

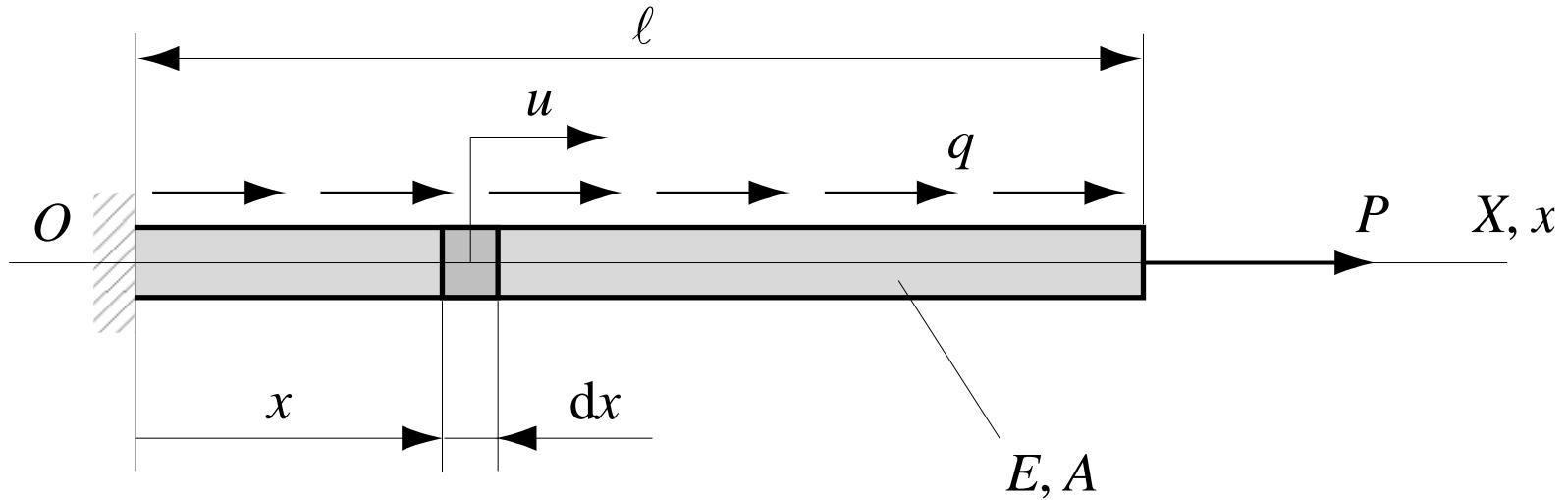
Méthode des éléments finis

Formulation intégrale du problème modèle de la barre

Prof. F. Gallaire

(cours conçu par Pr. Thomas Gmür)

Problème modèle de la barre en traction/compression



Barreau prismatique encastré soumis à une charge répartie axiale et une force ponctuelle longitudinale

