FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'INGÉNIEUR
SECTION DE GÉNIE MÉCANIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Méthodes de discrétisation en fluides

Dr. Marc A. Habisreutinger

Solution de l'examen écrit du lundi 18 juin 2015, de 08:15 à 11:15, salle CO 011

Sections

Génie mécanique	2014-2015	Bachelor semestre 6	13
GM Echange	2014-2015	Semestre printemps	2

1 Différences finies (15%)

1. De manière à établir le schéma aux différences finies souhaité, on écrit les deux séries de Taylor

$$\mathrm{u}_{i+1} = \mathrm{u}_i + \frac{\beta}{1!}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} + \frac{\beta^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} + \frac{\beta^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathrm{x}_i} + \frac{\beta^4}{4!}\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(\beta^5), \tag{1}$$

$$\mathrm{u}_{i-1} = \mathrm{u}_i - \frac{\alpha}{1!}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} + \frac{\alpha^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} - \frac{\alpha^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathrm{x}_i} + \frac{\alpha^4}{4!}\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(\alpha^5). \tag{2}$$

La somme de la première série multipliée par α et de la seconde multipliée par β s'écrit

$$\begin{aligned}\alpha\mathrm{u}_{i+1} + \beta\mathrm{u}_{i-1} = (\alpha+\beta)\mathrm{u}_i &+ \frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} \\ &+ \frac{\alpha\beta(\beta^2-\alpha^2)}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathrm{x}_i} + \frac{\alpha\beta(\alpha^3+\beta^3)}{4!}\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(\alpha^5,\beta^5).\end{aligned} \tag{3}$$

Puis, en isolant la dérivée seconde, on obtient la relation

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} &= 2\frac{\alpha\mathrm{u}_{i+1} - (\alpha+\beta)\mathrm{u}_i + \beta\mathrm{u}_{i-1}}{\alpha\beta(\alpha+\beta)} \\ &\quad - \frac{2\Delta}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathrm{x}_i} - \frac{2(\alpha^3+\beta^3)}{4!(\alpha+\beta)}\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(\Delta^2,\alpha^3,\beta^3),\end{aligned} \tag{4}$$

avec $\Delta = \beta - \alpha$. Ceci conduit à l'approximation

$$\boxed{\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} \simeq 2\frac{\alpha\mathrm{u}_{i+1} - (\alpha+\beta)\mathrm{u}_i + \beta\mathrm{u}_{i-1}}{\alpha\beta(\alpha+\beta)}.} \tag{5}$$

2. La relation (4) montre que l'approximation (5) est du premier ordre en Δ et du second ordre en α et β. Dans la pratique, il convient de limiter autant que possible les gradients de taille de maillage. L'erreur d'approximation est ainsi dominée par la taille des intervalles et non pas par la différence entre deux intervalles adjacents.

3. Dans le cas particulier où les intervalles entre les noeuds sont égaux, on a $\Delta = 0$ et on pose

$$\alpha = \beta \equiv h. \tag{6}$$

La relation générale (24) se réduit ainsi sous la forme

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} = \frac{\mathrm{u}_{i+1} - 2\mathrm{u}_i + \mathrm{u}_{i-1}}{h^2} - \frac{2h^2}{4!}\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(h^4), \tag{7}$$

dont on peut déduire le schéma classique des différences finies centrées du second ordre obtenu avec des noeuds équidistants

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} \simeq \frac{\mathrm{u}_{i+1} - 2\mathrm{u}_i + \mathrm{u}_{i-1}}{h^2}. \tag{8}$$

2 Equations aux dérivées partielles (15%)

On considère le système d'équations

$$+3\frac{\partial u}{\partial t} + 6\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{9}$$

$$+2\frac{\partial v}{\partial t} + 6\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{10}$$

qui peut s'écrire la sous forme

$$\mathbf{M}_t\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \mathbf{M}_x\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = \mathbf{0}, \tag{11}$$

avec $\boldsymbol{u} = (u, v)^{\mathrm{T}}$ ainsi que

$$\mathbf{M}_t = \begin{pmatrix} +3 & 0 \\ 0 & +2 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\mathbf{M}_x = \begin{pmatrix} +6 & +3 \\ 0 & +6 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Ce système peut s'écrire la sous forme standard

