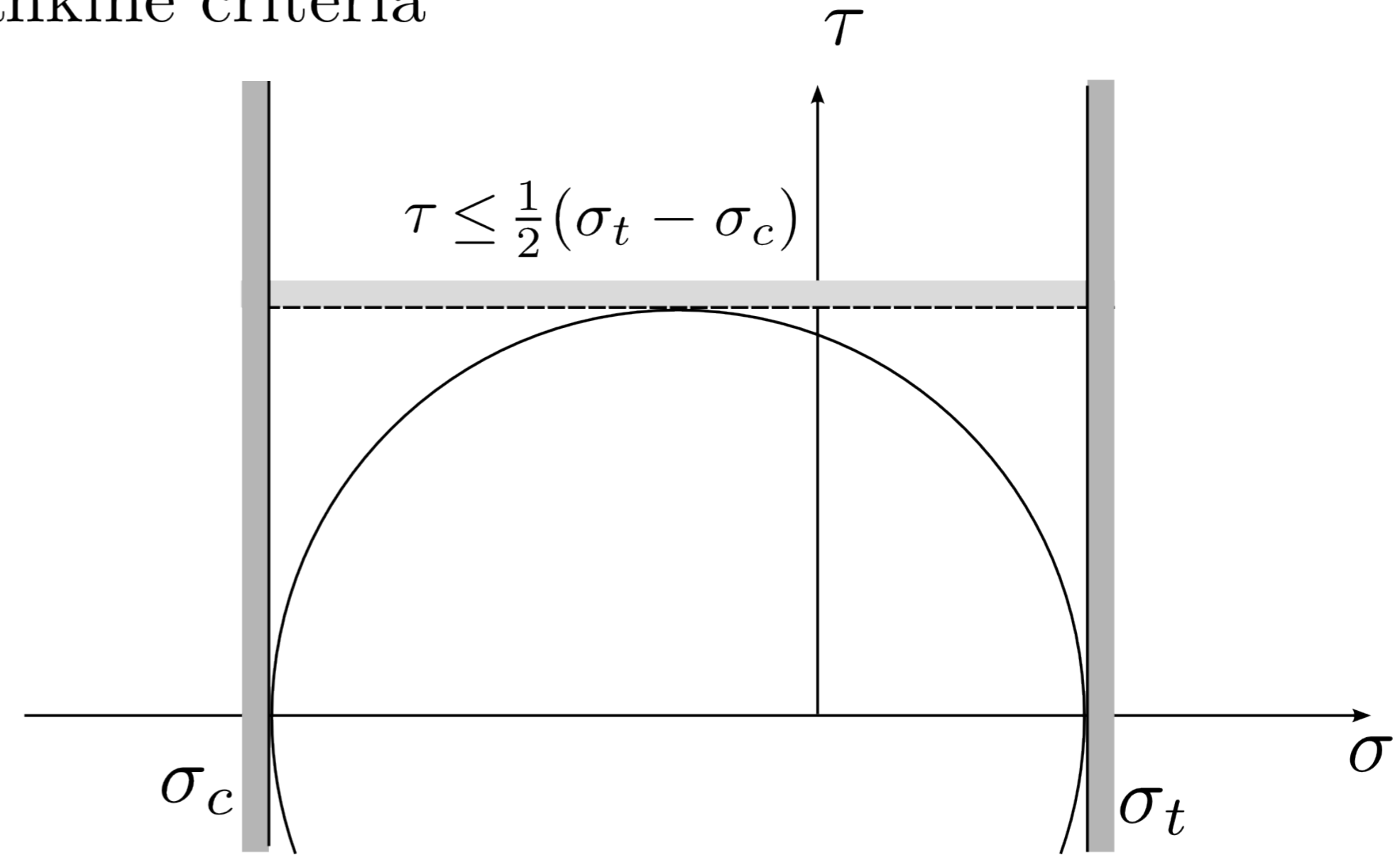
$$\tau_{max} \leq \frac{1}{2}(\sigma_t - \sigma_c)$$