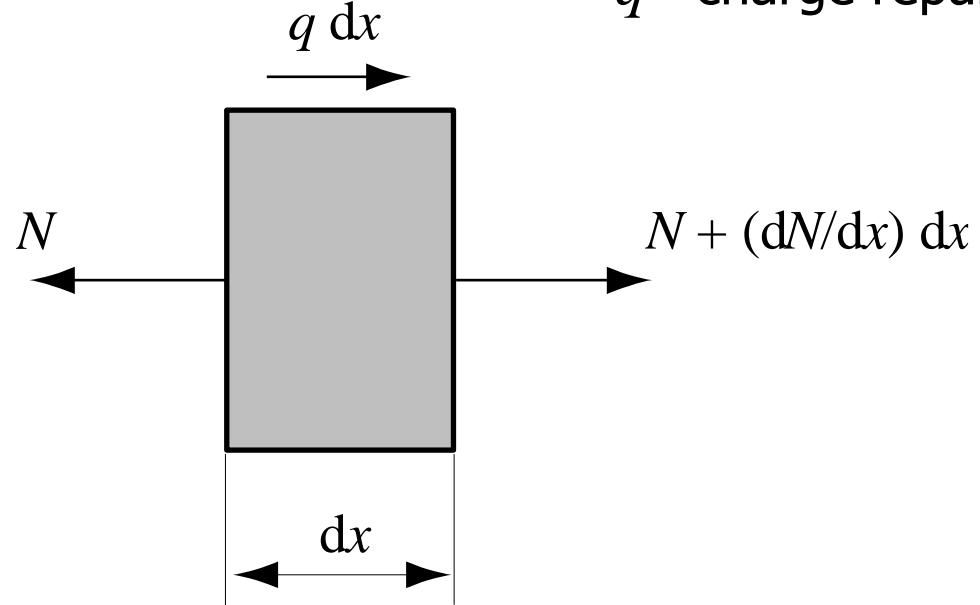
Equilibre de la barre

- Equation d'équilibre

$$\cancel{N} + (\frac{dN}{dx}) \cancel{dx} - \cancel{N} + q \cancel{dx} = 0$$

N effort intérieur
 q charge répartie

$$-\frac{dN}{dx} = q$$



Equilibre de la barre

- Equation constitutive (loi de Hooke)

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

σ_x contrainte normale
 E module d'élasticité
 ε_x déformation axiale

- Linéarité de la déformation

$$\varepsilon_x = du/dx$$

u déplacement axial

- Lien entre effort normal N et déplacement u

$$N = A \sigma_x = EA \varepsilon_x = EA (du/dx) \quad A \text{ section de la barre}$$

Formulation forte du problème

- Equation différentielle du 2^{ème} ordre

$$-EA \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = q \quad \text{dans }]0, \ell[\quad \ell \text{ longueur}$$

$$u \in C^2([0, \ell]); q \in L^2(]0, \ell[)$$

$$L^2(]0, \ell[) = \{q(x) \mid \left\{ \int_0^\ell q^2 dx \right\}^{1/2} < \infty\}$$

- Condition aux limites essentielle

$$u(0) = 0$$



charge ponctuelle en flexion des poutres

- Condition aux limites naturelle

$$EA \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=\ell} = P$$

P force ponctuelle axiale

Formulation intégrale du problème

- Forme intégrale de l'élastostatique du barreau

$$\int_0^\ell [EA \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right) + q] \delta u \, dx = 0 \quad \forall \delta u$$

δu déplacement axial virtuel



caractère arbitraire de δu

- Intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_0^\ell EA \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{d\delta u}{dx} \right) \, dx - [EA \left(\frac{du}{dx} \right) \delta u] \Big|_0^\ell \\ = \int_0^\ell q \delta u \, dx \quad \forall \delta u \end{aligned}$$

Formulation intégrale du problème

- Déplacement virtuel cinématiquement admissible

$$\delta u(0) = 0$$



δu compatible avec la condition aux limites essentielle

- Insertion de la condition aux limites naturelle et de la contrepartie virtuelle de la condition aux limites essentielle

$$\int_0^\ell EA \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{d\delta u}{dx} \right) dx + EA \left(\frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} \delta u(0) = 0$$

$$- EA \left(\frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=\ell} \delta u(\ell) = \int_0^\ell q \delta u dx \quad \forall \delta u$$

$$\int_0^\ell EA \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{d\delta u}{dx} \right) dx - P \delta u(\ell) = \int_0^\ell q \delta u dx \quad \forall \delta u$$

Formulation faible du problème

- Forme faible de l'élastostatique du barreau : principe des travaux virtuels

$$\begin{aligned} u \in U : & \int_0^\ell EA \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{d\delta u}{dx} \right) dx \\ & = P \delta u(\ell) + \int_0^\ell q \delta u dx \quad \forall \delta u \in V \end{aligned}$$

- Classes des fonctions admissibles U et V



$$U = \{u(x) \mid u(x) \in H^1([0, \ell]) ; u(0) = 0\}$$

$$V = \{\delta u(x) \mid \delta u(x) \in H^1([0, \ell]) ; \delta u(0) = 0\}$$

$$H^1([0, \ell]) = \{w(x) \mid \left\{ \int_0^\ell [w^2 + (\frac{dw}{dx})^2] dx \right\}^{1/2} < \infty\}$$