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = \mathbf{0}, \tag{14}$$

avec

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_t^{-1}\mathbf{M}_x = \begin{pmatrix} +2 & +1 \\ 0 & +3 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Les matrices des valeurs propres, des vecteurs propres ainsi que son inverse s'écrivent respectivement

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} +2 & 0 \\ 0 & +3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} +1 & +2^{-1/2} \\ 0 & +2^{-1/2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ 0 & +2^{-1/2} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

en sachant que les vecteurs propres sont définis à une constante multiplicative près.

1. Le système est hyperbolique puisque

$$\lambda_k = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{5 \pm 1}{2} \in \mathbb{R} \quad \forall k. \tag{17}$$

2. Les caractéristiques sont obtenues en trouvant une primitive de la relation

$$\lambda_k \,\mathrm{d}t - \mathrm{d}x = 0. \tag{18}$$

On trouve ainsi

$$\xi = 2t - x = \text{const}, \tag{19}$$

$$\eta = 3t - x = \text{const}. \tag{20}$$

3. Etant donné que les coefficients sont constants, les invariants de Riemann sont donnés par

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} +u - v \\ +2^{-1/2}v \end{pmatrix}. \tag{21}$$

3 Laboratoires (20%)

1. A la lecture du code, nous pouvons remarquer que les matrices de masse et de rigidité définies aux lignes 22 et 32 représentent sous forme discrète les opérateurs

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathrm{c}^2\boldsymbol{\nabla}) & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

   intervenant dans l'équation générale

$$\boldsymbol{M}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}, \tag{24}$$

   avec l'inconnue $\boldsymbol{u} = (u, v)^{\mathrm{T}}$. En utilisant les relations (22) et (23), le système d'équations aux dérivées partielles (24) s'écrit explicitement sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - v = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\cdot(c^2\boldsymbol{\nabla}u) = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

   En tenant compte du fait que le domaine est monodimensionel (ligne 18), et que la célérité est constante (ligne 4), le système se réduit à l'équation de D'Alembert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{26}$$

   qui est donc l'équation résolue numériquement à l'exécution de ce code Matlab.

2. Entre les lignes 39 et 43, les matrices de discrétisation sont modifiées de manière à imposer des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, à gauche et à droite.

   Des conditions initiales sont requises pour la variable u ainsi que pour sa dérivée temporelle étant donné qu'une dérivée temporelle seconde intervient dans l'équation de D'Alembert. Elles sont définies à la ligne 46 sous forme d'une gaussienne pour u, et d'une fonction nulle pour la dérivée temporelle.

3. Le terme spatial est discrétisé au moyen d'un schéma aux différences finies décalé du second ordre. Le gradient est en effet évalué sur des noeuds intercalés, puis l'opérateur qui représente la divergence sous forme discrète réinterpole les grandeurs sur les noeuds de colocation. Etant donné que la célérité est constante (ligne 4), ce schéma est strictement équivalent à un schéma aux différences finies centré du second ordre.

   La méthode d'intégration temporelle est basée sur la méthode-θ (lignes 35 et 36) avec le paramètre $\theta = 0.5$. La méthode utilisée est donc celle de Crank–Nicolson.

4. Les méthodes utilisées pour la discrétisation spatiale et temporelle sont convergentes et du second ordre.

   La combinaison d'un schéma aux différences finies centré du second ordre et de la méthode de Crank–Nicolson n'introduit aucune diffusion ou anti-diffusion numérique. Les erreurs de discrétisation agissent uniquement sur la dispersion, c'est-à-dire sur la vitesse de propagation des ondes.