Représentation dans le diagramme de Mohr

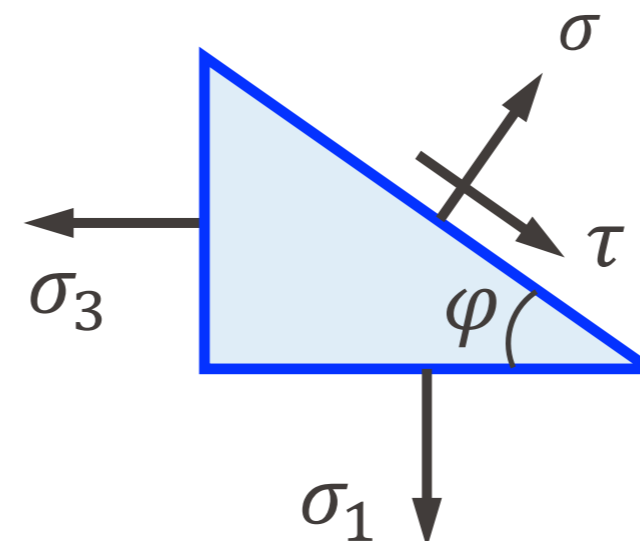
Tresca criteria



Rankine criteria



Rappel :



Critères en contraintes

- **Von Mises** : critère basé sur l'énergie déviatorique, et donc défini à partir du déviateur.

$$\sigma_{Mises}^{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}$$

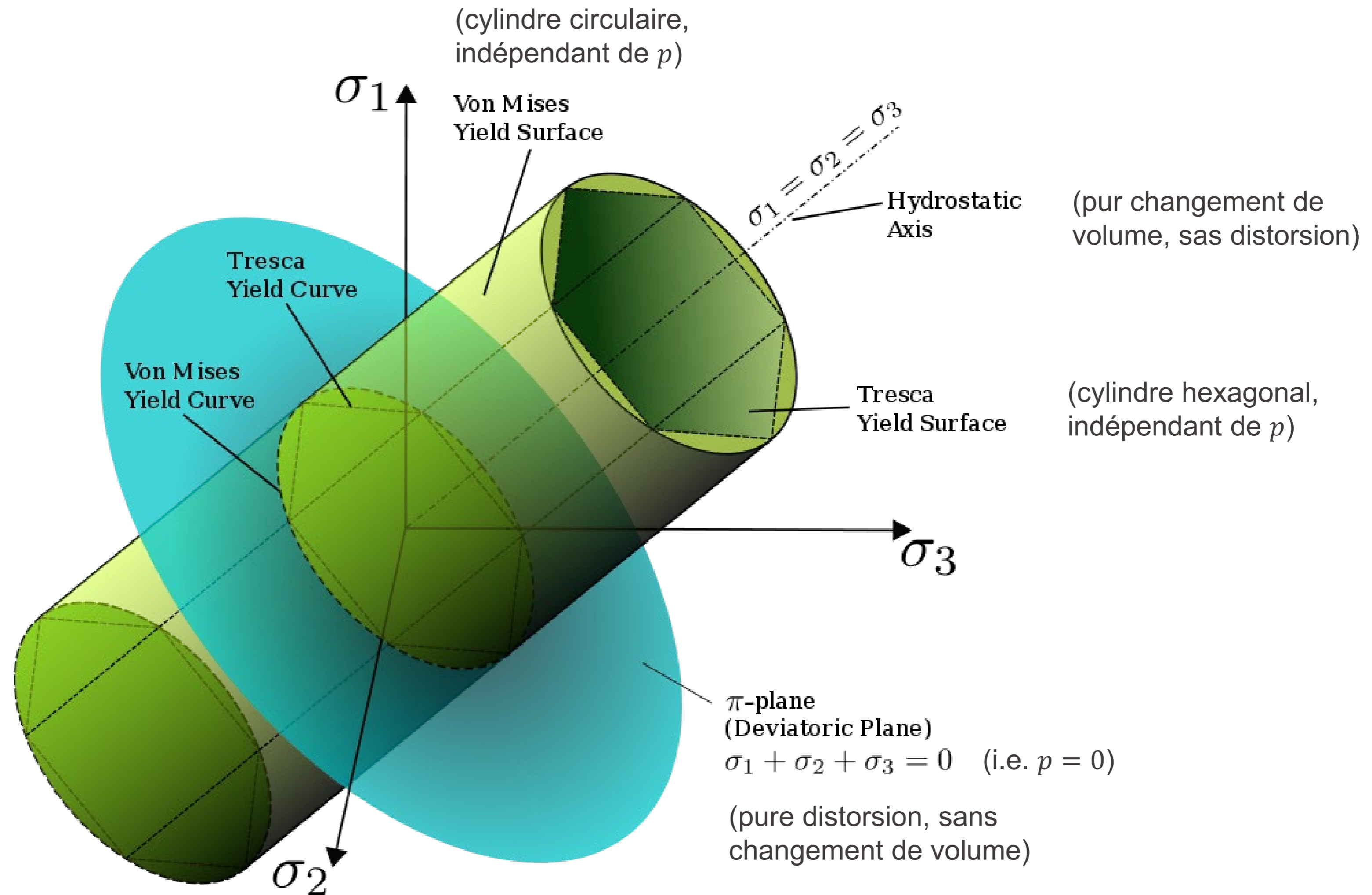
- Peut aussi s'écrire directement en fonction des contraintes principales, ou en fonction des composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ dans un repère quelconque :