Définition des classes de fonctions

- Classe des fonctions à dérivées continues d'ordre k

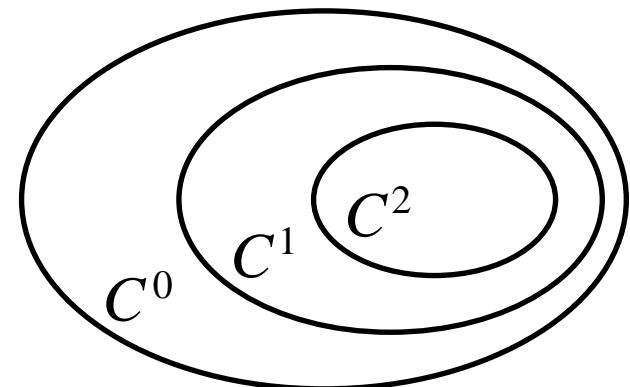
$$C^k([0, \ell]) = \{u(x) \mid |u|_k < \infty\}$$

- Norme maximale bornée

$$|u|_k = \max_{0 \leq x \leq \ell} (|u| + |\mathrm{d}u/\mathrm{d}x| + |\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2| + \dots + |\mathrm{d}^k u/\mathrm{d}x^k|)$$

- Régularité

$$|u|_0 \leq |u|_1 \leq |u|_2 \dots \dots C^2 \subset C^1 \subset C^0$$



Définition des classes de fonctions

- Classe des fonctions à dérivées de carrés sommables d'ordre k (espace de Sobolev ou de Hilbert d'ordre k)

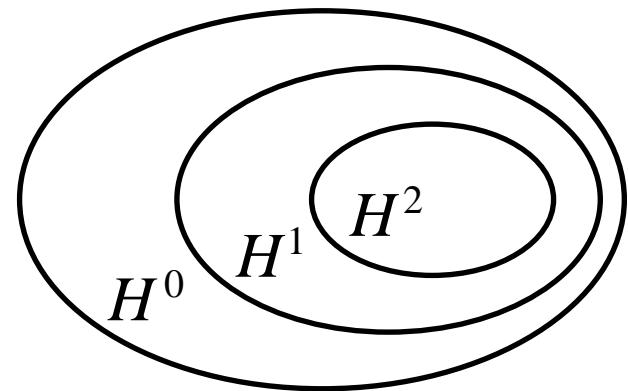
$$H^k(]0, \ell[) = \{ u(x) \mid \| u \|_k < \infty \}$$

- Norme hilbertienne (norme euclidienne généralisée) bornée

$$\| u \|_k = \left\{ \int_0^\ell [u^2 + (\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2)^2 + \dots + (\mathrm{d}^k u/\mathrm{d}x^k)^2] \, \mathrm{d}x \right\}^{1/2}$$

- Régularité

$$\begin{aligned} \| u \|_0 &\leq \| u \|_1 \leq \| u \|_2 \dots \\ \dots H^2 &\subset H^1 \subset H^0 \end{aligned}$$



Définition des classes de fonctions

- Classe des fonctions de carrés sommables

$$L^2(]0, \ell[) = \{ u(x) \mid \left\{ \int_0^\ell u^2 dx \right\}^{1/2} < \infty \}$$

- Autre définition de la classe $H^k(]0, \ell[)$ des fonctions à dérivées de carrés sommables d'ordre k

$$\begin{aligned} H^k(]0, \ell[) = \{ u(x) \mid & u \in L^2(]0, \ell[); \\ & du/dx \in L^2(]0, \ell[); \\ & d^2u/dx^2 \in L^2(]0, \ell[); \dots; \\ & d^k u/dx^k \in L^2(]0, \ell[) \} \end{aligned}$$

