

Méthodes de discrétisation en fluides

Dr. Marc A. Habisreutinger

Enoncé de l'examen écrit du jeudi 18 juin 2015, de 08:15 à 11:15, salle CO 011

Sections

Génie mécanique	2014-2015	Bachelor semestre 6	13
GM Echange	2014-2015	Semestre printemps	2

Matériel

- Le seul document autorisé est un résumé personnel, manuscrit et non-photocopié de 12 pages (6 feuilles recto-verso).
 - Aucun appareil électronique (calculatrice, téléphone portable, ordinateur, *etc.*) ne peut être utilisé pendant l'examen.
-

Informations

- L'examen compte six problèmes dont la pondération est indiquée entre parenthèses dans le titre.
 - La clarté des explications ainsi que la qualité de la présentation seront prises en compte dans l'évaluation.
-

Important

- Les problèmes doivent être résolus en utilisant les feuilles de réponse fournies. N'utilisez pas ces feuilles comme brouillon!
- Chaque problème doit être résolu sur une ou plusieurs feuilles de réponse séparées.
- Sur chaque feuille, indiquez votre nom et prénom ainsi que le numéro du problème traité.

1 Différences finies (15%)

Comme illustré à la figure 1, on considère trois noeuds qui appartiennent à un maillage non-uniforme et monodimensionnel. Ces noeuds sont respectivement placés aux coordonnées x_{i-1} , x_i et x_{i+1} . La longueur des intervalles est donnée par

$$x_i - x_{i-1} = \alpha > 0, \quad (1)$$

$$x_{i+1} - x_i = \beta > 0. \quad (2)$$

1. Etablir un schéma aux différences finies permettant d'approximer la dérivée seconde selon x du champ $u_h(x)$ au noeud i en utilisant ses valeurs nodales u_{i-1} , u_i et u_{i+1} .
2. Déterminer l'ordre de cette approximation en fonction de α , β et $\Delta = \beta - \alpha$.
3. Déterminer l'ordre de cette approximation si les noeuds sont équidistants.

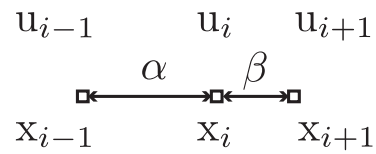


Figure 1: Maillage monodimensionnel et non-uniforme.

2 Equations aux dérivées partielles (15%)

On considère le système d'équations aux dérivées partielles donné par

$$\begin{aligned} +3\frac{\partial u}{\partial t} + 6\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ +2\frac{\partial v}{\partial t} + 6\frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

et on demande d'en déterminer

1. le caractère mathématique,
2. les courbes caractéristiques,
3. les invariants de Riemann.

3 Laboratoires (20%)

```
1  %% 1.  PARAMETERS
2
3  % 1.1 Celerity
4  c = 1e+00 ;
5
6  % 1.2 Mesh
7  L = 2 ; np = 33 ;
8
9  % 1.3 Time-integration
10 theta = 1/2 ; dt = 1e-02 ; tf = 4e+00 ;
11
12 % 1.4 Initial conditions
13 Uo = 1 ; sigma = 1e+01 ;
14
15 %% 2.  COMPUTATION
16
17 % 2.1 Mesh
18 x = linspace(-L/2,+L/2,np)';
19 h = L/(np-1) ;
20
21 % 2.2 Mass matrix
22 M = kron(speye(2,2),speye(np,np)) ;
23
24 % 2.3 Differential operators
25 e = ones(np,1) ;
26 grad = (1/h)*spdiags([-e +e], 0:+1,np-1,np) ;
27 div = (1/h)*spdiags([-e +e],-1: 0,np ,np-1) ;
28
29 % 2.4 Spatial matrix
30 O = sparse(np,np) ;
31 I = speye(np,np) ;
32 A = [ 0 , -I ; -div*(c^2*grad) , 0 ] ;
33
34 % 2.5 Discrete operators
35 H = M/dt+theta*A ;
36 R = M/dt+(theta-1)*A ;
37
38 % 2.6 Boundary conditions
39 d = [1 ; zeros(np-2,1) ; 1] ;
40 D = kron(speye(2,2),spdiags( d,0,np,np)) ;
41 F = kron(speye(2,2),spdiags(~d,0,np,np)) ;
42 H = F*H+D ;
43 R = F*R+D ;
44
45 % 2.7 Initial conditions
46 uo = [Uo*exp(-(sigma*x.^2)) ; zeros(np,1)] ;
47
48 % 2.8 Numerical solution
49 nt = round(tf/dt)+1 ;
50 uh = zeros(2*np,nt) ; uh(:,1) = uo ;
51 for it = 2 : nt
52     t(it) = (it-1)*dt ;
53     uh(:,it) = H\ (R*uh(:,it-1)) ;
54 end
```

1. Déterminer l'équation aux dérivées partielles qui est résolue numériquement en exécutant ce code Matlab.
2. Déterminer les conditions aux limites et initiales.
3. Déterminer les méthodes de discrétisation spatiale et d'intégration temporelle utilisées.
4. Commenter l'ordre de convergence des méthodes d'approximation numérique ainsi que le type d'erreurs qu'elles introduisent.

