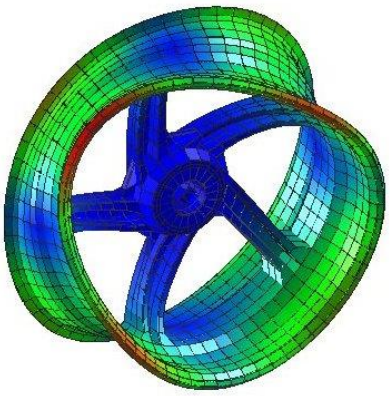
Méthode des éléments finis

Pr. Francois Gallaire
Lab. of Fluid Mechanics and Instabilities
School of Engineering, EPFL



Cours conçu par Pr. Thomas Gmür

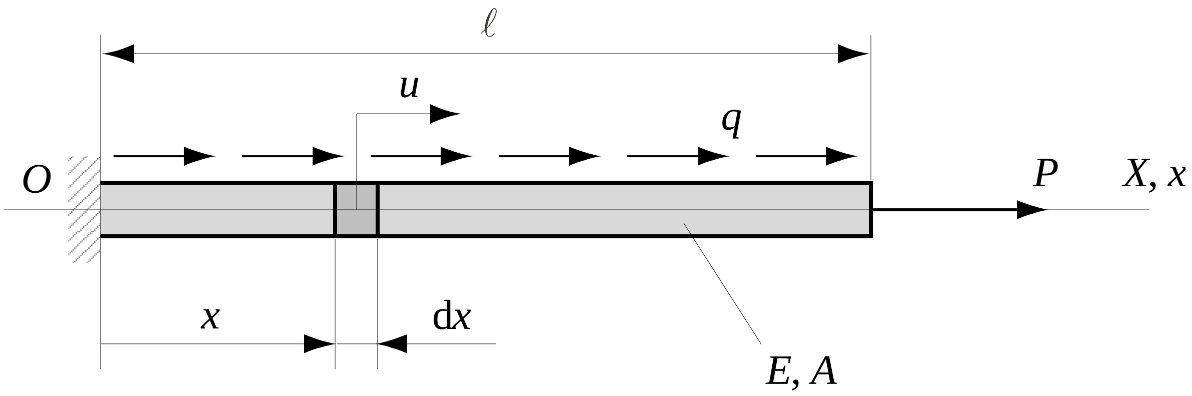
Méthode des éléments finis

Chapitre 2.1

Formulation intégrale du problème modèle de la barre

Cours conçu par Pr. Thomas Gmür

Problème modèle de la barre en traction/compression



Barreau prismatique encastré soumis à une charge répartie axiale et une force ponctuelle longitudinale

Equilibre de la barre

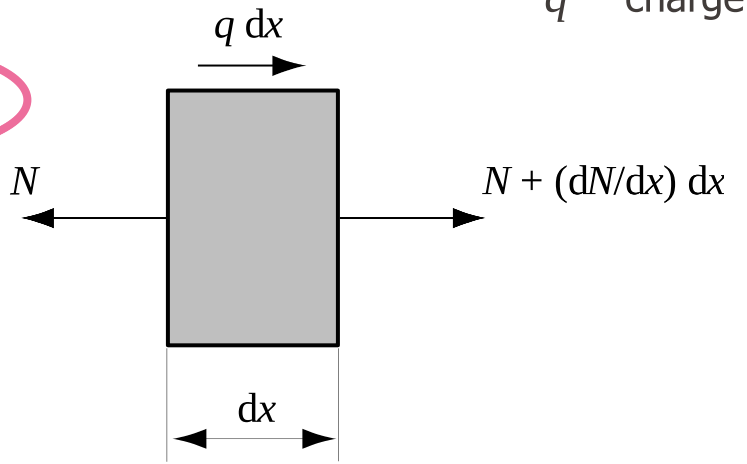
- Equation d'équilibre

$$\cancel{N} + (\mathrm{d}N/\mathrm{d}x)\,\cancel{\mathrm{d}x} - \cancel{N} + q\,\cancel{\mathrm{d}x} = 0$$

N effort intérieur

q charge répartie

$$-\,\mathrm{d}N/\mathrm{d}x = q$$



Equilibre de la barre

- Equation constitutive (loi de Hooke)

