Examen BLANC ME372 Méthode des éléments finis
25 novembre 2021

- Tous documents papier autorisés. Aucun engin électronique (durée 2h)
- Vous pouvez faire référence au cours ou à un exercice vu en cours et en tirer les expressions utiles.

EXERCICE 1: Ecoulement de Brinkman dans un canal (22 pts)

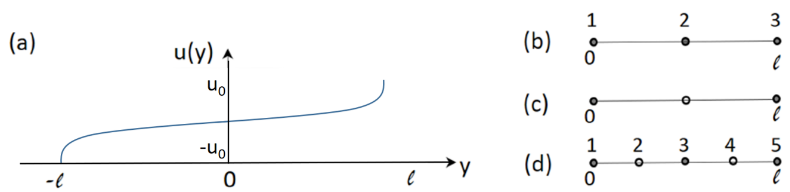

Figure 1: (a) Ecoulement dans un canal et (b)-(d) différentes discrétisations par éléments finis du segment $[0; \ell]$. Les noeuds intérieurs d'éléments d'ordre strictement supérieur à 1 sont représentés par des cercles vides.

On cherche à calculer le champ de vitesse $u(y)$ d'un écoulement dans un milieu poreux, dit de Brinkman, dans un canal plan aux parois mobiles entre $[-\ell; \ell]$. La viscosité est notée μ, la vitesse des parois $\pm u_0$ et la perméabilité k. L'équation pour la vitesse u en forme forte s'écrit

$$\frac{d}{dy}\left(\mu \frac{du}{dy}\right) - \frac{\mu}{k} u = 0 \tag{1}$$

$$u(-\ell) = -u_0; u(\ell) = u_0 \tag{2}$$

1. [1pt] On peut montrer que la solution à ce problème est impaire. Montrer que le problème devient pour $y \in [0; \ell]$

$$\frac{d}{dy}\left(\mu \frac{du}{dy}\right) - \frac{\mu}{k} u = 0 \tag{3}$$

$$u(0) = 0 \tag{4}$$

$$u(\ell) = u_0 \tag{5}$$

2. [3 pts] Ecrire la forme faible associée (on notera v la vitesse virtuelle).

   On donnera l'espace fonctionnel V adapté pour v, en le comparant à celui de u, $u \in U, U = \{u : u \in H^1([0, \ell]), u(0) = 0, u(\ell) = u_0\}$.

3. [2 pts] Pour que l'équivalence avec la forme forte soit obtenue, cette égalité doit-elle être vraie

   (a) pour **la** solution u et **la** solution virtuelle v associée?

   (b) pour **la** solution u et $\forall v \in V$?

   (c) pour toute solution $\forall u \in U$ et $\forall v \in V$?

4. [16 pts] On choisit $k^{-1} = 10$ m^{-2}, $\mu = 1$ Pa.s, $\ell = 1$m et $u_0 = 1$m.s^{-1}. On discrétise l'intervalle $[0, \ell]$ par **un** unique élément quadratique. A quelle discrétisation de la figure 1 cela correspond-il? Mettre le système sous la forme

$$Kq = 0 \tag{6}$$

   où K est matrice réduite 2×2 et q contient les valeurs nodales pertinentes. On fera attention à l'ordre des noeuds. En prenant en compte la condition aux limite en $y = \ell$, calculez la solution. Comparez à la solution analytique $u(y) = \sinh(y/\sqrt(k)) sinh(\ell/\sqrt(k))$, représentée sur la figure 2.

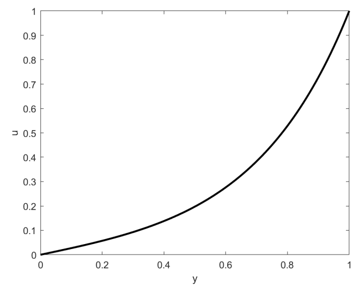

Figure 2: Solution exacte pour $k^{-1} = 10m^{-2}$, $\mu = 1Pa.s, \ell = 1m$, $u_0 = 1$m/s.

EXERCICE 2: Température dans un disque soumis à un flux de chaleur (22 pts)

On considère un disque de métal (de conductivité thermique constante κ) de rayon R soumis à un flux de chaleur uniforme et homogène q, comme indiqué sur la figure $3(a)$. La température T au sein du disque suit l'équation de Poisson suivante, écrite sous forme faible

$$T \in \mathcal{C} : \kappa \int_\Omega (\nabla T)^{\mathrm{T}} \nabla \delta T \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y = \int_\Omega q \delta T \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \quad \forall \delta T \in \mathcal{D} \tag{7}$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{C} = \left\{ T \mid T \in H^1(\Omega); T = 0 \,\mathrm{sur}\, \partial\Omega \right\} \tag{8}$$

Les grandeurs x et y dénotent les variables spatiales dans le milieu bidimensionnel Ω et s est l'abscisse parcourant la frontière du domaine $\partial\Omega$, le symbole ∇ représentant l'opérateur de dérivation du premier ordre en deux dimensions et δT symbolise la température virtuelle.

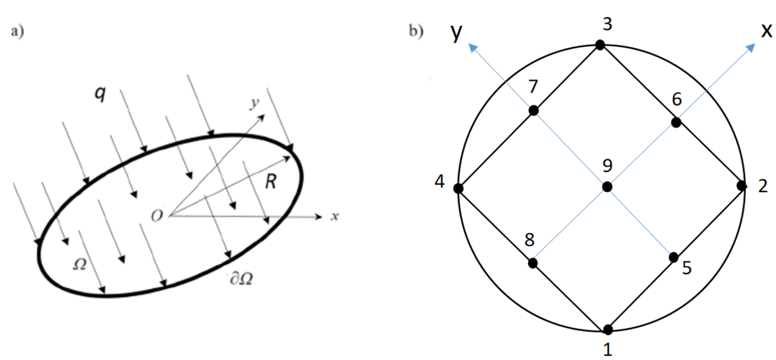

Figure 3: (a) Disque de rayon R soumis à un flux de chaleur q. (b) Discrétisation en 1 élément fini quadratique.

1. [2 pts] Déterminez la forme forte pour T. Quelle interprétation physique pourriez vous donner à la condition aux limites obtenue en $\partial\Omega$? Pourquoi le terme de bord résultant de l'intégration par partie de la forme forte a t'il disparu de la forme faible?

2. [20 pts] Sur la base d'une discrétisation (approche globale) du disque en 1 élément fini carré biquadratique, trouver l'approximation de la température au centre de la plaque circulaire. Il est conseillé de réfléchir aux conditions aux limites avant de faire trop de calculs, et d'introduire la fonction $h_9^{(}\xi, \eta)$ vue en cours ou dans le livre. On donne aussi l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} 4\xi^2 (1 - \eta^2)^2 d\xi d\eta = \frac{8 \times 16}{5 \times 9}. \tag{9}$$