FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'INGÉNIEUR
SECTION DE GÉNIE MÉCANIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Méthodes de discrétisation en fluides

Dr. Marc A. Habisreutinger

Solution de l'examen écrit du lundi 30 juin 2014, de 08:15 à 11:15, salle CO3

Sections

Génie mécanique	2013-2014	Bachelor semestre 6	19
Génie mécanique	2013-2014	Master semestre 2	2
Passerelle HES-GM	2013-2014	Semestre printemps	2

1 Différences finies (15%)

1. De manière à établir le schéma aux différences finies souhaité, on écrit les deux séries de Taylor

$$\mathrm{u}_{i+1} = \mathrm{u}_i + \frac{\beta}{1!}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} + \frac{\beta^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} + \frac{\beta^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(\beta^4), \tag{1}$$

$$\mathrm{u}_{i-1} = \mathrm{u}_i - \frac{\alpha}{1!}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} + \frac{\alpha^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} - \frac{\alpha^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(\alpha^4). \tag{2}$$

La différence de la première série multipliée par α et de la seconde multipliée par β s'écrit

$$\alpha\mathrm{u}_{i+1} - \beta\mathrm{u}_{i-1} = (\alpha-\beta)\mathrm{u}_i + \frac{2\alpha\beta}{1!}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} + \alpha\beta\frac{\beta-\alpha}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} + \alpha\beta\frac{\alpha^2+\beta^2}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(\alpha,\beta). \tag{3}$$

Puis, en isolant la dérivée première, on obtient la relation

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} = \frac{\alpha\mathrm{u}_{i+1} + \Delta\mathrm{u}_i - \beta\mathrm{u}_{i-1}}{2\alpha\beta} - \frac{\Delta}{2\cdot 2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2\cdot 3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(\Delta^2,\alpha^4,\beta^4), \tag{4}$$

avec $\Delta = \beta - \alpha$. Ceci conduit à l'approximation

$$\boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} \simeq \frac{\alpha\mathrm{u}_{i+1} + \Delta\mathrm{u}_i - \beta\mathrm{u}_{i-1}}{2\alpha\beta}.} \tag{5}$$

2. La relation (4) montre que l'approximation (5) est du premier ordre en Δ et du second ordre en α et β. Dans la pratique, il convient donc de limiter les irrégularités pour que l'erreur soit dominée par la taille du maillage.

3. Dans le cas particulier où les intervalles entre les noeuds sont égaux, on a $\Delta = 0$ et on pose

$$\alpha = \beta \equiv h. \tag{6}$$

La relation générale (4) se réduit ainsi sous la forme

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} = \frac{\mathrm{u}_{i+1} - \mathrm{u}_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(h^4), \tag{7}$$

dont on peut déduire le schéma classique des différences finies centrées du second ordre obtenu avec des noeuds équidistants

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} \simeq \frac{\mathrm{u}_{i+1} - \mathrm{u}_{i-1}}{2h}. \tag{8}$$

2 Equations aux dérivées partielles (15%)

On considère le système d'équations

$$+\frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 1\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{9}$$

$$+\frac{\partial v}{\partial t} + 3\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{10}$$

qui peut s'écrire la sous forme standard

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = \mathbf{0}, \tag{11}$$

avec $\boldsymbol{u} = (u, v)^{\mathrm{T}}$ ainsi que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} +2 & +1 \\ 0 & +3 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Les matrices des valeurs propres, des vecteurs propres ainsi que son inverse s'écrivent respectivement

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} +2 & 0 \\ 0 & +3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} +1 & +2^{-1/2} \\ 0 & +2^{-1/2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ 0 & +2^{-1/2} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

en sachant que les vecteurs propres sont définis à une constante multiplicative près.

1. Le système est hyperbolique puisque

$$\lambda_k = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{5 \pm 1}{2} \in \mathbb{R} \quad \forall k. \tag{14}$$

2. Les caractéristiques sont obtenues en trouvant une primitive de la relation

$$\lambda_k \,\mathrm{d}t - \mathrm{d}x = 0. \tag{15}$$

   On trouve ainsi

$$\xi = 2t - x = \text{const}, \tag{16}$$

$$\eta = 3t - x = \text{const}. \tag{17}$$

3. Etant donné que les coefficients sont constants, les invariants de Riemann sont donnés par

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} +u - v \\ +2^{-1/2} v \end{pmatrix}. \tag{18}$$

3 Laboratoires (25%)

1. L'équation aux dérivées partielles résolue par le code Matlab est

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad \nu > 0, \tag{19}$$

avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes et les conditions initiales

$$u_0 = \sin(\mathrm{k}x), \quad \mathrm{k} = \frac{2\pi}{\mathrm{L}}, \tag{20}$$

où L est la longueur du domaine.