$$\begin{aligned} 2(\sigma_{Mises}^{eq})^2 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \\ &= (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \end{aligned}$$

- Le critère de rupture s'écrit simplement en comparant avec la contrainte uniaxiale ultime σ_u :

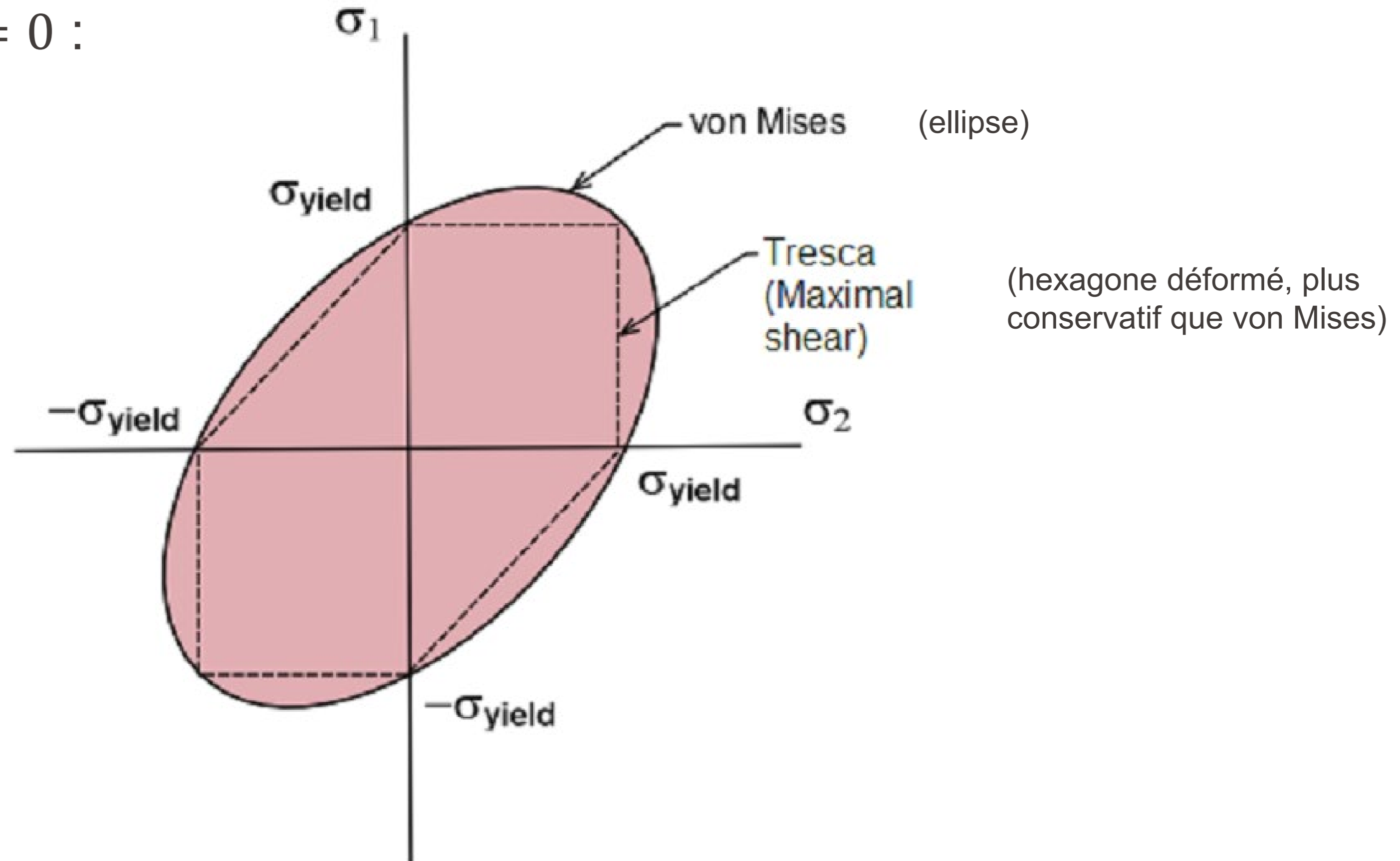
$$\sigma_{Mises}^{eq} \leq \sigma_u$$

Représentation 3D (dans le repère des 3 contraintes principales)



