Examen ME372 Méthode des éléments finis
01 février 2024

- Tous documents papier autorisés. Aucun engin électronique.
- Durée 3h. Papier libre.
- Soignez l'écriture (ce qui ne peut être lu correctement ne peut être noté positivement).
- Numérotez vos copies (par exemple 4/5) et mettez vos noms sur toutes les feuilles.
- Il n'y aura aucune réponse orale, quelque soit la question.
- Si vous pensez trouver une erreur dans l'énoncé (de signe ou autre), ce qui est malheureusement possible, notez le sur votre copie.
- Vous pouvez faire référence au cours ou à un exercice vu en cours et en tirer les expressions utiles.

1 (2)		10 (2)	
2 (2)		11 (2)	
3 (4)		12 (2)	
4 (1)		13 (4)	
5 (3)		14 (4)	
6 (5)		15 (1)	
7 (4)		16 (6)	
8 (3)		17 (1)	
9 (2)			

NE PAS REMPLIR

EXERCICE 1: Conduction thermique en une dimension (26 pts)

On considère deux barreaux metalliques de longeur $l = 1$ collés l'un à l'autre en $x = l$ et de conductivité thermique κ différentes $\kappa_1 = 1$ et $\kappa_2 = 2$. On fixe la température aux extrémités de la barre:
$T(x = 0) = T_0 = 1$ et $T(x = 2l) = T_l = 0$.

La loi constitutive dans le cas de la conduction de la chaleur est donnée par la loi de Fourier où $\vec{j}$ est un flux de chaleur:

$$\vec{j} = -\kappa \vec{\nabla} T. \tag{1}$$

L'équation de conduction de la chaleur en 1D pour les deux barreaux est la suivante:

$$-\frac{d}{dx}\left(\kappa_1 \frac{dT}{dx}\right) = 0, \forall x \in]0, l[. \tag{2}$$

$$-\frac{d}{dx}\left(\kappa_2 \frac{dT}{dx}\right) = 0, \forall x \in]l, 2l[. \tag{3}$$

1. [2 pts] Ecrire les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = 2l$, la condition de continuité des flux de chaleur en $x = l$ et de continuité de la température.

2. [2 pts] Ecrire la forme faible et définir les ensembles auxquels appartiennent T et δT, la température virtuelle.

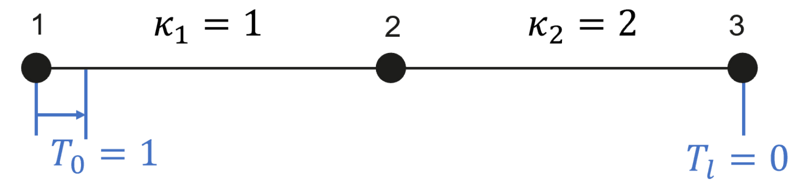

Figure 1: Schéma du système considéré.

3. [4 pts] On discrétise par deux éléments finis linéaires. Trouvez la matrice de conductivité ${}^eK$, assemblez et réduisez la matrice complète K en utilisant les conditions de bords homogène en $x = 2l$ et inhomogène en $x = 0$. Souvenez-vous que l'imposition de la condition de température non homogène en $x = 0$ contribue au terme source. Déterminer la température au centre en $x = l$.

4. [1 pt] Expliquer pourquoi il est suffisant de prendre seulement deux éléments linéaires?

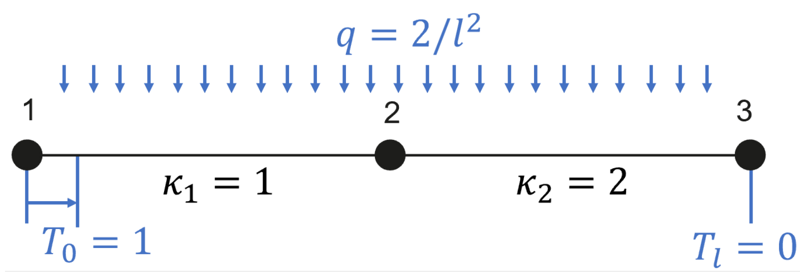

Figure 2: Schéma du système considéré.

5. [3 pts] On ajoute maintenant un flux de chaleur uniforme $q = 2/l^2$. Ecrire la forme forte, la forme faible et trouver la température au centre avec la discrétsation précédente.

