Examen ME372 Méthode des éléments finis
26 janvier 2023

- Tous documents papier autorisés. Aucun engin électronique.
- Durée 3h. Papier libre.
- Soignez l'écriture (ce qui ne peut être lu correctement ne peut être noté positivement).
- Numérotez vos copies (par exemple 4/5) et mettez vos noms sur toutes les feuilles.
- Il n'y aura aucune réponse orale, quelque soit la question.
- Si vous pensez trouver une erreur dans l'énoncé (de signe ou autre), ce qui est malheureusement possible, notez le sur votre copie.
- Vous pouvez faire référence au cours ou à un exercice vu en cours et en tirer les expressions utiles.

EXERCICE 1: Fréquences propres d'une corde (30 pts)

Les cordes tendues sont connues pour sonner "juste", en raison du rapport entier entre leurs fréquences propres. L'objectif de cet exercice est de déterminer les fréquences propres d'une corde modifiée par la présence d'une masse ponctuelle, à la manière des cordes des pianos préparés, chers au compositeur John Cage. On cherche donc à calculer la déformée $u(x)\exp(i\omega t)$ d'une corde de longueur $2L$ et de tension T (constante), de densité linérique μ (constante) et on néglige l'effet de la gravité. Après transformée de Fourier, le problème fort s'écrit

$$\frac{d}{dx}\left(T\frac{du}{dx}\right) = -\mu\omega^2 u \tag{1}$$

$$u(-L) = 0; u(L) = 0 \tag{2}$$

De plus, une masse ponctuelle m est placée en $x = 0$, où la continuité de la déformation est assurée

$$u|_{0^-} = u|_{0^+} = u(0) \tag{3}$$

1. [1 pt] Montrez par un bilan de quantité de mouvement que la présence de cette masse impose

$$T\frac{du}{dx}\bigg|_{0^+} - T\frac{du}{dx}\bigg|_{0^-} = -m\omega^2 u(0) \tag{4}$$

2. [3 pts] Ecrire la forme faible associée (on notera v la déformation virtuelle).

   On donnera l'espace fonctionnel V adapté pour v, en le comparant à celui de u, $u \in U, U = \{u : u \in H^1([-L, L]), u(-L) = 0, u(L) = 0\}$.

3. [1 pt] Pour que l'équivalence avec la forme forte soit obtenue, cette égalité doit-elle être vraie
   (a) pour **la** solution u et **la** solution virtuelle v associée?
   (b) pour **la** solution u et $\forall v \in V$?
   (c) pour toute solution $\forall u \in U$ et $\forall v \in V$?

4. [2 pts] On discrétise en deux éléments quadratiques de longueur L.
   Rappelez les fonctions de base de l'élément archétype $\xi \in {}^e\Omega = [-1; 1]$ et la transformation de coordonnées permettant d'aller de ${}^e\Omega$ aux deux éléments finis.

5. [4 pts] Montrez que le système s'écrit sous la forme

$$KU = \omega^2 MU, \tag{5}$$

   où U contient les 3 valeurs nodales $u(-L/2)$, $u(0)$ et $u(L/2)$.
   Complétez la matrice de rigidité

$$K = \frac{\bullet}{3L}\begin{pmatrix} 16 & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{pmatrix} \tag{6}$$

6. [4 pts] Montrez que la matrice de masse M devient

$$M = \frac{\mu_0 L}{30}\begin{pmatrix} 16 & 2 & 0 \\ 2 & 8+\frac{30m}{\mu_0 L} & 2 \\ 0 & 2 & 16 \end{pmatrix} \tag{7}$$

7. [1 pt] La résolution de ce système pour $m = 0$ donne les 3 valeurs propres suivantes, $\tilde{\omega}_1 = 1.577$, $\tilde{\omega}_2 = 3.162$, $\tilde{\omega}_3 = 5.672$ où la fréquence adimensionnée $\omega = \sqrt{\frac{T}{\mu L^2}}\tilde{\omega}$ a été introduite. Commentez.

8. [2 pts] La résolution de ce système pour $m = \mu L$ donne les 3 valeurs propres suivantes, $\tilde{\omega}_1 = 1.078$, $\tilde{\omega}_2 = 3.162$, $\tilde{\omega}_3 = 3.711$. En comparant avec les résultats précis obtenus sur la figure 1, commentez. Expliquez en particulier d'un point de vue physique pourquoi on retrouve une fréquence commune avec le cas sans masse ponctuelle ($m = 0$).

9. [3 pts] On discrétise maintenant la corde en un seul élément quartique (i.e. d'ordre 4) et on numérote les points de manière globale de gauche à droite. Exceptionnellement (car cela simplifie les calculs), on définit l'élément archétype sur $\tilde{\xi} \in [-2, 2]$ avec les noeuds pertinents 2 en $\tilde{\xi} = -1$, 3 en $\tilde{\xi} = 0$ et 4 en $\tilde{\xi} = 1$. Déterminez les 3 fonctions de base archétypes pertinentes relatives aux noeuds 2, 3 et 4.