2. Le terme de diffusion est discrétisé par un schéma aux différences finies centré du second ordre. L'intégration temporelle est effectuée au moyen de la méthode d'Euler explicite.

3. Les solutions d'équilibre de l'équation (19) sont stables au niveau continu. Etant donné qu'on utilise une approche centrée pour la discrétisation spatiale, le caractère des solutions d'équilibre au niveau semi-discret demeure inchangé.

4. Etant donné qu'on utilise la méthode d'Euler explicite en temps et un schéma aux différences finies centré du second ordre en espace, la stabilité est conservée au niveau discret pour autant que le critère

$$\Delta \mathrm{t} < \frac{h^2}{2\nu} \tag{21}$$

soit respecté. Si le pas de temps est plus grand que cette valeur, les solutions d'équilibre sont instables au niveau discret.

5. Etant donné que le critère (21) n'est pas respecté, la solution de l'équation de diffusion sera polluée par des instabilités numériques. L'équation de diffusion (19) étant linéaire, il ne peut pas y avoir de phénomène de saturation. La croissance exponentielle des instabilités s'effectue donc indéfiniment dans le temps. On obtient ainsi une solution polluée par des oscillations d'amplitude extrêmement élevée et on dira que la solution numérique "*explose*".

4 Analyses de stabilité (20%)

Pour déterminer le caractère des solutions d'équilibre au niveau continu, on calcule l'opérateur spatial linéarisé

$$L(\overline{u}, u') = \left.\frac{\partial A}{\partial u}\right|_{\overline{u}} (u') = \nu\, \partial^2_{xx} u'. \tag{22}$$

Dans ce cas particulier, il est égal à l'opérateur spatial puisque ce dernier est linéaire. L'équation d'évolution de la perturbation s'écrit donc

$$\partial_t u' + \nu\, \partial^2_{xx} u' = 0. \tag{23}$$

Avec une solution de la forme $u'(x,t) = \hat{\mathrm{u}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{k}x - \omega t)}$, on obtient la relation de dispersion

$$\omega = +\mathrm{i}\nu\mathrm{k}^2. \tag{24}$$

Etant donné que

$$\mathrm{Im}(\omega) > 0, \quad \forall \mathrm{k}, \tag{25}$$

les solutions d'équilibre sont instables au niveau continu, c'est-à-dire que toute perturbation est exponentiellement amplifiée en temps.

1. En écrivant l'équation sous forme intégrale et en utilisant les fonctions test de la méthode des différences finies, on obtient

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathrm{x}_i} + \nu \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} = \mathrm{f}_i, \quad \forall i, \tag{26}$$

puisqu'on considère des conditions aux limites périodiques. Ensuite, l'utilisation d'une approximation centrée du second ordre pour le terme spatial conduit aux équations semi-discrètes

$$\dot{\mathrm{u}}_i + \nu \frac{\mathrm{u}_{i+1} - 2\mathrm{u}_i + \mathrm{u}_{i+1}}{h^2} = \mathrm{f}_i, \quad \forall i. \tag{27}$$

Ceci peut aussi s'écrire sous la forme matricielle standard

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{f}, \tag{28}$$

avec la matrice de masse $\mathbf{M} = \mathbf{I}$ (méthode de colocation). La matrice de discrétisation est donnée par

$$\mathbf{A} = +\frac{\nu}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & +1 & & & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & +1 & -2 & +1 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ +1 & & & +1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

2. Pour déterminer le caractère des solutions d'équilibre au niveau semi-discret, on doit résoudre le problème aux valeurs propres généralisé

$$\tilde{\lambda}^{(k)} \mathbf{M} \hat{\mathbf{u}}^{(k)} + \mathbf{L} \hat{\mathbf{u}}^{(k)} = \mathbf{0}. \tag{30}$$

Etant donné que la matrice de masse est identité et que $\mathbf{L} = \mathbf{A}$ par linéarité de l'équation, il se réduit à un problème aux valeurs propres standard

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{u}}^{(k)} = -\tilde{\lambda}^{(k)} \hat{\mathbf{u}}^{(k)}. \tag{31}$$

La matrice $\mathbf{A}$ étant circulaire et tridiagonale, on trouve facilement que

$$\tilde{\lambda}^{(k)} = +\frac{2\nu}{h^2} \left(1 - \cos(\psi_k)\right) \geq 0. \tag{32}$$

L'instabilité des solutions d'équilibre est donc conservée au niveau semi-discret quel que soit le pas de discrétisation. Cette méthode de discétisation spatiale est donc absolument consistante.