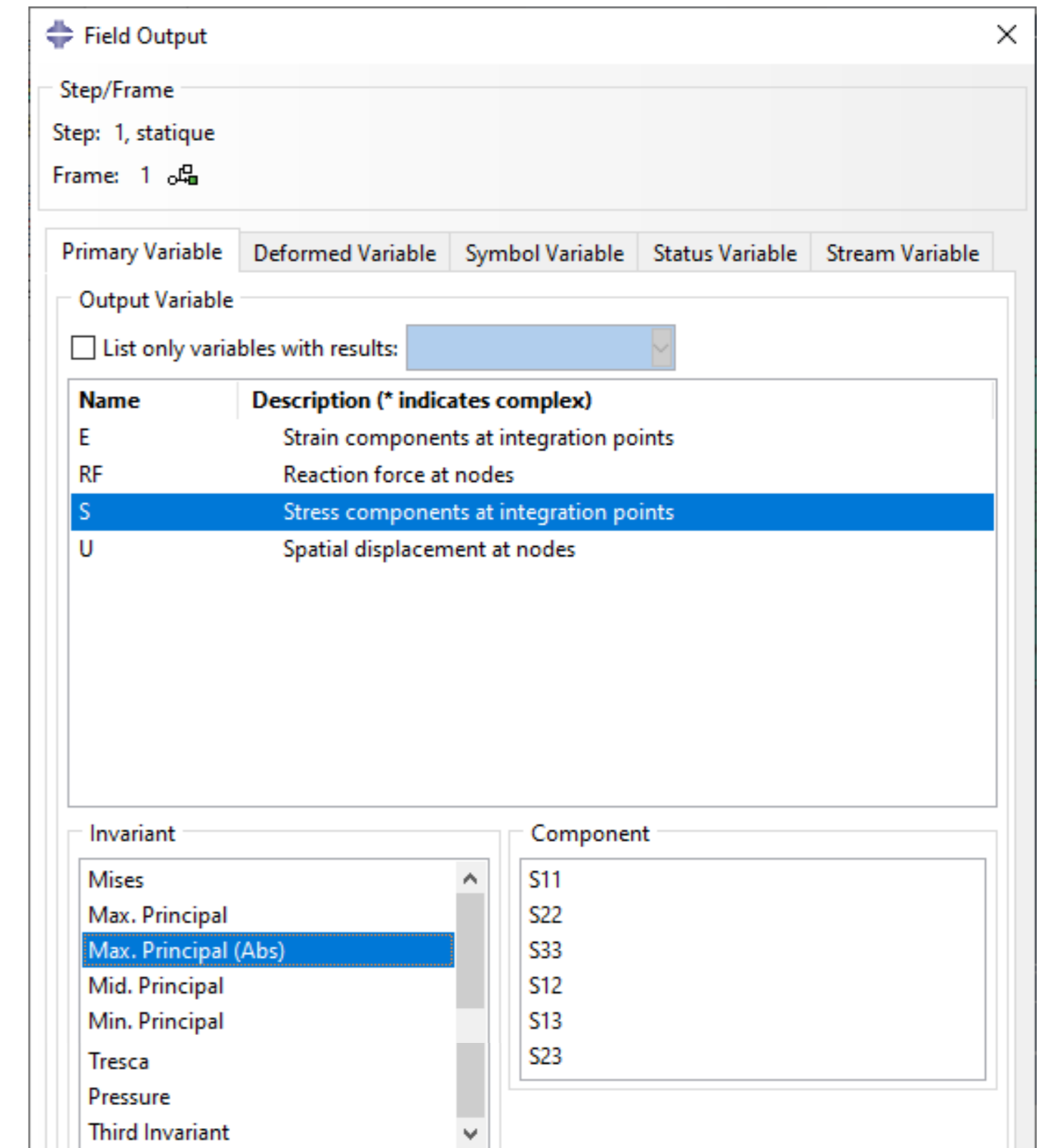
Représentation 2D (dans un plan de 2 contraintes principales)