10. [2 pts] Ecrire la forme litérale des coefficients $K_{i,j}$ pour $i = 2, 3, 4$ et $j = 2, 3, 4$ en fonction des dérivées des fonctions de base de l'élément archétype et de la longueur de la corde.

11. [3 pts] On donne les valeurs d'intégrales suivantes (dont certaines devraient être utiles)

$\int_{-2}^{2} -\frac{1}{24}(8\tilde{\xi}^6 - 12\tilde{\xi}^5 - 36\tilde{\xi}^4 + 46\tilde{\xi}^3 + 40\tilde{\xi}^2 - 40\tilde{\xi})d\tilde{\xi}$	$-\frac{592}{315}$
$\int_{-2}^{2} -\frac{1}{24}(16\tilde{\xi}^6 - 12\tilde{\xi}^5 - 72\tilde{\xi}^4 + 46\tilde{\xi}^3 + 80\tilde{\xi}^2 - 40\tilde{\xi})d\tilde{\xi}$	$-\frac{1184}{315}$
$\int_{-2}^{2} -\frac{1}{24}(16\tilde{\xi}^6 - 12\tilde{\xi}^5 - 72\tilde{\xi}^4 + 46\tilde{\xi}^3 + 40\tilde{\xi}^2 - 50\tilde{\xi})d\tilde{\xi}$	$\frac{1616}{315}$
$\int_{-2}^{2} -\frac{1}{16}(16\tilde{\xi}^6 - 80\tilde{\xi}^4 + 100\tilde{\xi}^2)d\tilde{\xi}$	$\frac{124}{21}$
$\int_{-2}^{2} -\frac{1}{16}(8\tilde{\xi}^6 - 40\tilde{\xi}^4 + 100\tilde{\xi}^2)d\tilde{\xi}$	$\frac{412}{21}$

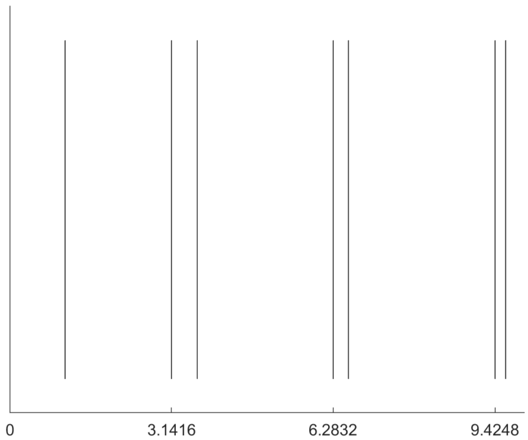

Figure 1: Les 7 premières fréquences propres adimensionées (par $\sqrt{\frac{T}{\mu L^2}}$, voir texte) d'une corde de longueur $2L$ liée à une masse $m = \mu L$ attachée en sa moitié.

Completez la matrice K

$$K = \frac{2T}{L} \begin{pmatrix} 832/189 & \bullet & 1472/945 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ 1472/945 & \bullet & 832/189 \end{pmatrix} \tag{8}$$

12. [3 pts] Ecrire la forme litérale des coefficients $M_{i,j}$ pour $i = 2, 3, 4$ et $j = 2, 3, 4$ et calculez M_{33} en fonction de $\frac{m}{\mu L}$ pour compléter la matrice de masse

$$M = \frac{L\mu}{2} \begin{pmatrix} 512/1405 & -256/945 & 512/2835 \\ -256/945 & \bullet & -256/945 \\ 512/2835 & -256/945 & 512/1405 \end{pmatrix} \tag{9}$$

13. [1 pt] Pour $\frac{m}{\mu L} = 0$, on trouve cette fois $\tilde{\omega}_1 = 1.571$, $\tilde{\omega}_2 = 3.240$ et $\tilde{\omega}_3 = 5.053$. Commentez la précision de la méthode. Pour $\frac{m}{\mu L} = 1$, on trouve cette fois $\tilde{\omega}_1 = 1.102$, $\tilde{\omega}_2 = 3.240$ et $\tilde{\omega}_3 = 4.432$. Commentez.

EXERCICE 2: Ecoulement dans une conduite de section elliptique (30 pts)

On souhaite calculer le débit d'un fluide de viscosité dynamique μ dans une conduite de section elliptique (grand axe a, petit axe b, voir figure 2a) soumise à un gradient de pression $\frac{dp}{dx}$ constant. On ne discrétise qu'un quart de la conduite, symbolisé par un domaine Ω, dont le bord elliptique est nommé $\partial\Omega_e$. La forme faible s'écrit

$$u \in \mathcal{C} : \mu \int_\Omega (\nabla u)^{\mathrm{T}} \nabla \delta u \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = -\frac{dp}{dx} \int_\Omega \delta u \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \quad \forall \delta u \in \mathcal{D} \tag{10}$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{C} = \left\{ u \mid u \in H^1(\Omega); u = 0 \,\mathrm{sur}\, \partial\Omega_e \right\} \tag{11}$$

1. [2 pts] Déduire la forme forte de l'équation gouvernant le champ de vitesse.