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x$$

σ_x contrainte normale
E module d'élasticité
ε_x déformation axiale

- Linéarité de la déformation

$$\varepsilon_x = du/dx$$

u déplacement axial

- Lien entre effort normal N et déplacement u

$$N = A\,\sigma_x = EA\,\varepsilon_x = EA\,(du/dx)$$

A section de la barre

Formulation forte du problème

- Equation différentielle du 2ème ordre

$$-EA\,(d^2u/dx^2) = q \text{ dans }]0, \ell[\qquad \ell \quad \text{longueur}$$

$$u \in C^2([0, \ell]);\ q \in L^2(]0, \ell[)$$

$$L^2(]0, \ell[) = \{q(x) \mid \left\{\int_0^\ell q^2\,dx\right\}^{1/2} < \infty\}$$

- Condition aux limites essentielle

$$u(0) = 0$$

q charge ponctuelle

charge ponctuelle en flexion des poutres

- Condition aux limites naturelle

$$EA\,(du/dx)|_{x = \ell} = P \qquad P \quad \text{force ponctuelle axiale}$$

Formulation intégrale du problème

- Forme intégrale de l'élastostatique du barreau

$$\int_0^\ell [EA\,(d^2u/dx^2) \;+\; q]\;\delta u\;dx \;=\; 0 \qquad \forall\;\delta u$$

δu déplacement axial virtuel

caractère arbitraire de δu

- Intégration par parties

$$\int_0^\ell EA\,(du/dx)\,(d\delta u/dx)\,dx \;-\; [EA\,(du/dx)\;\delta u]\Big|_0^\ell$$

$$=\;\int_0^\ell q\;\delta u\;dx \qquad \forall\;\delta u$$

Formulation intégrale du problème

- Déplacement virtuel cinématiquement admissible

$$\delta u(0) = 0$$

! δu compatible avec la condition aux limites essentielle

- Insertion de la condition aux limites naturelle et de la contrepartie virtuelle de la condition aux limites essentielle

$$\int_0^\ell EA\,(du/dx)\,(d\delta u/dx)\,dx + EA\,(du/dx)\Big|_{x=0}\underbrace{\delta u(0)}_{=\,0}$$

$$-\underbrace{EA\,(du/dx)\Big|_{x=\ell}}_{=\,P}\delta u(\ell) = \int_0^\ell q\,\delta u\,dx \quad \forall\ \delta u$$

$$\int_0^\ell EA\,(du/dx)\,(d\delta u/dx)\,dx - P\,\delta u(\ell) = \int_0^\ell q\,\delta u\,dx \quad \forall\ \delta u,\ t.q.\ \delta u(0)=0$$

Formulation faible du problème

- Forme faible de l'élastostatique du barreau : principe des travaux virtuels

$$u \in \mathcal{U} : \int_0^\ell EA\,(du/dx)\,(d\delta u/dx)\,dx$$
$$= P\,\delta u(\ell) + \int_0^\ell q\,\delta u\,dx \quad \forall\ \delta u \in \mathcal{V}$$

- Classes des fonctions admissibles $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$

$$\mathcal{U} = \{u(x) \mid u(x) \in H^1(]0,\ell[)\ ;\ u(0) = 0\}$$

$$\mathcal{V} = \{\delta u(x) \mid \delta u(x) \in H^1(]0,\ell[)\ ;\ \delta u(0) = 0\}$$

$$H^1(]0,\ell[) = \left\{w(x) \,\middle|\, \left\{\int_0^\ell [\,w^2 + (dw/dx)^2]\,dx\right\}^{1/2} < \infty\right\}$$

Définition des classes de fonctions

- Classe des fonctions à dérivées continues d'ordre k

$$C^k([0, \ell]) = \{u(x) \mid |u|_k < \infty\}$$

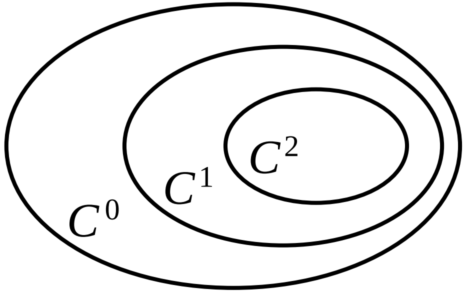
- Norme maximale bornée

$$|u|_k = \max_{0 \le x \le \ell} \left(|u| + |du/dx| + |d^2u/dx^2| + \ldots + |d^ku/dx^k| \right)$$