4 Discrétisation spatiale (20%)

On considère ici l'équation d'advection-diffusion monodimensionnelle

$$\begin{cases} A(u) = -\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \Omega = [0, 1], \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1, \end{cases} \quad (3)$$

avec $\nu, c \in \mathbb{R}_+^*$ et dont la solution analytique est donnée par

$$u(x) = \frac{\exp\left(\frac{cx}{\nu}\right) - 1}{\exp\left(\frac{c}{\nu}\right) - 1}.$$

1. Discrétiser le problème (3) en utilisant un schéma aux différences finies centré du second ordre pour la dérivée seconde, et un schéma aux différences finies amont du second ordre pour la dérivée première. Expliciter toutes les étapes nécessaires.
2. Etablir l'équation modifiée correspondant à l'équation discrète obtenue.
3. En déduire les éventuels avantages et/ou inconvénients par rapport aux méthodes de diffusion artificielle vue en cours (Upwind premier ordre ou Sharfeter–Gummel).
4. L'algorithme de Thomas est-il applicable pour la résolution du système d'équation résultant de la discrétisation de l'équation (3)? Justifiez votre réponse.

5 Relation de dispersion (10%)

On considère l'équation de Schrödinger décrivant la fonction d'onde $\psi(x, t)$ d'une particule quantique

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = V\psi,$$

avec i l'unité imaginaire, \hbar la constante de Planck, μ la masse de la particule et V son énergie potentielle.

1. Etablir la relation de dispersion associée à cette équation ainsi que la vitesse de phase.
2. Commenter et interpréter les différences et similitudes par rapport à l'équation d'advection

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

6 Equations de Navier–Stokes (20%)

On considère la situation décrite par la figure 2, c'est-à-dire un fluide de densité ρ et de viscosité μ qui s'écoule de manière incompressible autour d'un profil d'aile dans un domaine bidimensionnel Ω très grand par rapport à la longueur L . Nous admettrons que l'écoulement s'effectue dans le champ de pesanteur

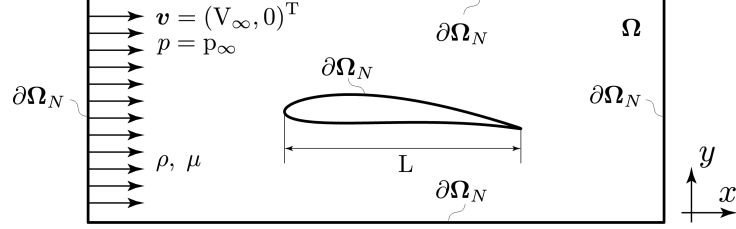


Figure 2: Domaine d'écoulement et définitions.

terrestre représenté par le vecteur d'accélération $\mathbf{g} = (0, -g_y)$ constant, que l'angle d'incidence du profil soit très faible, et qu'il y ait adhérence du fluide à la paroi.

On désire connaître le champ de pression $p^{(n)}$ associé à un champ de vitesse instantané $\mathbf{v}^{(n)}$ donné. Pour cela, on décide de résoudre une équation de Poisson avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} \nabla^2 p^{(n)} &= -(\nabla \cdot \mathbf{v}^{(n)}) : (\nabla \cdot \mathbf{v}^{(n)})^T, & \text{sur } \Omega, \\ \nabla p^{(n)} \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sur } \partial\Omega_N, \end{cases} \quad (4)$$

avec \mathbf{n} la normale extérieure au domaine.

Compte tenu des paramètres réunis dans le tableau 1 et des hypothèses précédentes, déterminer si la résolution de l'équation de Poisson avec les conditions aux limites (4) permet d'obtenir une bonne approximation du champ de pression $p^{(n)}$ associé au champ de vitesse $\mathbf{v}^{(n)}$.

Masse volumique	(ρ)	10^3
Viscosité	(μ)	10^{-3}
Vitesse	(V_∞)	10^0
Longueur du profil	(L)	10^0

Table 1: Paramètres.