3. En utilisant la méthode-theta pour la discrétisation temporelle de l'équation (28), on montre facilement qu'on obtient le système d'équations algébriques

$$\mathbf{H}\tilde{\mathbf{u}}^{(n+1)} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{u}}^{(n)} + (1-\theta)\mathbf{M}\mathbf{f}^{(n)} + \theta\mathbf{M}\mathbf{f}^{(n+1)}, \tag{33}$$

   où les matrices $\mathbf{H}$ et $\mathbf{R}$ sont données par

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta \mathrm{t}} + \theta\mathbf{A}, \tag{34}$$

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta \mathrm{t}} + (\theta-1)\mathbf{A}. \tag{35}$$

   Dans le cas de la méthode d'Euler implicite, on pose $\theta = 1$.

4. Pour examiner le caractère des solutions d'équilibre au niveau discret, on doit résoudre le problème aux valeurs propres généralisé

$$\tilde{\gamma}^{(k)}\mathbf{H}\hat{\mathbf{u}}^{(k)} = \mathbf{R}\hat{\mathbf{u}}^{(k)}, \tag{36}$$

   où les matrices $\mathbf{H}$ et $\mathbf{R}$ sont cette fois-ci données par

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta \mathrm{t}} + \theta\mathbf{L}, \tag{37}$$

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta \mathrm{t}} + (\theta-1)\mathbf{L}. \tag{38}$$

   Avec la méthode d'Euler implicite ($\theta = 1$) et puisque la matrice de masse est identité, le problème aux valeurs propres généralisé (36) se simplifie sous la forme

$$\tilde{\gamma}^{(k)}(\mathbf{I} + \Delta \mathrm{t}\mathbf{A})\hat{\mathbf{u}}^{(k)} = \hat{\mathbf{u}}^{(k)} \tag{39}$$

   étant donné que $\mathbf{L} = \mathbf{A}$. On trouve ainsi que

$$(\tilde{\gamma}^{(k)})^{-1} = \frac{2\nu\Delta \mathrm{t}}{h^2}\left(\cos(\psi_k) - 1\right) + 1. \tag{40}$$

   Pour conserver l'instabilité des solutions d'équilibre, on doit imposer

$$|\tilde{\gamma}^{(k)}| > 1, \tag{41}$$

   ou de manière équivalente $|(\tilde{\gamma}^{(k)})^{-1}| < 1$, ce qui implique la restriction

$$\boxed{\Delta \mathrm{t} < \frac{h^2}{2\nu}} \tag{42}$$

   de manière à obtenir une discrétisation consistante.

5 Linéarisation et opérateur adjoint (10%)

5.1 Linéarisation

Première méthode. L'équation de Burgers peut s'écrire sous la forme générale

$$\partial_t u + A(u) = f, \tag{43}$$

où l'opérateur spatial est défini par

$$A(u) = -\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{44}$$

De manière à établir la forme linéarisée de cette équation autour de la solution d'équilibre $\overline{u}$, on effectue la décomposition

$$u = \underbrace{\overline{u}}_{\text{équilibre}} + \underbrace{\epsilon u'}_{\text{perturbation}}, \quad \epsilon \ll 1. \tag{45}$$

Par un développement limité au premier ordre, on obtient

$$\partial_t \overline{u} + \partial_t(\epsilon u') + A(\overline{u}) + \left.\frac{\partial A}{\partial u}\right|_{\overline{u}} (\epsilon u') = f. \tag{46}$$

Etant donné que l'équilibre $\overline{u}$ est solution de l'équation de départ, l'évolution de la perturbation est gouvernée par l'équation linéarisée

$$\partial_t u' + \underbrace{\left.\frac{\partial A}{\partial u}\right|_{\overline{u}} (u')}_{=L(\overline{u},u')} = 0. \tag{47}$$

L'opérateur spatial linéarisé autour de l'équilibre $\overline{u}$ appliqué à u' s'écrit donc

$$L(\overline{u}, u') = -\nu \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \overline{u}\frac{\partial u'}{\partial x} + u'\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}, \tag{48}$$

ce qui permet d'aboutir à l'équation de Burgers linéarisée

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \overline{u}\frac{\partial u'}{\partial x} + u'\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = 0. \tag{49}$$

Seconde méthode. En remplaçant directement la solution d'équilibre perturbée (45) dans l'équation de Burgers, on obtient

$$\frac{\partial(\overline{u} + \epsilon u')}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2(\overline{u} + \epsilon u')}{\partial x^2} + (\overline{u} + \epsilon u')\frac{\partial(\overline{u} + \epsilon u')}{\partial x} = f.$$

En tenant compte du fait que l'équilibre est solution de l'équation, en négligeant les termes d'ordre ϵ^2, et par linéarité des opérations de dérivation, l'équation précédente se simplifie sous la forme

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \overline{u}\frac{\partial u'}{\partial x} + u'\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = 0, \tag{50}$$

qui est strictement équivalente à l'équation (49).