2. [1 pt] Pourquoi le terme de bord obtenu le long de $\partial\Omega_e$ par intégration par parties a t'il disparu?

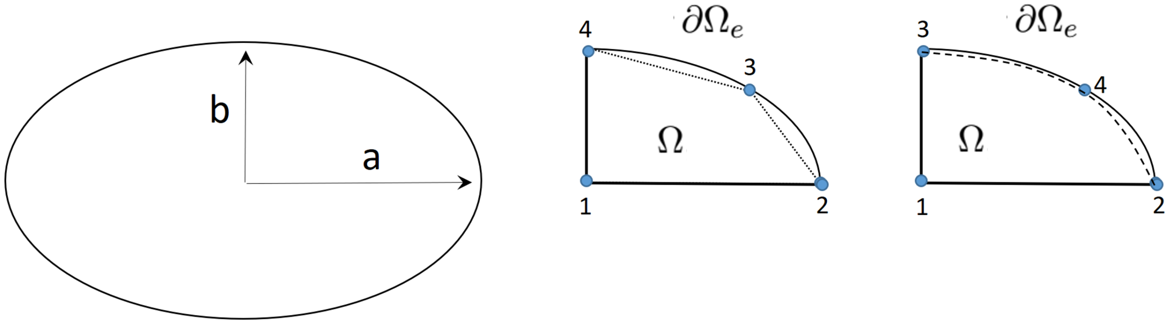

Figure 2: Ecoulemet à travers une conduite de section ellipse; Discrétisation d'un quart de la section par un quadrangle biblinéaire et par un trinagle sérendipien.

3. [1 pt] Pourquoi le terme de bord obtenu le long des deux demi-axes ($x \in [0, a], y = 0$) et ($x = 0, y \in [0, b]$) par intégration par parties a t'il disparu?

4. [1 pt] Nous choisissons tout d'abord une discrétisation par un élément quadrangulaire, comme dessiné sur la figure 2. Observez que les coordonnées du noeud 3 sont $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$. Pourquoi est-il sur l'ellipse (rappelez vous de l'équation d'une ellipse)?

5. [5 pts] Rappelez les fonctions de base ${}^e h_i(\xi, \eta)$ de l'élément archétype. Déterminez la transformation de coordonnées allant de l'élément archétype défini sur ${}^e\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ en variables ξ et η, calculez la matrice jacobienne
$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}, \tag{12}$$
et le jacobien. Démontrez que la transformation est biunivoque. Donnez l'expression de l'aire du domaine approché.

6. [5 pts] Exprimez littéralement l'élément de la matrice de perméabilité K_{11} ainsi que le terme source r_1. A cette fin, notez que, sans chercher à les calculer, les éléments de la jacobienne inverse s'écrivent
$$J^{-1} = \begin{pmatrix} J^{-1}_{11} & J^{-1}_{12} \\ J^{-1}_{21} & J^{-1}_{22} \end{pmatrix} \tag{13}$$
Est-ce que $J^{-1}_{11} = \frac{1}{J_{11}}$?

7. [2 pts] Montrez qu'il est possible d'exprimer r_1 comme une somme de 4 termes en utilisant la méthode de Gauss-Legendre. Explicitez l'expression qui en découle sans chercher à l'évaluer.

8. [2 pts] Pour $a = 2$ et $b = 1$, on trouve $K_{11} = \mu 0.96$ et $r_1 = -\frac{dp}{dx}0.40$. Calculez la vitesse u_1 au centre de la conduite On donne $0.96/0.4 = 2.4$ et $0.4/0.96 = 0.42$. La formule exacte donne pour $\mu = 1$ et $\frac{dp}{dx} = -1$, $u = \frac{1}{2}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. Que pensez-vous du résultat approché?

9. [2pts] Calculez le débit volumique $Q = \int_\Omega u dx dy$.

10. [5pts] Maintenant, il s'agit d'utiliser un élément triangulaire sérendipien comme élément archétype, comme indiqué sur la figure 2c. Rappelez les fonctions de base ${}^e h_i(\xi, \eta)$ de l'élément archétype. Déterminez la transformation de coordonnées allant de l'élément archétype défini sur ${}^e\Omega$ en variables ξ et η, calculez la matrice jacobienne
$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

et le jacobien. Démontrez que la transformation est biunivoque. Donnez l'expression de l'aire du domaine approché. On trouve 1.56 pour $a = 2$ et $b = 1$. Qu'en pensez vous?

11. [3pts] Exprimez littéralement l'élément de la matrice de perméabilité K_{11} ainsi que le terme source r_1.

12. [1pt] A votre avis, quel est le calcul le plus précis, entre l'élément quadrangulaire et l'élément triangulaire sérendipien?