4 Discrétisation spatiale (20%)

1. En écrivant l'équation d'advection-diffusion stationnaire sous forme intégrale et en utilisant les fonctions test de la méthode des différences finies, on obtient

$$\begin{cases} A(u)|_{\mathrm{x}_i} = -\nu \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} + \mathrm{c} \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} = \mathrm{f}_i, \quad i = 2, \dots, \mathrm{p}-1, \\ \mathrm{u}_1 = 0, \ \mathrm{u}_\mathrm{p} = 1. \end{cases} \tag{27}$$

En supposant que $\mathrm{c} > 0$, on utilise une approximation rétrograde du second ordre pour la dérivée première ainsi qu'une approximation centrée du second ordre pour la dérivée seconde

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} = \frac{3\mathrm{u}_i - 4\mathrm{u}_{i-1} + \mathrm{u}_{i-2}}{2h} + \frac{2h^2}{3!} \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(h^3), \tag{28}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} = \frac{\mathrm{u}_{i+1} - 2\mathrm{u}_i + \mathrm{u}_{i-1}}{h^2} - \frac{2h^2}{4!} \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(h^4). \tag{29}$$

L'utilisation de ces schémas conduit au système d'équations linéaires écrit sous forme indicielle

$$\begin{cases} -\nu \dfrac{\mathrm{u}_{i-1} - 2\mathrm{u}_i + \mathrm{u}_{i+1}}{h^2} + \mathrm{c} \dfrac{\mathrm{u}_i - \mathrm{u}_{i-1}}{h} = 0, & i = 2 \\ -\nu \dfrac{\mathrm{u}_{i-1} - 2\mathrm{u}_i + \mathrm{u}_{i+1}}{h^2} + \mathrm{c} \dfrac{3\mathrm{u}_i - 4\mathrm{u}_{i-1} + \mathrm{u}_{i-2}}{2h} = 0, & i = 3, \dots, \mathrm{p}-1, \\ \mathrm{u}_1 = 0, \ \mathrm{u}_\mathrm{p} = 1. \end{cases} \tag{30}$$

On peut remarquer que le schéma du second ordre ne peut pas être utilisé au noeud d'indice 2 puisque son support sort du domaine de calcul. Un schéma amont du premier odre a donc été utilisé pour ce noeud.

2. Pour établir l'équation modifiée relative à ce schéma, on se sert des relations (28) et (29) que l'on substitue dans le système d'équations (30). En ne considérant que les noeuds où le schéma rétrograde du second ordre peut être utilisé, on obtient

$$\left(-\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{c} \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\mathrm{x}_i} + \left(-\nu \frac{2h^2}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \mathrm{c} \frac{2h^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(h^3) = 0. \tag{31}$$

A l'ordre dominant, il reste

$$A(u_h) = A(u) + E_h(u) = \underbrace{-\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{c} \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{physique}} \underbrace{-\nu \frac{2h^2}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \mathrm{c} \frac{2h^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}}_{\text{numérique}} = 0. \tag{32}$$

3. De manière à garantir la monotonicité de la solution numérique, les méthodes Upwind du premier ordre ou de Sharfeter–Gummel introduisent directement une erreur sur la dérivée seconde, c'est-à-dire de la diffusion artificielle.

   Pour la méthode Upwind du second ordre, les erreurs numériques n'affectent pas directement les termes de l'équation d'advection-diffusion. La monotonicité peut ainsi être garantie tout en évitant l'ajout de diffusion numérique.

4. La méthode de Thomas n'est applicable que pour les matrices tridiagonales. En utilisant la méthode Upwind du second ordre, la largeur de bande de la matrice de discrétisation est égale à 4. La méthode de Thomas ne peut donc pas être appliquée dans ce cas.

5 Relation de dispersion (10%)

1. En partant de l'équation de Schrödinger

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\hbar}{2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = V\psi, \tag{33}$$

on choisit une solution de type onde sous la forme

$$\psi(x,t) = \widehat{\psi}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{k}x-\omega t)}, \tag{34}$$

avec $\widehat{\psi}$ l'amplitude, k le nombre d'onde et ω la pulsation. On en déduit facilement que

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\mathrm{i}\omega\widehat{\psi}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{k}x-\omega t)}, \tag{35}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = (\mathrm{ik})^2\widehat{\psi}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{k}x-\omega t)}. \tag{36}$$

