

Examen Blanc ME372 Méthode des éléments finis
27 Novembre 2021

- Tous documents papier autorisés. Aucun engin électronique (durée 1h30)
- Vous pouvez faire référence au cours ou à un exercice vu en cours et en tirer les expressions utiles.

Écoulement bi-fluide dans un canal

On cherche à calculer le champ de vitesse d'un écoulement à deux fluides, séparés par deux interfaces fluides en $y = \pm\delta$ dans un canal plan entre $[-1; 1]$. La viscosité vaut μ_e pour $|y| > \delta$ et $\mu_i = 1$ sinon. Le gradient de pression est noté ΔP .

L'équation pour la vitesse u en forme forte s'écrit

$$\frac{d}{dy} \left(\mu \frac{u}{dy} \right) = -\Delta P, \quad (1)$$

$$u(-1) = u(1) = 0. \quad (2)$$

La continuité de la contrainte visqueuse et la continuité de la vitesse imposent

$$u(-\delta^-) = u(-\delta^+), \quad (3)$$

$$\mu_e \frac{du}{dy}(-\delta^-) = \mu_i \frac{du}{dy}(-\delta^+), \quad (4)$$

$$u(\delta^-) = u(\delta^+), \quad (5)$$

$$\mu_i \frac{du}{dy}(\delta^-) = \mu_e \frac{du}{dy}(\delta^+), \quad (6)$$

1. [3 Pts] Ecrire la forme faible associée (on notera v la vitesse virtuelle).
On montrera que l'espace fonctionnel adapté pour g est $G = \{H^1([-1, 1], g(-1) = g(1) = 0)\}$.
2. [4 Pts] On considère d'abord le cas où les deux fluides ont même viscosité $\mu_e = \mu_i = 1$, on choisit $\Delta P = 2$ et on discrétise ce problème par deux éléments linéaires. Calculez la solution.
3. [4 Pts] Toujours sous les mêmes hypothèses, $\mu_e = \mu_i = 1$, $\Delta P = 2$, on choisit maintenant un seul élément quadratique. calculez la solution. Est-elle plus précise que la précédente?
4. [4 Pts] Toujours sous les mêmes hypothèses, $\mu_e = \mu_i = 1$, $\Delta P = 2$, mais en quête d'une précision augmentée, on discrétise maintenant avec deux éléments quadratiques. Déterminez le système à résoudre. La solution que vous pourriez obtenir en inversant ce système dont les valeurs nodales intérieures sont $[0.75; 1; 0.75]^t$ est-elle plus précise que la précédente?
5. [10 Pts] Nous pouvons enfin considérer deux fluides différents, $\mu_e = 1/2$ et $\mu_i = 1$, $\Delta P = 2$, et $\delta = 1/2$. Le domaine est maintenant discrétisé par 3 éléments quadratiques. Calculez le système linéaire à résoudre.