

- Tous documents papier autorisés. Aucun engin électronique.
- Durée 3h.
- Soignez l'écriture (ce qui ne peut être lu correctement ne peut être noté positivement).
- Numérotez vos copies (par exemple 4/5) et mettez vos noms sur toutes les feuilles.
- Il n'y aura pas de réponse orale, à part éventuellement pour des questions de langage pour les étudiants non francophones.

EXERCICE 1: Ecoulement bi-fluide dans un canal (34 pts)

EXERCICE 2: Ecoulement dans une conduite (26 pts)

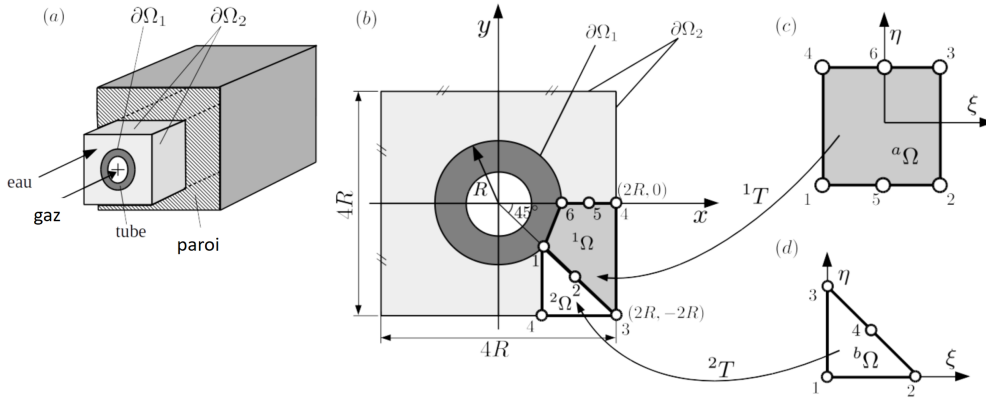


Figure 1: Description de la géométrie.

On considère un canal de section carrée (de côté $4R$), où l'eau coule autour d'une conduite de gaz (de rayon R) dont la paroi très fine est poreuse, comme indiqué sur la figure 1(a). La paroi externe de cette conduit, est en revanche très épaisse et isolante. L'écoulement d'eau est supposé indépendant du temps et sa vitesse u suit l'équation de Poisson suivante, écrite sous forme faible

$$u \in \mathcal{C} : - \int_{\Omega} (\nabla u)^T \nabla g \, dx \, dy - \int_{\Omega} f g \, dx \, dy = 0 \quad \forall g \in \mathcal{D} \quad (1)$$

$$\mathcal{C} = \{u | u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2\} \quad (2)$$

$$\mathcal{D} = \{g | g \in H^1(\Omega); g = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2\} \quad (3)$$

où f est le gradient de pression qui engendre l'écoulement.

1. [4 pts] Déterminez la forme forte pour u . Quelle interprétation physique pourriez-vous donner à la condition aux limites obtenue en $\partial\Omega_1$.
2. [8 pts] Déterminez l'erreur de discrétisation de l'aire (autrement dit la surface) de l'élément fini $^1\Omega$ obtenu par changement de coordonnées comme image de l'élément archétype rectangulaire Lagrangien quadratique-linéaire proposé $^a\Omega$ (Fig. 1(c)), en la comparant à la surface matérielle réelle comprise entre les points 1, 3, 4 et 6.
3. [14 pts] Calculez la solution dans l'élément $^2\Omega$ incomplet quadratique triangulaire obtenu par changement de coordonnées depuis l'élément archétype $^b\Omega$ proposé (Fig. 1(d)). On notera j le jacobien et on procèdera par étapes.