- Régularité

$$|u|_0 \le |u|_1 \le |u|_2 \ldots$$

$$\ldots\ C^2 \subset C^1 \subset C^0$$



Définition des classes de fonctions

- Classe des fonctions à dérivées de carrés sommables d'ordre k (espace de Sobolev ou de Hilbert d'ordre k)

$$H^k(]0, \ell[) = \{u(x) \mid \| u \|_k < \infty\}$$

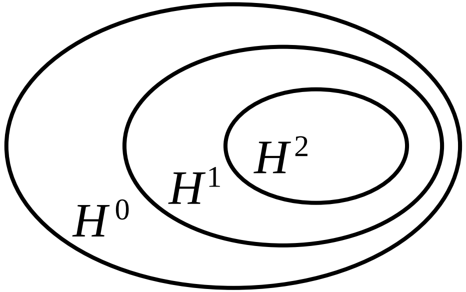
- Norme hilbertienne (norme euclidienne généralisée) bornée

$$\| u \|_k = \left\{ \int_0^\ell [\, u^2 + (du/dx)^2 + (d^2u/dx^2)^2 + \ldots + (d^ku/dx^k)^2 \,]\, dx \right\}^{1/2}$$

- Régularité

$$\| u \|_0 \leq \| u \|_1 \leq \| u \|_2 \ \ldots$$

$$\ldots\ H^2 \subset H^1 \subset H^0$$



Définition des classes de fonctions

- Classe des fonctions de carrés sommables

$$L^2(]0,\ell[) = \{u(x) \mid \left\{\int_0^\ell u^2\, dx\right\}^{1/2} < \infty\}$$

- Autre définition de la classe $H^k(]0,\ell[)$ des fonctions à dérivées de carrés sommables d'ordre k

$$\begin{aligned} H^k(]0,\ell[) = \{u(x) \mid\ & u \in L^2(]0,\ell[); \\ & du/dx \in L^2(]0,\ell[); \\ & d^2u/dx^2 \in L^2(]0,\ell[); \ldots; \\ & d^ku/dx^k \in L^2(]0,\ell[)\} \end{aligned}$$

Comparaison des classes de fonctions

- Inclusion des classes de fonctions

$$C^k \subset H^k \qquad (k \geq 0)$$

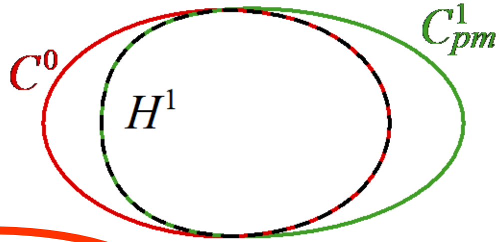
- Théorème d'injection de Sobolev (n dimension du problème)

$$C^k \subset H^k \hookrightarrow C^h \, (k - h > n/2 \; ; \; k, h \geq 0)$$

- Cas particuliers

$$n = 1 \qquad C^1 \subset H^1 \hookrightarrow C^0$$

$$n = 2 \qquad C^2 \subset H^2 \hookrightarrow C^0$$

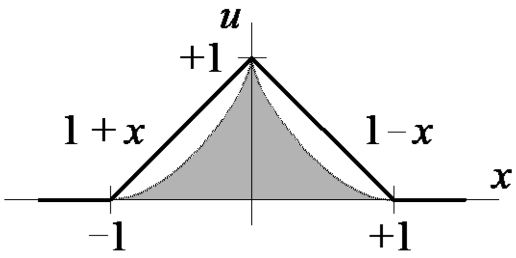


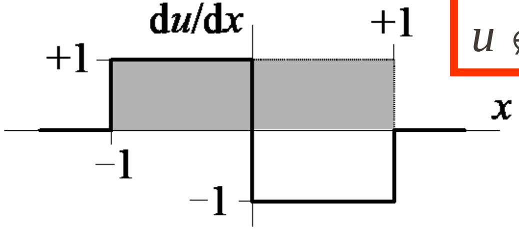
$$H^1 \approx C^0 \cap C^1_{pm} \quad \forall \, n$$

Comparaison des classes de fonctions

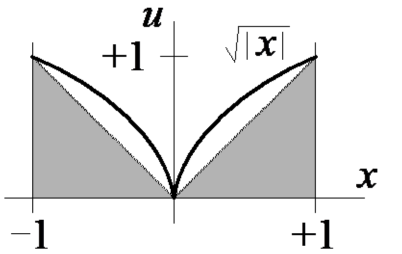
- Exemples en 1D $H^1 \hookrightarrow C^0$

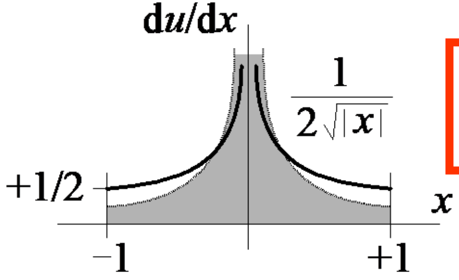
faible ⇔ forte
$H^1 \Leftrightarrow C^2$





$u \in C^0$
$u \in H^1$
$u \notin C^1$





$u \in C^0$
$u \notin H^1$