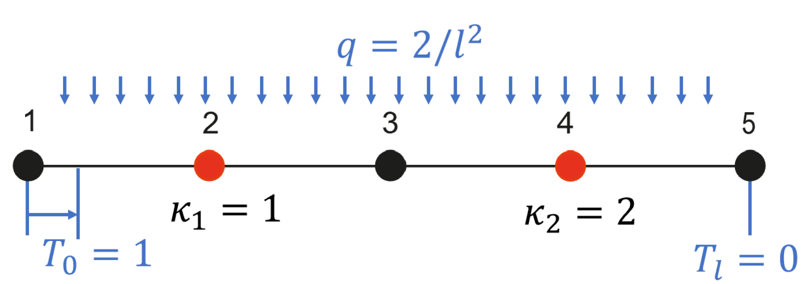

Figure 3: Schéma du système considéré.

6. [5 pts] Quelle est la température au centre si l'on discrétise par deux éléments quadratiques? Notez que

$$\begin{pmatrix} 16 & -8 & 0 \\ -8 & 21 & -16 \\ 0 & -16 & 32 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{288} \begin{pmatrix} 26 & 16 & 8 \\ 16 & 32 & 16 \\ 8 & 16 & 17 \end{pmatrix} \tag{4}$$

On en profite aussi pour rappeler que le vecteur source archétype d'un élément fini quadratique est

$$^{a}r = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

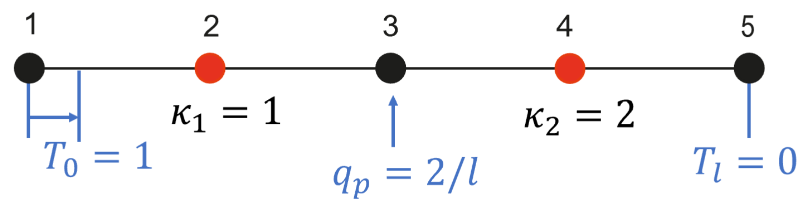

Figure 4: Schéma du système considéré.

7. [4 pts] Dans cette question, le flux de chaleur uniforme est remplacé par une source de chaleur ponctuelle en $x = l$, $q_p = 2/l$. Ecrire la forme faible associée et la discrétiser par deux éléments quadratiques.

8. [3 pts] Dans cette question, on change la condition aux limites en $x = 2l$ par une condition naturelle homogène (une condition d'isolation thermique). Ecrire la forme faible et l'equation discrète, sans chercher à la résoudre.

9. [2 pts] Attribuez à chaque courbe (figure 5) la question (parmi 3,6,7,8) à laquelle elle correspond.

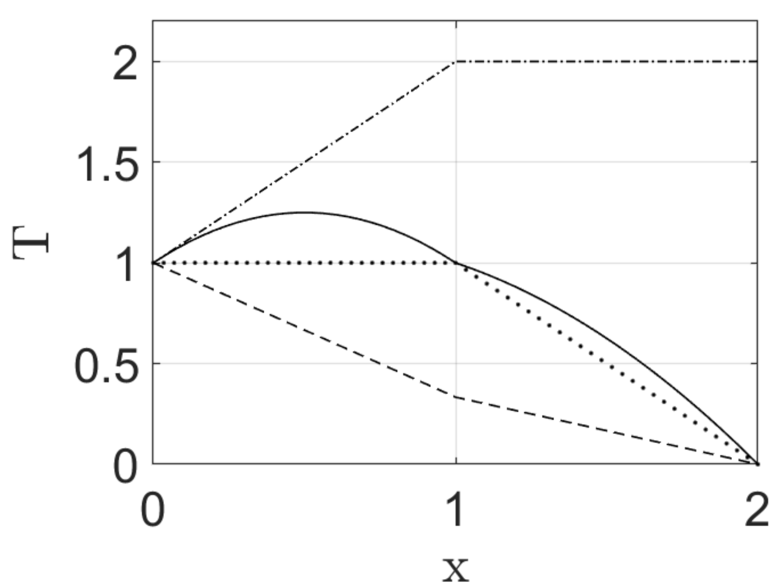

Figure 5: Profils de températures

EXERCICE 2: Conduction thermique en deux dimension (22 pts)

Nous considérons maintenant une plaque métallique en deux dimensions faite des deux mêmes matériaux que précédemment, et d'une largeur $2w$.

