

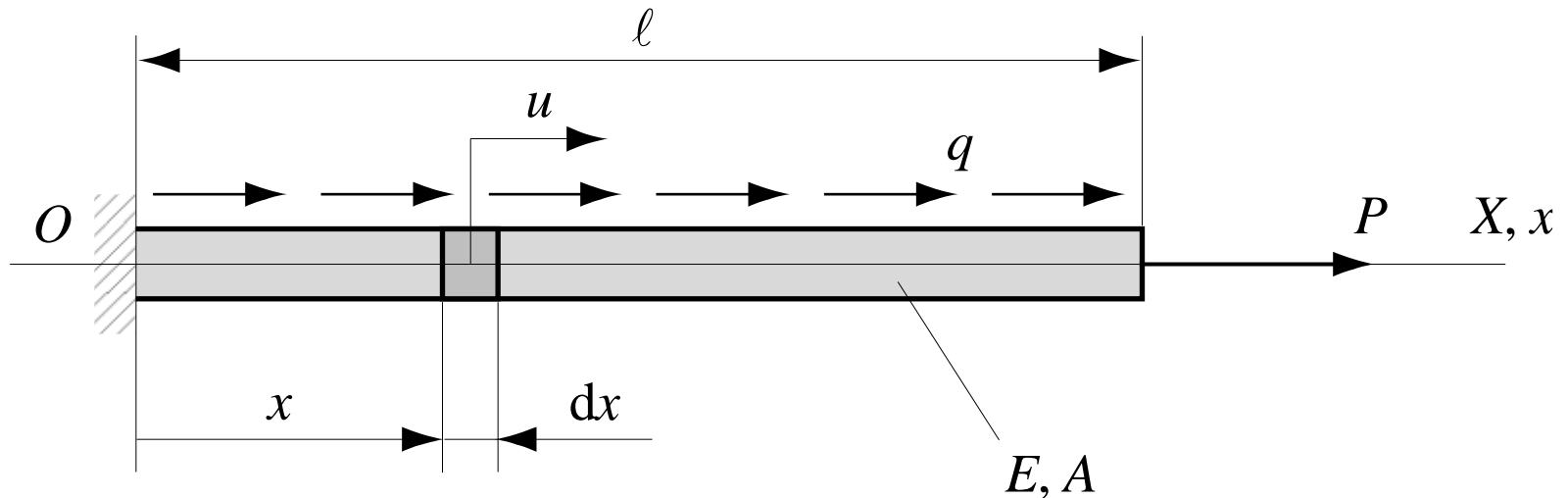
# Méthode des éléments finis

## Formulation intégrale du problème modèle de la barre

Prof. F. Gallaire

(cours conçu par Pr. Thomas Gmür)

# Problème modèle de la barre en traction/compression



Barreau prismatique encasté soumis à une charge répartie axiale et une force ponctuelle longitudinale