5.2 Opérateur adjoint

L'opérateur spatial linéarisé peut s'écrire sous la forme

$$L(\overline{u}, u') = -\nu \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial(\overline{u}u')}{\partial x}. \tag{51}$$

La décomposition en parties symétrique et anti-symétrique s'écrit formellement

$$L(\overline{u}, u') = L_S(\overline{u}, u') + L_A(\overline{u}, u'), \tag{52}$$

avec les définitions suivantes

$$(L_S(\overline{u}, u'), v) = +(u', L_S(\overline{u}, v), \tag{53}$$

$$(L_A(\overline{u}, u'), v) = -(u', L_A(\overline{u}, v)), \tag{54}$$

où v est la fonction test. En ne considérant pas les termes de bord issus des intégrations par parties, la formulation intégrale de la relation (52) devient

$$\int_{\mathbf{\Omega}} (\underbrace{-\nu \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}}_{+L_S(\overline{u},u')} \underbrace{+\frac{\partial(\overline{u}u')}{\partial x}}_{+L_A(\overline{u},u')})\ v\ dV = \int_{\mathbf{\Omega}} u'\ (\underbrace{-\nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{+L_S(\overline{u},v)}\ \underbrace{-\overline{u}\frac{\partial v}{\partial x}}_{-L_A(\overline{u},v)}\ )\ dV, \tag{55}$$

où le premier terme a été intégré deux fois par parties et le second une fois. Par identification des termes avec les équations (53) et (54), nous déduisons que

$$L_S(\overline{u}, u') = -\nu \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}, \tag{56}$$

$$L_A(\overline{u}, u') = +\frac{\partial(\overline{u}u')}{\partial x}. \tag{57}$$

L'opérateur adjoint s'écrit donc

$$L_*(\overline{u}, u') = L_S(\overline{u}, u') - L_A(\overline{u}, u') = -\nu \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} - \frac{\partial(\overline{u}u')}{\partial x}. \tag{58}$$

6 Equations de Navier–Stokes (15%)

Pour déterminer la précision du modèle proposé, nous devons vérifier si l'opérateur et les conditions aux limites sont appropriées à la situation physique. D'après les hypothèses, l'écoulement peut être décrit par les équations de Navier–Stokes que nous écrivons sous forme adimensionnelle et indicielle

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + g_i, \tag{59}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \tag{60}$$

- En prenant la divergence de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (59) et en considérant que les forces volumiques $\boldsymbol{g}$ sont nulles, on obtient

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_i}}_{\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0} - \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_i}}_{\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0} = 0, \tag{61}$$

  où terme non-linéaire devient

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = -\underbrace{\frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{\nabla\boldsymbol{v}:\nabla\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}} - v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_i}}_{\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0}. \tag{62}$$

  On obtient ainsi l'équation de Poisson

$$\boxed{\nabla^2 p = -\nabla\boldsymbol{v} : \nabla\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}} \tag{63}$$

  qui correspond à celle proposée.

- Etant donné que le domaine $\boldsymbol{\Omega}$ est supposé très grand par rapport à la longueur L, on peut faire l'hypothèse que le champ de pression ne soit pas perturbé sur les limites extérieures. Les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann homogènes sont donc appropriées.

  Il s'agit maintenant de déterminer si les conditions aux limites de Neumann homogènes sont aussi applicables sur le profil. On cherche donc une expression du gradient de pression selon la normale à la paroi. En projectant les équations de quantité de mouvement selon $\boldsymbol{n}$, en tenant compte du fait que $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ à la paroi et que $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$, on obtient

$$\nabla p \cdot \boldsymbol{n} = \left(\frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \boldsymbol{v}\right) \cdot \boldsymbol{n}. \tag{64}$$

  Puis, en utilisant l'identité vectorielle

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{v}}_{=\boldsymbol{0}}) - \nabla^2 \boldsymbol{v}, \tag{65}$$

  où le premier terme du membre de droite est nul par le truchement de l'équation de conservation de la masse, on obtient

$$\nabla p \cdot \boldsymbol{n} = \left(-\frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{v})\right) \cdot \boldsymbol{n}. \tag{66}$$

  Comme le nombre de Reynolds vaut 10^6 et qu'on suppose l'écoulement attaché (écoulement peu rotationel), on peut raisonablement supposer que le membre de droite de l'équation (66) soit nul. Les conditions aux limites de Neumann homogènes sont donc aussi applicables sur le profil.

Etant donné que l'opérateur et les conditions aux limites proposées sont conformes aux hypothèses, la prédiction du champ de pression obtenue avec ce modèle est convenable.