Comparaison des classes de fonctions

- Inclusion des classes de fonctions

$$C^k \subset H^k \quad (k \geq 0)$$

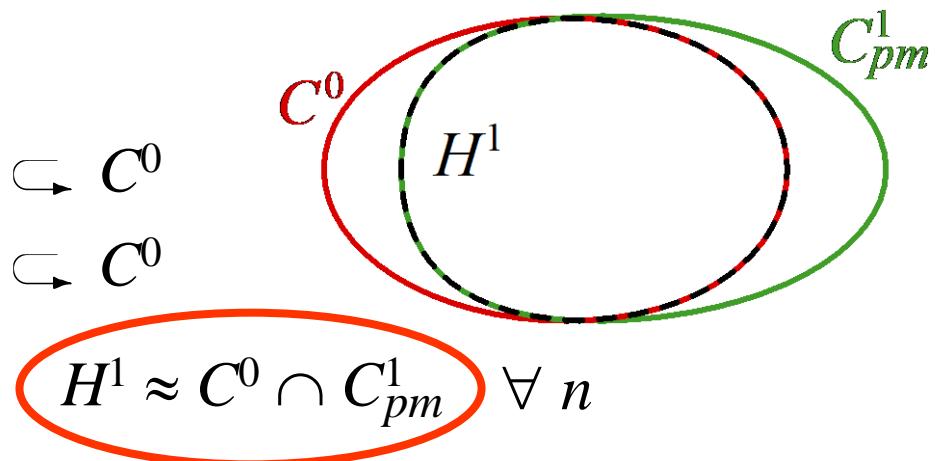
- Théorème d'injection de Sobolev (n dimension du problème)

$$C^k \subset H^k \hookrightarrow C^h \quad (k - h > n/2 ; k, h \geq 0)$$

- Cas particuliers

$$n = 1 \quad C^1 \subset H^1 \subset C^0$$

$$n = 2 \quad C^2 \subset H^2 \subset C^0$$



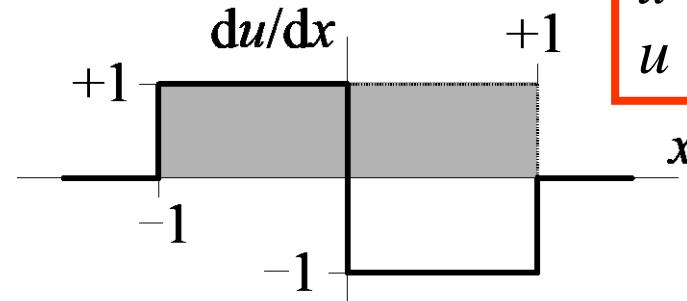
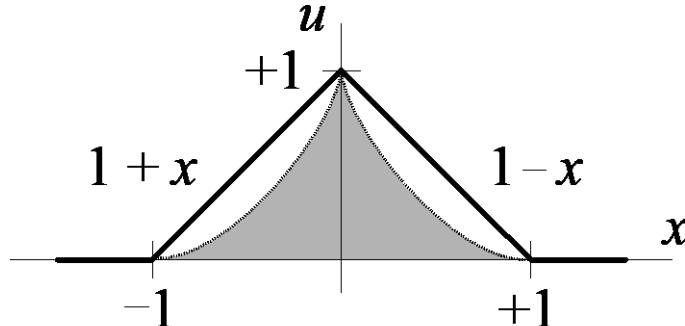
Comparaison des classes de fonctions

- Exemples en 1D

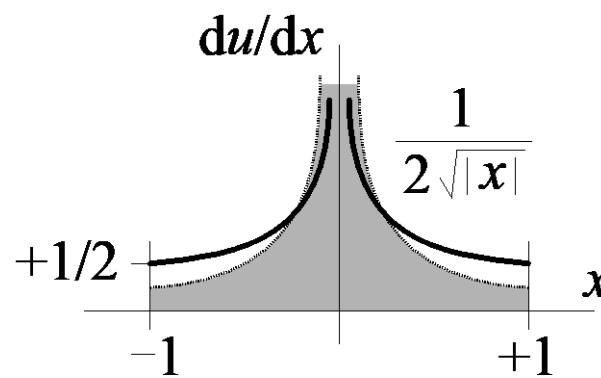
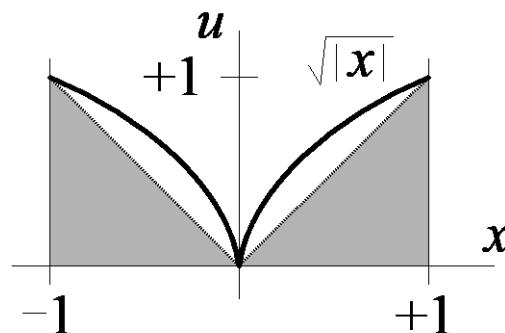
$$H^1 \subset C^0$$



faible \Leftrightarrow forte
 $H^1 \Leftrightarrow C^2$



$u \in C^0$
 $u \in H^1$
 $u \notin C^1$



$u \in C^0$
 $u \notin H^1$