Ici, plan $\sigma_3 = 0$:



Critères en contraintes

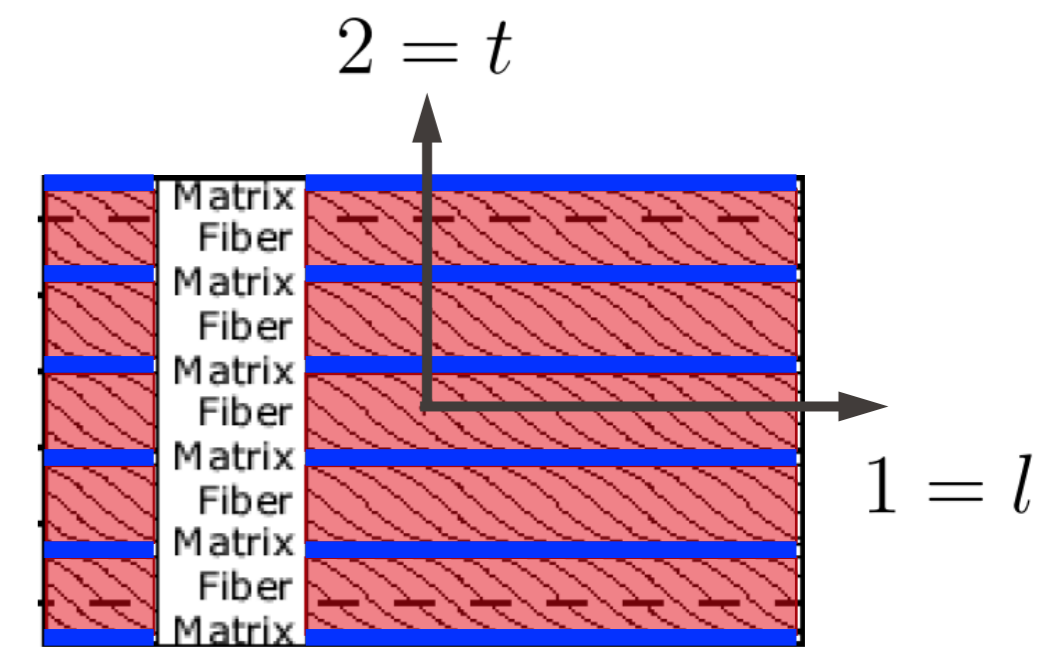
- Evaluation de ces critères avec Abaqus :
 - **Von Mises** : Field Output standard
 - **Tresca** : Field Output standard
 - **Rankine** : utiliser les contraintes principales (Field Output standard)



Critères pour composites à fibres longues

- “**Contrainte max**” : 3 critères (pour les 3 modes de rupture différents) sur les contraintes longitudinale (fibres) et transverse (matrice), et sur le cisaillement.

$$\begin{cases} \sigma_{l,c} \leq \sigma_l \leq \sigma_{l,t} \\ \sigma_{t,c} \leq \sigma_t \leq \sigma_{t,t} \\ |\tau_{lt}| \leq \tau_{max} \end{cases}$$



- On peut aussi écrire (doc. Abaqus) :

If $\sigma_{11} > 0$, $X = X_t$; otherwise, $X = X_c$. If $\sigma_{22} > 0$, $Y = Y_t$; otherwise, $Y = Y_c$. The maximum stress failure criterion requires that

$$I_F = \max \left(\frac{\sigma_{11}}{X}, \frac{\sigma_{22}}{Y}, \left| \frac{\sigma_{12}}{S} \right| \right) < 1.0.$$

(X_c, Y_c : limites en compression, X_t, Y_t : limites en traction, S : limite en cisaillement)

Critères pour composites à fibres longues

- **Tsai-Hill** (doc. Abaqus) :

If $\sigma_{11} > 0$, $X = X_t$; otherwise, $X = X_c$. If $\sigma_{22} > 0$, $Y = Y_t$; otherwise, $Y = Y_c$. The Tsai-Hill failure criterion requires that

$$I_F = \frac{\sigma_{11}^2}{X^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{X^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{S^2} < 1.0.$$