Par substitution des relations (35) et (36) dans l'équation de Schrödinger (33), on obtient

$$(\hbar\omega - \frac{\hbar}{2\mu}\mathrm{k}^2 - V)\widehat{\psi} = 0. \tag{37}$$

Etant donné qu'on considère des solutions d'amplitude $\widehat{\psi}$ non-nulle, on obtient la relation de dispersion

$$\boxed{\omega = \frac{\mathrm{k}^2}{2\mu} + \frac{V}{\hbar},} \tag{38}$$

qui permet de déterminer la vitesse de phase

$$\mathrm{v}_\phi = \frac{\omega}{\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{k}}{2\mu} + \frac{V}{\hbar\mathrm{k}}. \tag{39}$$

2. Etant donné que la vitesse de phase est purement réelle et qu'elle dépend du nombre d'onde, l'équation de Schrödinger décrit la propagation d'ondes sans atténuation ou amplification et de manière dispersive.

   La vitesse de phase des ondes décrites par l'équation d'advection est constante et égale à c, ce qui correspond à une propagation sans atténuation ou amplification en milieu non-dispersif.

6 Equations de Navier–Stokes (20%)

Pour déterminer la précision du modèle proposé, nous devons vérifier si l'opérateur et les conditions aux limites sont appropriées à la situation physique. D'après les hypothèses, l'écoulement peut être décrit par les équations de Navier–Stokes que nous écrivons sous forme adimensionnelle et indicielle

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + g_i, \tag{40}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \tag{41}$$

- En prenant la divergence de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (40) et en considérant que les forces volumiques $\boldsymbol{g}$ sont constantes, on obtient

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_i}}_{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0} - \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_i}}_{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0} = 0, \tag{42}$$

  où terme non-linéaire devient

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = -\underbrace{\frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}:\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}} - v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_i}}_{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0}. \tag{43}$$

  On obtient ainsi l'équation de Poisson

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}^2 p = -\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} : \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}} \tag{44}$$

  qui correspond à celle proposée.

- Il s'agit maintenant de déterminer si les conditions aux limites de Neumann homogènes sont aussi applicables. Etant donné que le domaine $\boldsymbol{\Omega}$ est supposé très grand par rapport à la longueur L, on peut faire l'hypothèse que le champ de vitesse ne soit pas perturbé sur les limites extérieures. En projettant les équations de quantité de mouvement selon $\boldsymbol{n}$, nous obtenons donc

$$\boldsymbol{\nabla} p \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{n}. \tag{45}$$

  Etant donné la présence de forces volumiques non-nulles, les conditions aux limites proposées ne peuvent pas être appliquées sur les limites extérieures du domaine.

  Au niveau du profil, en tenant compte du fait que $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ à la paroi, la projection des équations de quantité de mouvement selon $\boldsymbol{n}$ permet d'obtenir

$$\boldsymbol{\nabla} p \cdot \boldsymbol{n} = \left(\frac{1}{\mathrm{Re}} \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}\right) \cdot \boldsymbol{n}. \tag{46}$$

  Puis, en utilisant l'identité vectorielle

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\nabla}(\underbrace{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}}_{=\boldsymbol{0}}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v}, \tag{47}$$

  où le premier terme du membre de droite est nul par le truchement de l'équation de conservation de la masse, on obtient

$$\boldsymbol{\nabla} p \cdot \boldsymbol{n} = \left(-\frac{1}{\mathrm{Re}} \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{g}\right) \cdot \boldsymbol{n}. \tag{48}$$

  Comme le nombre de Reynolds vaut 10^6 et qu'on suppose l'écoulement attaché (écoulement peu rotationnel), on peut raisonnablement supposer que le premier terme du membre de droite soit nul. On obtient ainsi les conditions aux limites à imposer sur le profil

$$\boldsymbol{\nabla} p \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{n}, \tag{49}$$

  qui sont les mêmes que celles à imposer aux limites extérieures du domaine. Nous voyons que la présence de forces volumiques non-nulles empêche l'utilisation de conditions de Neumann homogènes.

Etant donné que les conditions aux limites ne sont pas applicables dans cette situation, la prédiction du champ de pression obtenue avec le modèle proposé n'est pas convenable.