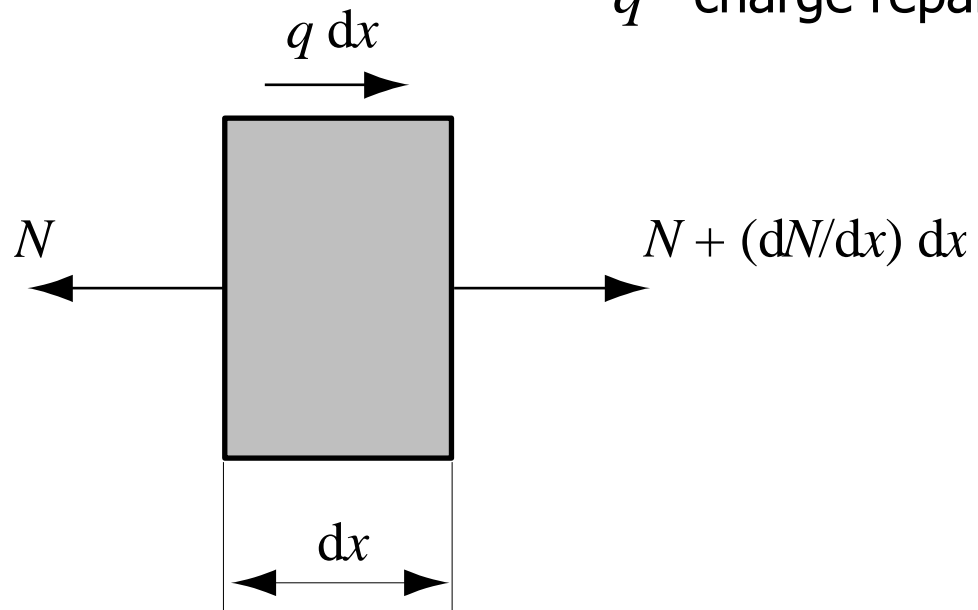
# Equilibre de la barre

- Equation d'équilibre

$$\cancel{N} + (dN/dx) \cancel{dx} - \cancel{N} + q \cancel{dx} = 0$$

$N$  effort intérieur  
 $q$  charge répartie

$$-dN/dx = q$$



# Equilibre de la barre

- Equation constitutive (loi de Hooke)

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

$\sigma_x$  contrainte normale  
 $E$  module d'élasticité  
 $\varepsilon_x$  déformation axiale

- Linéarité de la déformation

$$\varepsilon_x = du/dx \quad u \text{ déplacement axial}$$

- Lien entre effort normal  $N$  et déplacement  $u$

$$N = A \sigma_x = EA \varepsilon_x = EA (du/dx) \quad A \text{ section de la barre}$$

# Formulation forte du problème

- Equation différentielle du 2<sup>ème</sup> ordre

$$-EA (d^2u/dx^2) = q \quad \text{dans } ]0, \ell[ \quad \ell \text{ longueur}$$

$$u \in C^2([0, \ell]); q \in L^2(]0, \ell[)$$

$$L^2(]0, \ell[) = \{q(x) \mid \left\{ \int_0^\ell q^2 dx \right\}^{1/2} < \infty\}$$

- Condition aux limites essentielle  charge ponctuelle en flexion des poutres

$$u(0) = 0$$

- Condition aux limites naturelle

$$EA (du/dx)|_{x=\ell} = P \quad P \text{ force ponctuelle axiale}$$

# Formulation intégrale du problème

- Forme intégrale de l'élastostatique du barreau

$$\int_0^\ell [EA (d^2u/dx^2) + q] \delta u \, dx = 0 \quad \forall \delta u$$

$\delta u$  déplacement axial virtuel



caractère  
arbitraire de  $\delta u$

- Intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_0^\ell EA (du/dx) (d\delta u/dx) \, dx - [EA (du/dx) \delta u] \Big|_0^\ell \\ = \int_0^\ell q \delta u \, dx \quad \forall \delta u \end{aligned}$$

# Formulation intégrale du problème

- Déplacement virtuel cinématiquement admissible

$$\delta u(0) = 0 \quad \triangle ! \quad \delta u \text{ compatible avec la condition aux limites } \underline{\text{essentielle}}$$

- Insertion de la condition aux limites naturelle et de la contrepartie virtuelle de la condition aux limites essentielle

$$\int_0^\ell EA \left( \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{d\delta u}{dx} \right) dx + EA \left( \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} \delta u(0) = 0$$

$$- \underbrace{EA \left( \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=\ell}}_{=P} \delta u(\ell) = \int_0^\ell q \delta u dx \quad \forall \delta u$$

$$\int_0^\ell EA \left( \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{d\delta u}{dx} \right) dx - P \delta u(\ell) = \int_0^\ell q \delta u dx \quad \forall \delta u$$

# Formulation faible du problème

- Forme faible de l'élastostatique du barreau : principe des travaux virtuels

$$u \in U : \int_0^\ell EA (du/dx) (d\delta u/dx) dx \\ = P \delta u(\ell) + \int_0^\ell q \delta u dx \quad \forall \delta u \in V$$

- Classes des fonctions admissibles  $U$  et  $V$



$$U = \{u(x) \mid u(x) \in H^1(]0, \ell[), u(0) = 0\}$$

$$V = \{\delta u(x) \mid \delta u(x) \in H^1(]0, \ell[) ; \delta u(0) = 0\}$$

$$H^1(]0, \ell[) = \{w(x) \mid \left\{ \int_0^\ell [w^2 + (dw/dx)^2] dx \right\}^{1/2} < \infty\}$$