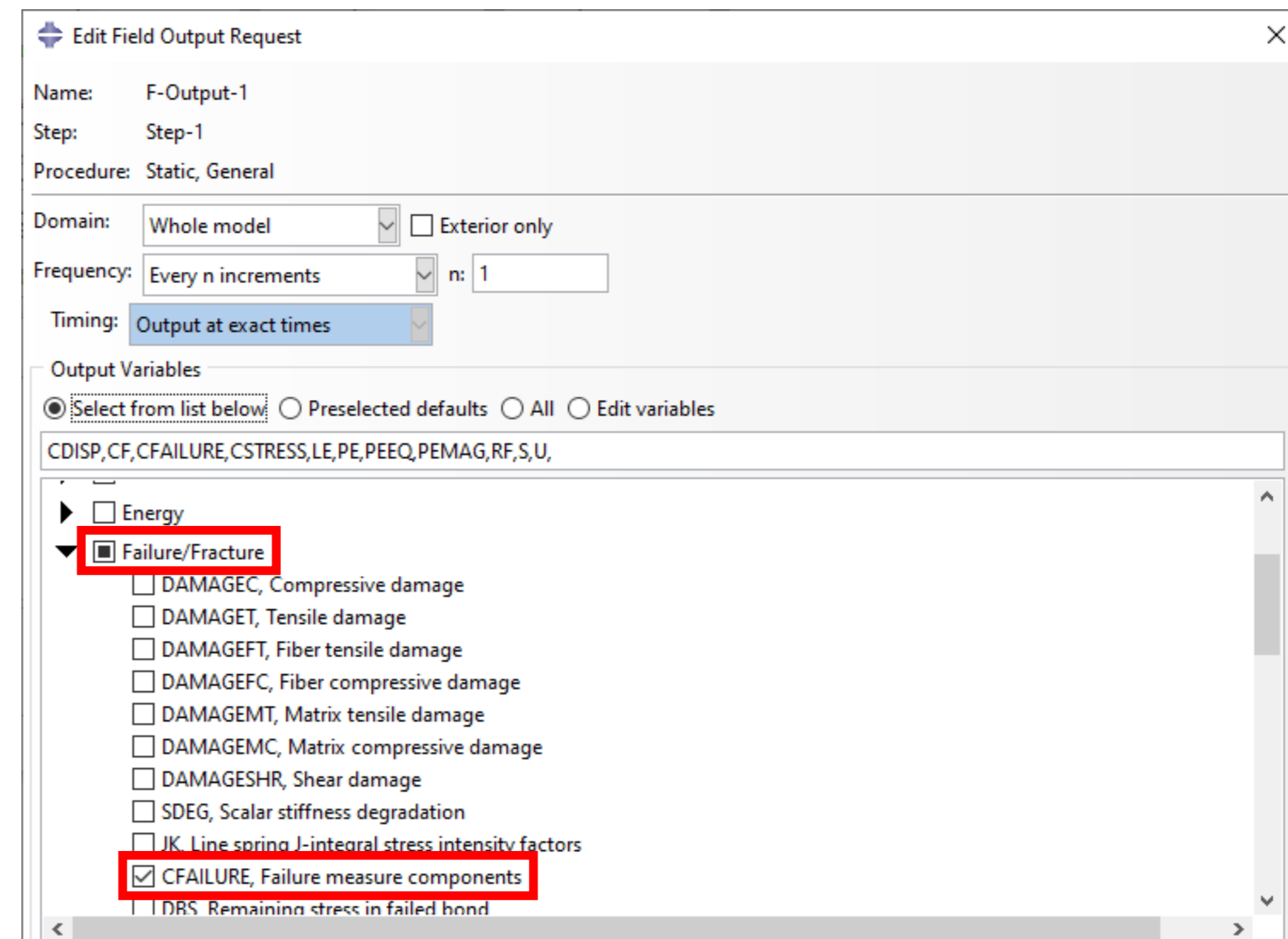
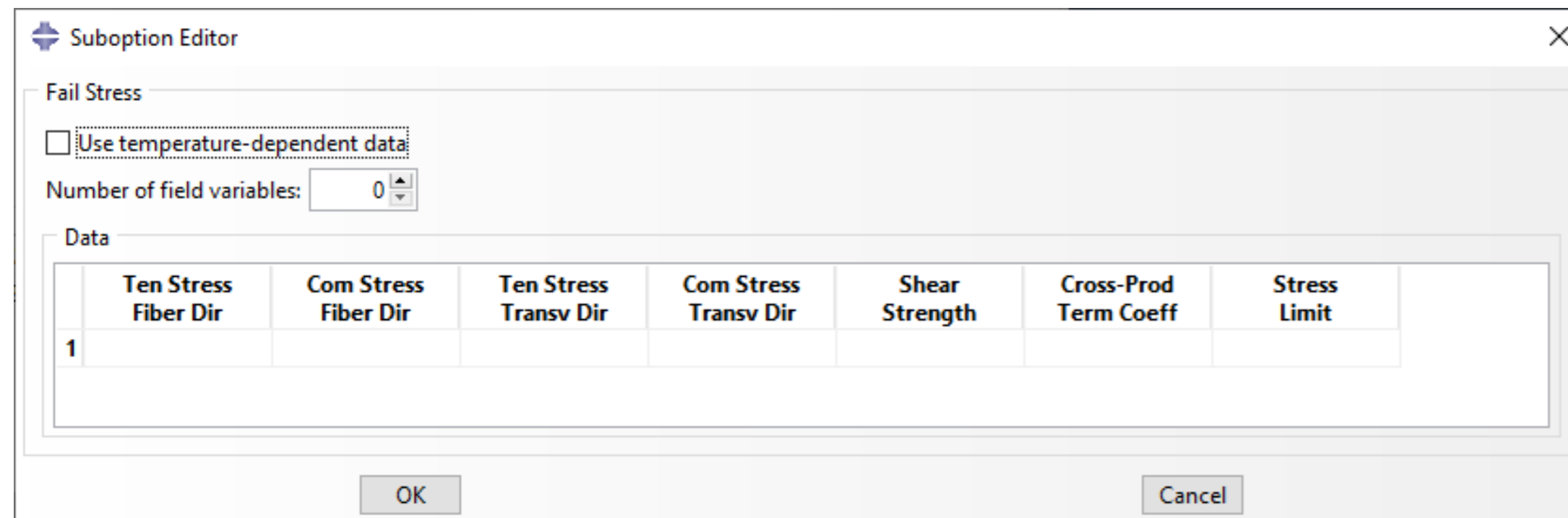
- **Tsai-Wu** (doc. Abaqus) :