Dans un premier temps, on impose en $y = \pm w$ une condition naturelle homogène (une condition d'isolation thermique), alors que les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = 2l$ restent $T(0, y) = T_0$ et $T(2l, y) = 0$.

10. [2 pts] Ecrire la forme faible pour ce problème en absence de flux de chaleur et déterminer les espaces $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ auxquels appartiennent respectivement T et δT.

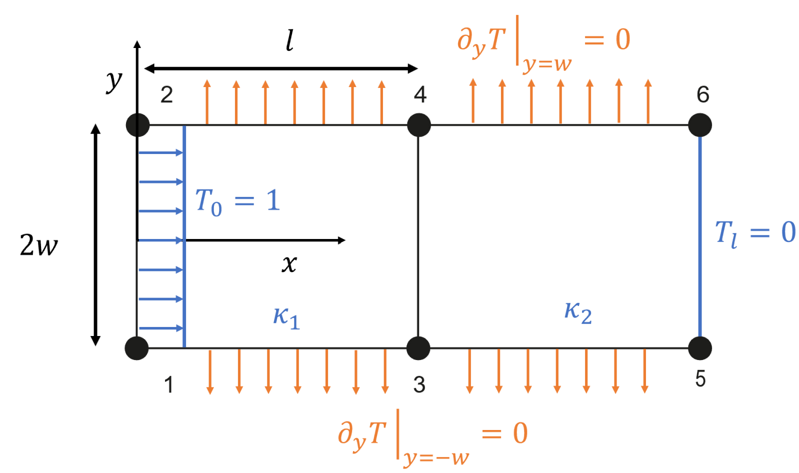

Figure 6: Schéma du système considéré.

11. [2 pts] On choisit de discrétiser en deux éléments bilinéaires. Bien observer la numérotation globale. Montrez que le système se ramène à la résolution d'un problème à deux inconnues.

12. [2 pts] Trouver le changement de coordonnées ${}^eT : (\xi, \eta) \to (x, y)$ puis donner la jacobienne ${}^{\mathbf{e}}\mathbf{J}$ ainsi que son déterminant ${}^ej$ et la jacobienne inverse.

13. [4 pts] On note ${}^eK$ la matrice de rigidité commune aux deux éléments finis et ${}^eK_{i,j}$ ses éléments. En utilisant ce changement de coordonnées ainsi que la formule suivante:

$$ {}^eK_{i,j} = {}^e\kappa \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left(({}^{\mathbf{e}}\mathbf{J}_{11})^{-2} \partial_\xi {}^ah_i \partial_\xi {}^ah_j + ({}^{\mathbf{e}}\mathbf{J}_{22})^{-2} \partial_\eta {}^ah_i \partial_\eta {}^ah_j \right) {}^ej d\xi d\eta $$

Trouvez ${}^eK_{3,2}$ et ${}^eK_{3,1}$ en prenant $w = l$, choix que nous ferons pour la suite.

14. [4 pts] La matrice de rigidité de chaque élément est la suivante:

$$ {}^eK = \frac{{}^e\kappa}{12l^2} \begin{pmatrix} 10 & 2 & {}^eK_{3,1} & -5 \\ 2 & 10 & {}^eK_{3,2} & -7 \\ {}^eK_{3,1} & {}^eK_{3,2} & 10 & 2 \\ -5 & -7 & 2 & 10 \end{pmatrix} $$

Assemblez la matrice et utilisez le résultat de la question 11 pour trouver la température en $x = l$ (points nodaux globaux 3 et 4). Vous devez la trouver égale. Est ce surprenant?