# Définition des classes de fonctions

- Classe des fonctions à dérivées continues d'ordre  $k$

$$C^k([0, \ell]) = \{u(x) \mid |u|_k < \infty\}$$

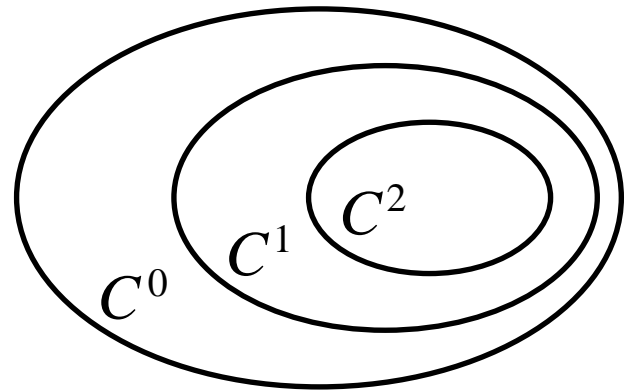
- Norme maximale bornée

$$|u|_k = \max_{0 \leq x \leq \ell} (|u| + |du/dx| + |d^2u/dx^2| + \dots + |d^k u/dx^k|)$$

- Régularité

$$|u|_0 \leq |u|_1 \leq |u|_2 \dots$$

$$\dots C^2 \subset C^1 \subset C^0$$



# Définition des classes de fonctions

- Classe des fonctions à dérivées de carrés sommables d'ordre  $k$  (espace de Sobolev ou de Hilbert d'ordre  $k$ )

$$H^k(]0, \ell[) = \{u(x) \mid \|u\|_k < \infty\}$$

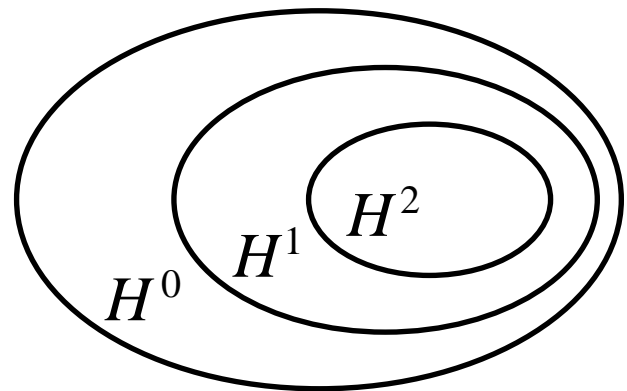
- Norme hilbertienne (norme euclidienne généralisée) bornée

$$\|u\|_k = \left\{ \int_0^\ell \left[ u^2 + (du/dx)^2 + (d^2u/dx^2)^2 + \dots + (d^k u/dx^k)^2 \right] dx \right\}^{1/2}$$

- Régularité

$$\|u\|_0 \leq \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \dots$$

$$\dots H^2 \subset H^1 \subset H^0$$



# Définition des classes de fonctions

- Classe des fonctions de carrés sommables

$$L^2(]0, \ell[) = \{u(x) \mid \left\{ \int_0^\ell u^2 \, dx \right\}^{1/2} < \infty\}$$

- Autre définition de la classe  $H^k(]0, \ell[)$  des fonctions à dérivées de carrés sommables d'ordre  $k$

$$H^k(]0, \ell[) = \{u(x) \mid u \in L^2(]0, \ell[);$$

$$du/dx \in L^2(]0, \ell[);$$

$$d^2u/dx^2 \in L^2(]0, \ell[); \dots;$$

$$d^k u/dx^k \in L^2(]0, \ell[)\}$$

# Comparaison des classes de fonctions

- Inclusion des classes de fonctions

$$C^k \subset H^k \quad (k \geq 0)$$

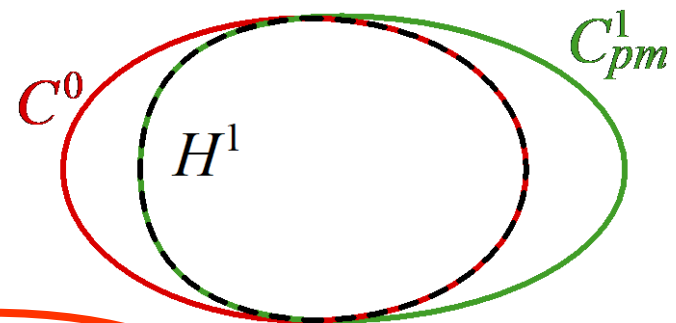
- Théorème d'injection de Sobolev ( $n$  dimension du problème)