$$I_F = F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{66}\sigma_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} < 1.0.$$

(F_i, F_{ij} : fonctions des limites en compression / traction / cisaillement, X_c, Y_c, X_t, Y_t, S)

Critères pour composites à fibres longues

- Evaluation de ces critères avec Abaqus :
 - Définir les limites en compression / traction / cisaillement : module "Property", définition du matériau, bouton "Suboptions", Fail Stress.
 - Demander le Field Output non-standard "CFAILURE" : module "Step", définition des Field Outputs, catégorie Failure/Fracture.



Critères pour composites à fibres longues

- Evaluation de ces critères avec Abaqus :
 - Définir les limites en compression / traction / cisaillement : module "Property", définition du matériau, bouton "Suboptions", Fail Stress.
 - Demander le Field Output non-standard "CFailure" : module "Step", définition des Field Outputs, catégorie Failure/Fracture.
 - On peut ensuite visualiser les différents critères (MSTRS, TSAIH, TSAIW...) dans le module "Visualization".
 - Remarque : les contours représentent le "failure index" R , qui est tel que si l'on divise toutes les contraintes par R on atteint exactement la limite ($I_F = 1$). En particulier, il y a rupture pour $R \geq 1$.
 - Remarque : pour un matériau anisotrope, les composantes 1,2,3 des contraintes correspondent aux directions 1,2,3 du matériau (et pas les composantes globales X,Y,Z, comme pour un matériau isotrope).

Applicabilité / recommandations

- **Von Mises** : matériaux isotropes, denses (non-poreux) & ductiles dont la rupture ne dépend pas de la pression hydrostatique (e.g. métaux).
- **Tresca** : similaire à Von Mises mais plus conservatif.
- **Von Mises & Tresca** : symétriques en traction et compression. Si le matériau n'a pas la même limite, doit utiliser un autre critère ou prendre la limite basse.
- **Rankine** : plus adapté aux matériaux à faible cohésion (e.g. céramique), avec une limite en tension nettement plus faible qu'en compression. Dans ce cas, il faut aussi vérifier que le cisaillement max (Tresca) reste sous les valeurs autorisées.
- Les matériaux plus complexes (e.g. composites) requièrent des critères plus complexes, qui prennent en compte la pression hydrostatique, l'asymétrie traction/compression, et/ou l'anisotropie du matériau.