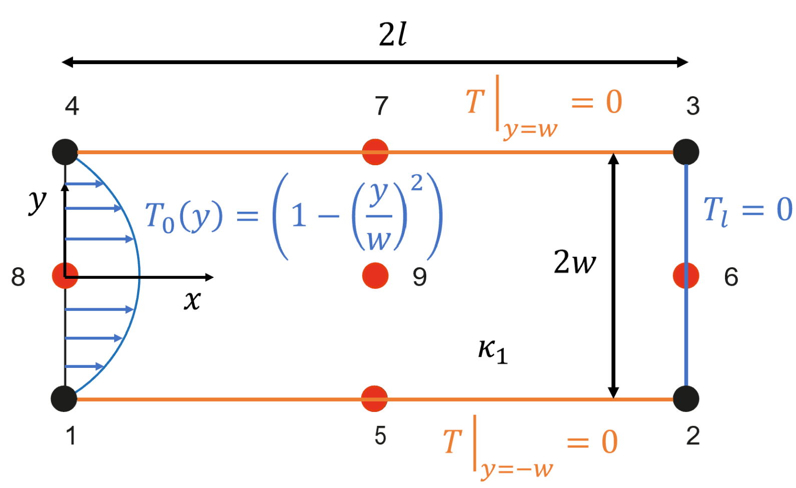

Figure 7: Schéma du système considéré.

15. [1 pt] Dans la suite nous fixons $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$. On impose désormais une température fixée $T_3 = 0$ en $y = \pm w$, $T_2 = 0$ en $x = 2l$ et un profil parabolique de température $T_1 = (1 - (y/w)^2)$ en $x = 0$. Pourquoi est-il insensé de discretiser en deux éléments bilinéaires?

16. [6 pts] On choisit donc de discrétiser en un seul élément biquadratique carré de coté $2l$. Pourquoi est t-il suffisant de connaitre les éléments ${}^eK_{99}$ et ${}^eK_{89}$?

    On rappelle que:

$$ {}^a h_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \tag{6} $$

    Déterminez ${}^a h_8$.

    Montrez que ${}^eK_{99} = \frac{256}{45l^2}$ et déterminez ${}^eK_{89}$ et en déduire T_9.

17. [1 pts] Les champs de température correspondant aux questions 14 et 16 sont représentés sur la figure 8. Commentez vos résultats précédents à la lueur de ces figures.

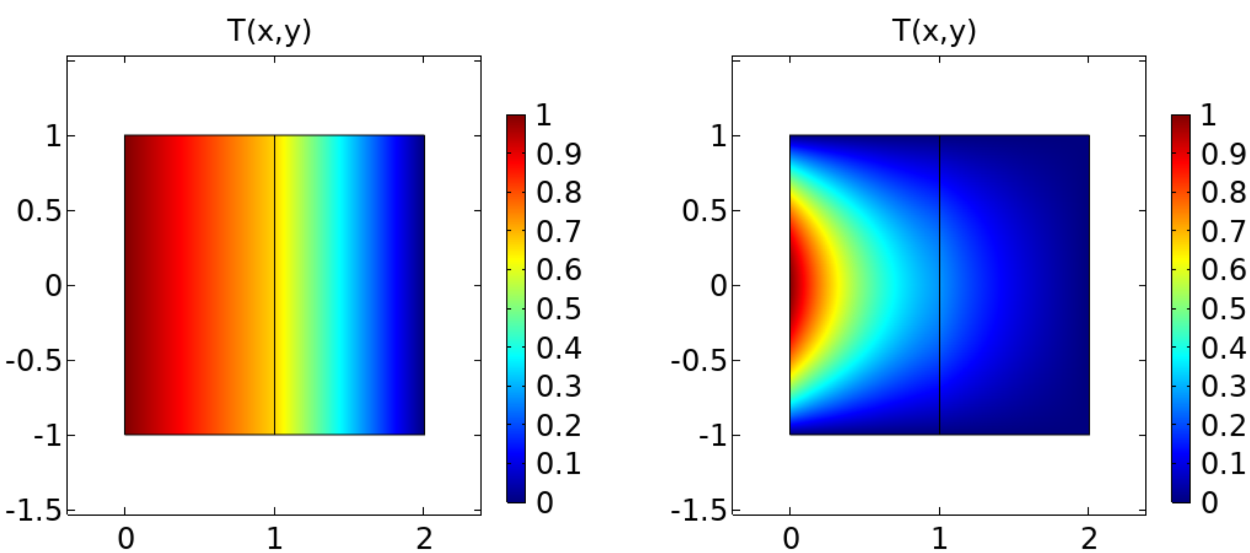

Figure 8: Profils de température.