$$C^k \subset H^k \hookrightarrow C^h \quad (k - h > n/2 ; k, h \geq 0)$$

- Cas particuliers

$$n = 1 \quad C^1 \subset H^1 \hookrightarrow C^0$$

$$n = 2 \quad C^2 \subset H^2 \hookrightarrow C^0$$



$$H^1 \approx C^0 \cap C^1_{pm} \quad \forall n$$

# Comparaison des classes de fonctions

- Exemples en 1D

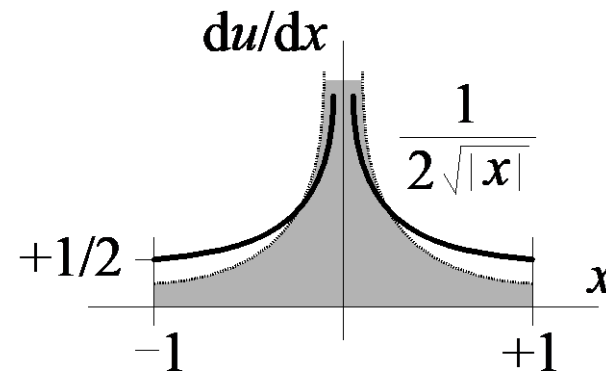
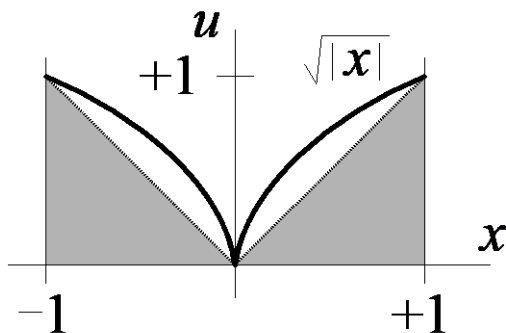
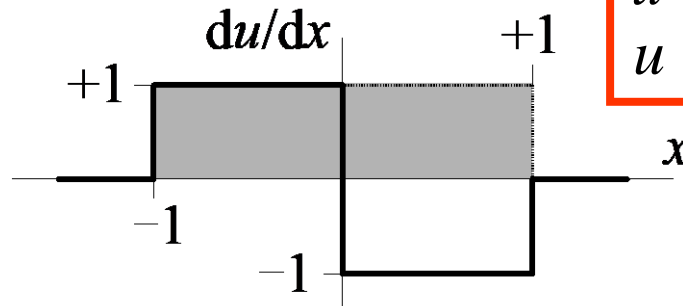
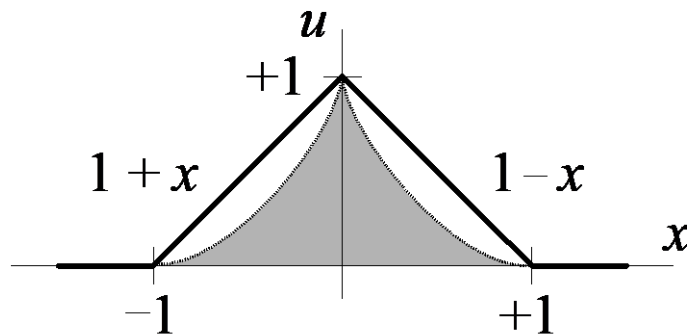
$$H^1 \subsetneq C^0$$



faible  $\Leftrightarrow$  forte

$$H^1 \Leftrightarrow C^2$$

$$\begin{aligned} u &\in C^0 \\ u &\in H^1 \\ u &\notin C^1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} u &\in C^0 \\ u &\notin H^1 \end{aligned}$$